Задачи для внутреннего экзамена по теории игр

Знаком «» выделены задачи повышенной трудности.*

Модель 1. Кооперативный рынок.

Рассмотрим следующую кооперативную игру, моделирующую рынок одного ресурса (с производством или без такового): есть n игроков, каждый из которых в начальный момент обладает некоторым ресурсом в объеме $x_i \geq 0$, $i \in N = \{1,...,n\}$. Полезность (трансферабельная) каждого игрока – непрерывная вогнутая неотрицательная (на отрезке $[0, \sum_{i\in N} x_i]$) функция $f_i(x_i)$ от количества ресурса в распоряжении данного игрока.
Игроки могут образовывать коалиции и перераспределять ресурс и полезность между участниками коалиции (и только между ними).

Задача 1.1. Написать выражение для характеристической функции данной игры при рациональном поведении участников коалиций.

Задача 1.2. Доказать, что игра супераддитивна.

Задача 1.3. Доказать, что игра выпукла, если все игроки имеют одинаковые функции полезности, а весь ресурс сначала находится у первого игрока.
Подсказка: по определению выпуклости:

$$S \subset T \;\Rightarrow\; v(S+i) - v(S) \leq v(T+i) - v(T).$$

Задача 1.4*. Доказать, что полученная игра имеет непустое C-ядро.
Подсказка: Воспользуйтесь теоремой Бондаревой, вогнутостью функций полезности, а также равенствами: $\sum_{S:i\in S} d_S = 1$ *для всех* $i \in N$, $\sum_{S\subset N} d_S \sum_{i\in S} g(i,S) = \sum_{i\in N} \sum_{S:i\in S} d_S\, g(i,S)$ *для произвольной функции* $g(i,S)$ *и произвольного сбалансированного покрытия* d_S.

Задача 1.5*. Доказать равенство $\sum_{S\subset N} d_S \sum_{i\in S} g(i,S) = \sum_{i\in N} \sum_{S:i\in S} d_S\, g(i,S)$.

Задача 1.6*. «Размножим» каждого из игроков k раз следующим образом: пусть ресурс в распоряжении каждого из новых игроков с «прототипом» i – $\tilde{x}_i = x_i / k$, а его полезность – $\tilde{f}_i(\tilde{x}_i) = f_i(k\tilde{x}_i)/k$. Качественно проследите, как изменяется C-ядро данной игры с ростом k (расширяется, сужается?) Найдите «предельное» C-ядро.
Подсказка: размер ядра зависит от того, с каким «запасом» выполняется неравенство в теореме Бондаревой.

Модель 2. «Фермеры на общем поле».

Имеются n игроков ($N = \{1,...,n\}$) с целевыми функциями $f_i(x) = x_i(nX - \sum_{j\in N} x_j)$, $x_i \in [0,+\infty)$, $i \in N$.

Задача 2.1. Найти все равновесия Нэша в чистых стратегиях для $n = 2$.

Задача 2.2. Найти все равновесия Нэша в чистых стратегиях при произвольном числе игроков.

Задача 2.3. Найти все оптимальные по Парето исходы для $n = 2$.
Подсказка: множество оптимальных по Парето исходов совпадает со множеством точек, на которых достигает максимума функция $af_1(x_1, x_2) + (1-a) f_2(x_1, x_2)$ *при различных* $a \in [0,1]$.

Задача 2.4. Найти все оптимальные по Парето исходы для произвольного числа игроков.

Задача 2.5. Сравнить суммарный выигрыш игроков в равновесии Нэша с суммарным их выигрышем в оптимальной по Парето точке.

Задача 2.6. Найти предел равновесных стратегий игроков с ростом n, предел их выигрышей, суммарного выигрыша и суммарного оптимального по Парето выигрыша.
На данном примере можно проиллюстрировать применение гипотезы слабого влияния.

Задача 2.7*. Доказать, что для произвольной игры множество оптимальных по Парето исходов совпадает с множеством точек, на которых достигает максимума функция $\sum_{i\in N} a_i f_i(x)$ при различных $a_i \in [0,1]$ таких, что $\sum_{i\in N} a_i = 1$.
Подсказка: воспользуйтесь определением оптимальности по Парето.

Задача 2.8*. Есть ли в этой игре равновесия Нэша в смешанных стратегиях для $n = 2$?
Подсказка: воспользуйтесь линейностью целевой функции игрока по стратегиям противника и вогнутостью по своей стратегии.

Модель 3.

Задана игра n лиц с целевыми функциями $f_i(x) = ax_i - b\sum_{j \in N} x_j$ и стратегиями $x_i \in [0,1]$.

Задача 3.1. Найти все равновесия Нэша в чистых стратегиях.

Задача 3.2. Найти все равновесия в доминантных стратегиях.

Задача 3.3. Найти все оптимальные по Парето ситуации.

Задача 3.4. При каких значениях исходных параметров a и b равновесие Нэша оптимально по Парето?

Модель 4. Равновесия Нэша в смешанных стратегиях и равновесия Байеса.

Игра двух лиц задается следующей матрицей:

Стратегии первого игрока	Стратегии второго игрока	
	L	R
T	0, 0	0, -1
B	1, 0	-1, 3

Задача 4.1. Найдите все равновесия Нэша в смешанных стратегиях.

Задача 4.2. Пусть игроки имеют личные типы: первый игрок – a, второй игрок – b и матрица игры видоизменяется следующим образом:

Стратегии первого игрока	Стратегии второго игрока	
	L	R
T	ea , eb	ea , -1
B	1, eb	-1, 3

Здесь e - некоторое фиксированное число из интервала (0, 1), а a и b – независимые случайные величины, равномерно распределенные на интервале (0, 1).
Найти все равновесия Байеса в чистых стратегиях для данной игры.

Задача 4.3. Найти «предел» равновесия Байеса при $e \to +0$.

Модель 5. Функции полезности и выявление предпочтений.

Пусть задана система событий:
А – не ходить на экзамен
Б – идти на экзамен не подготовленным
В – прочитать учебник и идти на экзамен
Г – прочитать учебник, узнать имя преподавателя, порешать задачи и идти на экзамен.
Студент предпочитает пойти на экзамен не подготовленным, чем совсем не идти на экзамен. Однако он понимает, что лучше почитать учебник, чем идти на экзамен не готовым совсем. В то же время студент понимает, что чтения одного учебника недостаточно, чтобы сдать экзамен, поэтому предпочитает остаться дома, чем потратить ночь на чтение учебника. В то же время, всем другим исходам он предпочитает хорошо подготовиться к экзамену и получить отличную оценку.

Задача 5.1. Построить матрицу отношения предпочтения $\mathbf{f}$ студента.

Задача 5.2. Построить отношение нестрогого предпочтения, если отношение неразличимости совпадает с тождественным отношением ($x \approx y \Leftrightarrow x = y$).

Задача 5.3. Является ли отношение $\mathbf{f}$ асимметричным?

Задача 5.4. Является ли отношение $\mathbf{f}$ полным?

Задача 5.5. Какую аксиому полезности нарушает данное предпочтение $\mathbf{f}$?

Задача 5.6. Какое минимальное изменение следует внести в матрицу отношения для того, чтобы оно удовлетворяло аксиомам полезности?

Задача 5.7. Построить линейную функцию полезности студента, если он индифферентен между лотереей $0.5Б + 0.5В$ и лотереей $0.5А + 0.5Г$, а также индифферентен между лотереей $0.3А + 0.7Г$ и исходом $В$.

Задача 5.8. Может ли студент предпочитать исходу $В$ лотерею, в которой исход $Б$ имеет вероятность не менее 0.6? А лотерею, в которой исход $Г$ имеет вероятность не более 0,6, а исход $В$ – вероятность, равную нулю?

Модель 6. «Ящик Эджворта».

Два игрока могут обмениваться одним из двух видов ресурса. Начальное количество ресурсов у первого игрока $x_1^0 = 1$, $x_2^0 = 0$, у второго – $y_1^0 = 0$, $y_2^0 = 1$. Полезность первого игрока от обладания ресурсами – $f_1(x_1, x_2) = x_1(x_2 + 0.1)$, второго – $f_2(y_1, y_2) = (y_1 + 0.1) * y_2$.

Задача 6.1. Найти переговорное множество и контрактную кривую (множество оптимальных по Парето исходов обмена).

Задача 6.2. Найти равновесие Вальраса данной игры (точка, в которой прямая цен касается одновременно линий уровня функций полезностей обоих игроков).

Задача 6.3. Найти множество равновесий Нэша игры, в которой оба игрока одновременно называют объемы товаров для обмена, после чего сделка совершается при условии, что заявки совпали.

Задача 6.4. Найти равновесия Штакельберга для игры, в которой сначала первый игрок предлагает объемы товаров для обмена, а второй игрок может или согласиться, или не согласиться на это предложение (в случае отказа обмен не происходит).

Задача 6.5. Найти совершенные равновесия по подыграм для игры, в которой:
Этап 1. Первый игрок предлагает объемы товаров для обмена, а второй игрок может или согласиться, или не согласиться на это предложение.
В случае приема предложения происходит обмен, в случае отказа:
Этап 2. Второй игрок предлагает свой вариант обмена, и первый игрок может или согласиться, или нет. Если первый игрок соглашается на обмен, то обмен происходит, но оба игрока теряют 0.1 единицу полезности. В противном случае обмен не происходит и оба игрока теряют 0.1 единицу полезности.

Задача 6.6. Найти равновесия Штакельберга для игры, в которой сначала первый игрок заявляет цену, а второй игрок – объем первого товара для обмена по этой цене.

Задача 6.7*. Придумать для данной постановки задачи игру, равновесие Нэша которой было бы единственно и совпадало бы с равновесием Вальраса.

Модель 7. Модель сотрудничества с неполной информацией.

Две страны решают, куда вкладывать средства – в развитие теории игр (T) или в создание новых вооружений (B). Если президент второй страны привержен идеям пацифизма, то матрица выигрышей имеет следующий вид

Стратегии первой страны	Стратегии второй страны	
	T	B
T	2, 2	0, 0
B	0, 0	1, 1

То есть совместная работа в одной области приводит игроков к успеху.
Однако если президент второй страны – милитарист, то он объявит первой стране войну и тогда в зависимости от действий игроков их выигрыши выглядят так:

Стратегии первой страны	Стратегии второй страны	
	T	B
T	1, 1	-1, 3
B	3, -1	0, 0

Президент первой страны считает вероятность того, что второй игрок – пацифист, равной $0 < a < 1$.

Задача 7.1. Построить развернутую форму данной игры.

Задача 7.2. Определить стратегии игроков, построить игру в нормальной форме и найти ее равновесия Нэша в чистых стратегиях.

Задача 7.3. Построить байесову игру, соответствующую описанной ситуации. Вычислить равновесия Байеса в чистых стратегиях.

Задача 7.4*. Чем равновесия Байеса данной игры отличаются от равновесий Нэша?

Модель 8. Рефлексивные игры и информационные равновесия.

Олигополия Курно с нулевыми затратами на производство.
В игре участвуют три агента с целевыми функциями следующего вида:

$$f_i(q, x_1, x_2, x_3) = (q - x_1 - x_2 - x_3)\, x_i,$$

где $x_i \geq 0$, $i \in N = \{1, 2, 3\}$; $q \in \Omega = \{1, 2\}$.
Содержательно, x_i – объем выпуска продукции i-м агентом, q – величина, характеризующая спрос на производимую продукцию. Для краткости будем называть агента, считающего, что спрос низкий ($q = 1$), пессимистом, а считающего, что спрос высокий ($q = 2$) – оптимистом.
Построить граф рефлексивной игры и найти информационное равновесие в следующих ситуациях:

Задача 8.1. Первый и второй агенты оптимисты и считают всех трех агентов одинаково информированными оптимистами. Третий агент пессимист и считает всех трех агентов одинаково информированными пессимистами.

Задача 8.2. Первый и второй агенты оптимисты и считают всех трех агентов одинаково информированными оптимистами. Третий агент пессимист и адекватно информирован о первых двух.

Задача 8.3. Первый агент считает общим знанием, что спрос будет низким; второй агент считает общим знанием, что спрос будет высоким. Третий агент оптимист и адекватно информирован о первых двух.

Задача 8.4. Каждый из агентов является оптимистом и считает, что остальные двое считают общим знанием низкий спрос.

Задача 8.5. Пусть в игре участвуют два агента с целевыми функциями

$$f_i(q, x_1, x_2) = (q - x_1 - x_2)\, x_i,$$

где $x_i \geq 0$, $i = 1, 2$; $q \geq 0$.
Привести пример информационной структуры, в котором первый агент адекватно информирован о втором, представление первого агента о неопределенном параметре соответствует действительности, однако в равновесии второй агент получает больший выигрыш, чем первый.

Задача 8.6. Привести пример ситуации с тремя участниками и неопределенным параметром q, в которой в действительности имеет место $q = q_0$ и общим знанием среди агентов является $q = q_1 \neq q_0$.

Задача 8.7. Привести пример ситуации с тремя участниками и неопределенным параметром q, в которой в действительности имеет место $q = q_0$ и если бы общим знанием среди агентов было бы $q = q_0$, то выигрыш всех агентов в равновесии был бы меньше, чем в исходной ситуации.

Модель 9. Рефлексивные отображения и информационное управление

Проверить, являются ли стационарными рефлексивные отображения в игре двух агентов с целевыми функциями

Задача 9.1.

$$f_1(q, x_1, x_2) = (q - x_1 + x_2)\, x_1, \quad f_2(q, x_1, x_2) = (q + x_1 - x_2)\, x_2,$$

где $x_i \geq 0$, $i = 1, 2$; $q \in [0, 1]$.

Задача 9.2.

$$f_1(q, x_1, x_2) = (q - x_1 - x_2)\, x_1, \quad f_2(q, x_1, x_2) = (q\, x_1 - x_2)\, x_2,$$

где $x_i \geq 0$, $i = 1, 2$; $q \in [1, 2]$.