Д.А. Новиков

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ ОРГАНИЗАЦИОННЫМИ СИСТЕМАМИ: ВВОДНЫЙ КУРС

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 2
Организационные системы 3
Задача управления 5
Модели принятия решений 7
Элементы теории игр 11
Иерархические игры 17
Классификация задач управления 24
Мотивационное управление 25
Пропорциональные системы стимулирования 37
Многоэлементные системы 39
Системы с распределенным контролем 49
Механизмы планирования 54
Механизмы распределения ресурса 60
Механизмы распределения затрат 66
Механизмы внутренних цен 69
Механизмы экспертизы 74
Заключение 79
Литература 79

Введение

Настоящий материал представляет собой конспект лекций[1], отражающих содержание вводного курса по *теории управления организационными системами* (ОС).

С методической точки зрения структура учебных курсов «социально-экономического цикла» на кафедре «Проблем управления» Московского физико-технического института следующая (см. рисунок 1):

1. Прикладная математика (теория игр [3], теория графов [1], теория принятия решений) – вводные курсы (каждый по одному семестру), которые дают необходимый математический аппарат.

2. Теория управления организационными системами (два семестра) – курс, содержащий базовые модели и механизмы управления.

3. Прикладные (частные) курсы (по одному семестру) – управление проектами, внутрифирменное управление и т.д., демонстрирующие применение теории в различных прикладных областях.

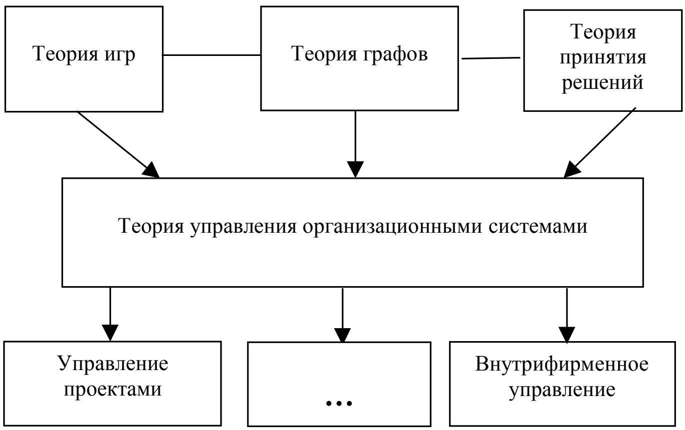

Рис. 1. Структура учебных курсов

[1] *Автор признателен Д.Ю. Иванову и И.А. Цой за большую работу по обработке материала настоящих лекций.*

Курс теории управления ОС является центральным. Все его результаты используются дальше, поэтому он является системообразующим и ключевым. Настоящий материал представляет собой «урезанный» курс (примерно 12-15 академических часов), содержащий минимально необходимые сведения. Учебным пособием по полноценному (годовому) курсу является [5], по «продвинутому» курсу – [2].

Ниже рассматриваются три крупных блока – модели принятия решений и постановка задачи управления (в качестве дополнительной литературы можно рекомендовать [2, 3]), механизмы стимулирования (в качестве дополнительной литературы можно рекомендовать [4]) и механизмы планирования (в качестве дополнительной литературы можно рекомендовать [2, 6]).

Следует отметить, что при редактировании данного материала (как стенограммы лекций) автор стремился сохранить элементы разговорного языка, иногда в ущерб литературности и корректности изложения.

Организационные системы

Предметом теории управления организационными системами являются организации. В «Философском энциклопедическом словаре» приводится следующее определение[1] *организации*: «1) внутренняя упорядоченность, согласованность взаимодействия более или менее дифференцированных и автономных частей целого, обусловленная его строением; 2) совокупность процессов или действий, ведущих к образованию и совершенствованию взаимосвязей между частями целого; 3) объединение людей, совместно реализующих некоторую программу или цель и действующих на основе определенных процедур и правил».

То есть термин "организация" может применяться для обозначения свойства, процесса и объекта. Мы будем использовать последнее определение, то есть под *организационной системой* будем понимать организацию как объединение людей, совместно реализующих некоторую программу или цель и действующих на основе определенных процедур и правил. Отметим, что наличие процедур и правил, регламентирующих совместную деятельность членов

---

[1] *Вновь вводимые термины выделены курсивом* (*см. также Глоссарий на сайте www.mtas.ru*).

организации (то есть, наличие *механизма функционирования*), является определяющим свойством и отличает организацию от группы и коллектива.

Общее определение *механизма* таково – «система, устройство, определяющее порядок какого-либо вида деятельности». Помимо механизма функционирования можно выделить *механизм управления* – совокупность процедур принятия управленческих решений.

Таким образом, механизмы функционирования и механизмы управления определяют как ведут себя члены организации[1], и как они принимают решения.

Для того, чтобы управляющий орган – *центр* – выбрал ту или иную процедуру принятия решений (тот или иной механизм управления, то есть зависимость своих действий от целей организации и действий управляемых субъектов – *агентов*) он должен уметь предсказывать поведение агентов – их реакцию на те или иные управляющие воздействия. Экспериментировать в жизни, применяя различные управления и изучая реакцию подчиненных, не эффективно и практически никогда не представляется возможным. Здесь на помощь приходит *моделирование* – метод исследования систем управления на моделях. Имея адекватную модель, можно с ее помощью проанализировать реакции управляемой системы (этап *анализа*), а затем выбрать и использовать на практике (этап *синтеза*) то управляющее воздействие, которое приводит к требуемой реакции.

Наличие моделей и механизмов управления привлекательно как с точки зрения управляющего органа – так как позволяет предсказать поведение управляемых субъектов, так и с точки зрения управляемых субъектов – так как делает предсказуемым поведение управляющих органов. То есть, снижение неопределенности за счет использования механизмов управления является одним из существенных свойств организации как социального института.

С точки зрения истории, в конце 1960-х годов XX века, на фоне бурного развития кибернетики, исследования операций, математической теории управления (теории автоматического регулирова-

---

[1] С этой точки зрения механизм управления можно рассматривать как синоним метода управления, так как и тот и другой определяют как осуществляется управление.

ния – ТАР) и интенсивного внедрения их результатов при создании новых и модернизации существующих технических систем, практически одновременно во многих научных центрах как в СССР, так и за рубежом, начали предприниматься попытки применения общих подходов теории управления для разработки математических моделей социальных и экономических систем (теория активных систем – ТАС, теория иерархических игр – ТИИ, Mechanism Design – MD) – см. рисунок 1.

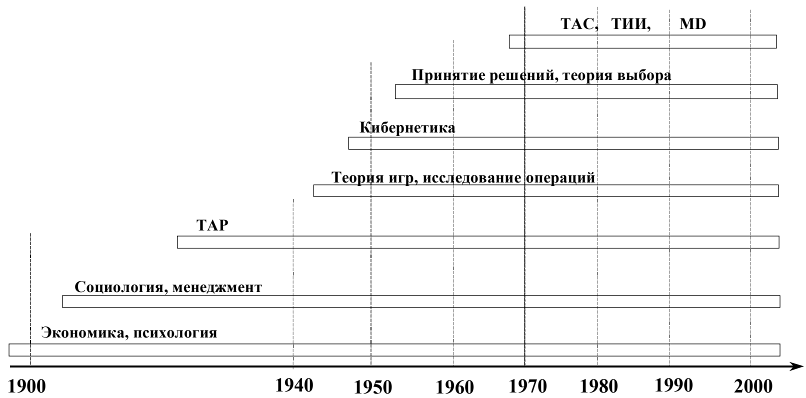

Рис. 2. Хронология развития представлений об организационных системах

Задача управления

Если речь идет об управлении организационными системами, давайте поймем сначала, что такое управление. Формальное определение таково: *управление* – воздействие на управляемую систему с целью обеспечения требуемого ее поведения. Значит надо детализировать, что такое «управляемая система», что такое «воздействие», что такое «поведение», с чьей точки зрения «требуемым» оно должно быть и т.д.

Рассмотрим простейшую входо-выходную модель системы, состоящей из управляющего органа – центра – и управляемого субъекта[1] – агента – см. рисунок 3. Имеются: на входе – управляющее воздействие и внешние воздействия, на выходе – действие управляемого субъекта. Добавляем обратную связь (управляющий орган знает состояние – действие – субъекта) и получаем структуру простейшей системы управления.

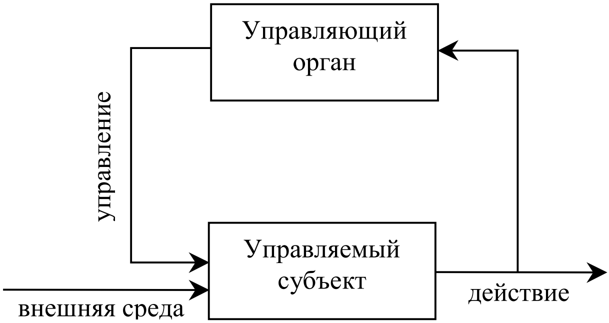

Рис. 3. Входо-выходная модель системы управления

Кто что выбирает из участников системы? Пусть состояние системы описывается действием агента $y \in A$, принадлежащим некоторому допустимому множеству *A*. Допустим, есть управление $u \in U$, принадлежащее множеству *U*. Пусть также есть *критерий эффективности функционирования* системы $K(u, y)$, который зависит от переменных, описывающих эту систему, т.е. от управления и от состояния системы. Мы будем пользоваться при описании предпочтений участников и при описании постановки задач управления скалярными моделями, т.е. считать, что все функционалы отображают множества в числовую ось: $K(u, y) : A \times U \to \Re^1$. Это значит, что многокритериальных задач мы рассматривать не будем – у них есть своя специфика.

---

[1] Зададимся вопросом – в чем разница между управляемым субъектом и объектом управления? Термин «объект» часто применяется в теории управления и в принятия решений. Объект, по определению, не обладает активностью, в то время, как субъект активен и способен самостоятельно принимать решения. Поэтому можно применять оба термина, но, говоря "субъект", мы подчеркиваем, что речь идет о людях. Далее мы будем говорить, центр и агент, подразумевая активность и того, и другого.

Предположим, что известна реакция управляемого субъекта на то или иное управление. Пусть зависимость очень простая – состояние объекта является известной функцией от управления: $y = G(u)$, где $G(\cdot)$ – модель управляемого субъекта, которая описывает его реакцию на управляющее воздействие. Коль скоро известна эта зависимость, если мы ее подставим в критерий эффективности функционирования, то получим функционал $\Phi(u) = K(u, G(u))$, который будет зависеть только от управления. Вот этот функционал называется *эффективностью управления*. Дальше задача заключается в поиске *оптимального управления*, то есть допустимого управления, обладающего максимальной эффективностью: $\Phi(u) \to \max_{u \in U}$. Это – задача синтеза оптимального управления, или просто "*задача управления*".

На первый взгляд все выглядит очень просто, в чем же заключается хитрость? Действительно, если все функционалы и множества известны, получим оптимизационную задачу, а решать ее – дело математики. Проблема заключается в том, что модель управляемого субъекта $G(\cdot)$ может быть очень сложной. По крайней мере, она должна быть сложной. Если мы описываем человека, группу, коллектив, организацию, предприятие, то понятно, что объект управления сложный, и модель должна быть адекватно сложной. Поэтому для того, чтобы перейти к детализации задачи управления, необходимо вернуться к построению модели управляемого субъекта. Математическим описанием поведения людей занимается теория принятия решений и теория игр. Поэтому, сделаем маленький экскурс в эти теории для того, чтобы понять, какого рода известными моделями мы можем пользоваться.

Модели принятия решений

Как описывается поведение человека? В экономике с середины XIX века существует концепция максимизации полезности, т.е. концепция экономического человека, который ведет себя таким образом, чтобы максимизировать свою полезность. Несмотря на всю априорную ограниченность этой теории – потому что не всегда понятно, что такое полезность, почему человек стремиться ее максимизировать, – концепция оказалась плодотворной, и ничего лучшего пока не изобретено.

Пусть имеется один субъект, который может выбирать действия из какого-то множества. Предположим, что предпочтения этого субъекта описывается функцией полезности $f(y): A \to \Re^1$ (или целевой функцией, функцией предпочтения – будем использовать эти термины как синонимы), которая отображает множество его *действий* (альтернатив) A на числовую ось $\Re^1$. Значения этой функции позволяют сравнивать разные альтернативы. Если есть два варианта – два элемента из множества допустимых действий, то лучшим будет тот, который приводит к большему значению функции. Следовательно, агент будет максимизировать свою полезность и производить выбор из *множества выбора*, которое представляет собой множество максимумов его целевой функции: $P(f(\cdot), A) = \operatorname{Arg}\max\limits_{y \in A} f(y)$. Значит, множество выбора агента зависит от его предпочтений $f(\cdot)$ и от того множества A, из которого он производит выбор.

Множество выбора зависит от двух составляющих: от функции и от допустимого множества. Описывая модель поведения управляемого субъекта, зная, что управление – некоторое воздействие на субъект, в рамках этой модели видно, что воздействовать на субъект можно, влияя на его целевую функцию и влияя на то множество, из которого он делает выбор. Предположение, что агент производит выбор из множества выбора (то есть, стремится максимизировать свою целевую функцию) называется *гипотезой рационального поведения*, которая заключается в том, что агент выбирает с учетом всей имеющейся у него информации наилучшую с его точки зрения допустимую альтернативу, т.е. ту альтернативу, на которой достигается максимум его целевой функции.

Замечательно, но эта модель слишком простая, и в жизни редко бывает так, что наш выбор однозначно определяет наш выигрыш. Иногда вмешиваются какие-то факторы, которые нам не подконтрольны. Давайте попробуем учесть их в модели следующим образом: пусть существует неопределенный фактор $\theta \in \Omega$ – *состояние природы*. Наши предпочтения уже зависят от того, что выбираем мы, и от этого состояния природы, т.е. предпочтения определены на декартовом произведении множества допустимых действий и множества возможный состояния природы, и целевая функция отображает это декартово произведение в числовую ось:

$$f(y,\theta): A \times \Omega \to R^1 .$$

Написать такую же формулу, как и для предыдущего случая, для такой целевой функции мы уже не можем, потому что, если агент будет выбирать действие, максимизирующее его целевую функцию, то максимум будет зависеть от того, каково будет состояние природы. Для того, чтобы описать принятие решений в условиях неопределенности, нужно ввести новую гипотезу – *гипотезу детерминизма*: субъект, принимая решение, стремиться устранить неопределенность и принимать решения в условиях полной информированности. Для этого он должен перейти от целевой функции, зависящей от неопределенных факторов, к целевой функции, которая зависит только от того, что он может выбрать сам.

Здесь возможны следующие варианты:

1. Подстановка какого-то конкретного значения θ' состояния природы. Например, я считаю, что завтра будет дождь. И это значение подставляется в целевую функцию и ищется максимум $f(y,\theta')$ по *y*. Но не всегда это удается. Значение, выбранное агентом, вопрос психологический (например, я думаю, что курс доллара завтра будет столько-то рублей, но не могу объяснить почему) – ответить за него мы не можем.

2. Предположим, что мы – пессимисты и считаем, что реализуется наихудшее состояние природы. Такой принцип принятия решений называется принципом *максимального гарантированного результата* и заключается в следующем: действие агента будет доставлять максимум его целевой функции при условии, что он рассчитывает на наихудшее для себя значение неопределенного параметра. Тогда он берет сначала минимум по состоянию природы, а потом максимум по своему действию:

$$y^г \in \operatorname{Arg}\max_{y \in A} \min_{\theta \in \Omega} f(y,\theta) .$$

Преимущества данного принципа принятия решений: он дает оценку снизу значения целевой функции (если мы подставим наше действие в целевую функцию, то меньше данного значения не получим), т.е. это точка отсчета снизу. Он плох своей крайней пессимистичностью, т.к., если природа не настроена против нас, то такое допущение неверно. Если под природой понимать не социально-экономическое окружение, а то, что творится за окном, то в этом смысле природе безразлично то, что мы с вами делаем.

3. Поэтому, естественно, можно использовать и другую крайность – крайний оптимизм. Т.е., рассчитывать на то, что природа к нам благосклонна, и выбирает действие, которое для нас наиболее благоприятно. Тогда нужно выбирать максимум целевой функции при условии реализации наилучшего состояния природы:

$$y^o \in \operatorname{Arg}\max_{y \in A} \max_{\theta \in \Omega} f(y, \theta) .$$

Это называется *критерий оптимизма*, и он дает оценку сверху. Понятно, что лучше уже не будет. Этим принцип оптимизма хорош, но этим он и плох. Понятно, что крайний оптимизм, как и крайний пессимизм, в жизни редко встречаются и редко выживают.

Возможны любые комбинации этих критериев, можно брать их линейную свертку, то есть, балансировать между оптимизмом и пессимизмом.

Вот три варианта устранения неопределенности в условиях, когда о неопределенном параметре мы знаем только то, что он принадлежит заданному множеству. Такая неопределенность называется *интервальной* – мы знаем «интервал» значений неопределенного параметра. Эту информацию мы используем, когда берем минимум или максимум по множеству возможных значений неопределенного параметра.

Предположим, что у нас появилась дополнительная информация о значении неопределенного параметра θ, принадлежащего множеству Ω. Допустим, что известно распределение вероятностей $p(\theta)$ на этом множестве (соответствующая неопределенность называется *вероятностной*), тогда логично использовать это знание, и устранять неопределенность следующим образом: у нас есть целевая функция $f(\cdot)$, зависящая от нашего действия и значения неопределенного параметра. Давайте возьмем от нее математическое ожидание по известному распределению, получим функцию *ожидаемой полезности* ("ожидаемой" с точки зрения математического ожидания) $w(y) = \int_{\Omega} f(y, \theta) p(\theta) d\theta$. Теперь, устранив неопределенность взятием математического ожидания, снова получили детерминированную модель. Можно максимизировать функцию ожидаемой полезности, зависящей только от действия, выбором этого действия.

Возможны и другие способы устранения неопределенности. Можно рассчитать риск, например, вероятность того, что значение целевой функции окажется меньше, чем заданное. И этот риск минимизировать, т.е. использовать не первый момент распределения, а дисперсию и другие характеристики. Подходы могут быть разные, главное – устранить зависимость от неопределенного параметра, что необходимо в силу гипотезы детерминизма, которая требует, чтобы мы устранили неопределенность, а потом принимали решения в условиях полной информированности.

Возможна другая информация – мы можем знать какие-то значения функций принадлежности для состояний природы (нечеткая неопределенность). Соответствующие модели рассмотрены в [5], заниматься ими подробно мы не будем.

Давайте усложнять ситуацию дальше. Мы начали с того, что была функция, зависящая только от нашего действия, потом добавили неопределенность в виде параметра, описывающего внешнюю среду. Но есть еще другие люди, мы взаимодействуем с другими людьми, а значит, должны описать это взаимодействие.

Элементы теории игр

Теория игр описывает взаимодействие таких рациональных субъектов в ситуации, когда выигрыш одного зависит от действий всех, то есть *игра* определяется как такое взаимодействие субъектов, что выигрыш каждого игрока в общем случае зависит от действий всех.

Давайте формализуем эту ситуацию. Пусть есть множество *игроков* $N = \{1,2,...,n\}$. i-ый игрок выбирает действие y_i из множества своих допустимых действий $y_i \in A_i$, $i \in N$. Действия всех игроков называются *ситуацией игры*: $y = (y_1,..., y_n)$. Целевая функция i-го игрока зависит от вектора действий всех игроков y и является отображением $f_i(y): A' \to \Re^1$ множества, являющегося декартовым произведением множества допустимых действий всех игроков $A' = \prod_{i \in N} A_i$ в числовую ось. Т.е. каждой комбинации действий игроков соответствует некоторый выигрыш каждого из них. Совокупность множества игроков (агентов), целевых функций и допустимых множеств агентов $\Gamma_0 = \{N, \{f_i(\cdot)\}_{i \in N}, \{A_i\}_{i \in N}\}$ называется *игрой в нормальной форме* при условии, что каждый из игроков выбирает свои действия однократно, одновременно с другими игроками и независимо, то есть, не имея возможности договариваться с ними о своих стратегиях поведения – модель некооперативного поведения.

Давайте посмотрим на целевую функцию i-го игрока и попробуем применить к ней гипотезу рационального поведения. Игрок рационален, i-ый игрок выбирает i-ую компоненту вектора y, и своим выбором пытается максимизировать свою целевую функцию: "$f_i(y) \to \max$". Но то его действие, на котором достигается максимум целевой функции, будет зависеть от выбора других агентов. Задача такого вида в некотором смысле бессмысленна, т.к. ее решением будет действие $y_i^*(y_{-i})$, зависящее от действий всех других игроков – вектора $y_{-i} = (y_1, ..., y_{i-1}, y_{i+1}, ..., y_n)$, который называется *обстановкой игры* для i-го агента.

Рассмотрим возможные рассуждения отдельного игрока (агента): "Если остальные будут вести себя таким-то образом, то мне нужно вести себя таким образом, который максимизирует мою целевую функцию при данной обстановке. Но для того, чтобы выбрать свое действие, мне нужно знать, как будут себя вести остальные. Значит, нужно делать предположения о поведении остальных игроков". По аналогии с тем, как мы устраняли неопределенность в случае, когда был один субъект, здесь имеется множество игроков с так называемой *игровой неопределенностью*, т.е. неопределенностью, порождаемой целенаправленным поведением других игроков. Каждый игрок не может априори сказать, что сделают остальные. Рассмотрим возможные варианты.

1) Пусть i-ый игрок считает, что все остальные игроки играют против него. Это – критерий пессимизма, который соответствует тому, что есть целевая функция i-го игрока, которая зависит от его действия и от действия остальных игроков, и он выбирает действие

$y_i^г \in \operatorname{Arg}\max_{y_i \in A_i} \min_{y_{-i} \in A_{-i}} f_i(y_i, y_{-i})$, где $A_{-i} = \prod_{j \neq i} A_j$. Он считает, что остальные игроки, несмотря на свои собственные интересы, будут действовать против него, а уж выбором своего действия он будет максимизировать то, что зависит от него. Конструкция аналогична рассмотренному выше принципу максимального гарантированного результата в условиях интервальной неопределенности: берется сначала минимум по тому, что не зависит от рассматриваемого субъекта, потом – максимум по тому, что от него зависит. Такой принцип хорош тем, что всегда дает какое-то однозначное решение: если функция хорошая, если минимум и максимум достигаются, то мы можем подсчитать этот минимум и максимум. Плох такой принцип тем, что игрок, принимающий решения, считает, что все остальные играют против него, и он забывает про то, что у остальных есть свои интересы, и, наверное, цель каждого игрока – максимизировать свою целевую функцию, а не сделать хуже партнеру (это может быть частным случаем целевой функции, но, к счастью, не всегда в жизни так бывает).

Определенный выше вектор действий игроков называется *максиминным*, или *гарантирующим равновесием*. Это один из вариантов определения исхода игры. Можно сказать, что один из возможных вариантов поведения игроков – каждый из них выберет гарантирующую стратегию, т.е. реализует максиминное равновесие.

Но этот вариант не единственен. И основная проблема теории игр на сегодняшний день заключается в том, что не существует одной концепции решения игры, т.е. мы не можем, глядя на целевые функции и допустимые множества, сказать, что игроки сыграют вот так-то. Необходимо вводить еще какие-то предположения, что приводит к разным прогнозируемым исходам игры. Ввели предположение о гарантирующей стратегии – получили максиминное равновесие. В разных моделях используются разные предположения, которые приводят к различным концепциям равновесия. Поэтому рассмотрим некоторые другие варианты.

2) Представим себе такую ситуацию, что целевая функция i-го игрока $f_i(y)$ достигает максимума по его действию в точке, которая не зависит от действий других игроков, т.е. у игрока существу-

ет его действие, которое является наилучшим независимо от того, что делают оппоненты. Редко в жизни такое бывает, что мы действуем, не оглядываясь на остальных. Но если такое случается, то можно сразу это действие вычислить и сказать, что его и надо предпринимать. Это оптимальное действие, не зависящее от обстановки, называется *доминантной стратегией* агента. Формальная запись говорит следующее: стратегия y_i^d будет доминантной, если какая бы обстановка игры не складывалась и какое бы действие не выбирал i-ый игрок при этой обстановке, его выигрыш будет максимальным при выборе именно доминантной стратегии:

$$\forall y_i \in A_i \ \ \forall y_{-i} \in A_{-i} \ \ f_i(y_i^d, y_{-i}) \geq f_i(y_i, y_{-i}) .$$

Отметим, что в обеих частях неравенства фигурирует произвольная, но одна и та же обстановка.

Если у каждого игрока существует доминантная стратегия, то совокупность доминантных стратегий называется *равновесием в доминантных стратегиях* (РДС) $\{y_i^d\}_{i \in N}$. Это – идеальная ситуация для исследователя, описывающего математическую модель. Если удалось построить такую модель, в которой есть равновесие в доминантных стратегиях игры управляемых субъектов – это замечательно, т.к. сложно описывать взаимодействие субъектов между собой, учитывать, как они друг на друга влияют, как они принимают решения. Если есть равновесие в доминантных стратегиях, то каждый принимает решение независимо. А описывать независимое принятие решений гораздо проще. Представьте сколько попарных зависимостей может быть между n агентами, а тут мы можем управлять каждым независимо. Но такая ситуация встречается очень редко.

3) Гораздо чаще существует *равновесие Нэша* (РН). Джон Нэш, американский математик, в начале 50-х годов XX века предложил следующее: устойчивым исходом взаимодействия агентов можно считать такой вектор их действий, от которого в одиночку никому не выгодно отклоняться. Это значит, что ни один из агентов, в одиночку меняя свою стратегию на другую, не может увеличить свой выигрыш при условии, что остальные своих стратегий не меняют.

Формальное определение равновесия Нэша $y^N \in A'$ таково: $\forall i \in N \quad \forall y_i \in A_i \quad f_i(y_i^N, y_{-i}^N) \geq f_i(y_i, y_{-i}^N)$, то есть для любого агента и для любого допустимого его действия выбор им равновесного по Нэшу действия дает ему выигрыш не меньший, чем при выборе любого другого действия при условии, что остальные игроки играют равновесные по Нэшу стратегии.

Отличие между изложенными подходами заключается в том, что в формулировке равновесия в доминантных стратегиях фигурирует произвольная обстановка, то есть доминантная стратегия – наилучшая при любой обстановке. А стратегия по Нэшу – наилучшая при «нэшевской» обстановке.

Равновесие по Нэшу хорошо тем, что в большинстве моделей оно существует. Одним из его недостатков является то, что оно не всегда единственно. Представьте, если есть два равновесия, то как предсказать, в каком из них окажутся агенты. Нужны дополнительные предположения.

Кроме того, равновесие по Нэшу не устойчиво к отклонению двух и более игроков. По определению одному агенту не выгодно отклоняться, но это не значит, что если два агента договорились и одновременно отклонились, то они не смогут оба выиграть. То есть равновесие Нэша – существенно некооперативная концепция равновесия.

4) Помимо вышесказанного, необходимо ввести понятие точки Парето. Вектор действий агентов $y^P \in A'$, принадлежащий множеству A' допустимых векторов действий, будет *эффективным по Парето*, если для любого другого вектора действий найдется агент такой, что значение его целевой функции будет строго меньше, чем в точке Парето $\forall y \neq y^P \quad \exists i \in N \quad f_i(y) < f_i(y^P)$.

Т.е. точка Парето – такая точка, отклоняясь от которой, мы не можем одновременно увеличить значения целевых функций всех игроков. Концепция эффективности по Парето хороша тем, что позволяет говорить, что, если мы можем сделать лучше всем, то это надо делать. Любая разумная модель должна удовлетворять эффективности по Парето.

Вопрос заключается в том, как соотносятся все вышеперечисленные концепции равновесия (максиминное равновесие, РДС и равновесие Нэша) с эффективностью по Парето, т.к. хочется, чтобы результат, приносящий индивидуальный максимум, был бы еще эффективным для общества в целом. Оказывается, что эффективность по Парето, к сожалению, никак не соотносится ни с одной из трех концепций решения игры, изложенных выше.

Пример 1. Рассмотрим хрестоматийный пример с конкретными целевыми функциями. Пусть каждый игрок выбирает действия из отрезка $A_i = [0;1]$. Выигрыш i-го агента – $f_i(y) = y_i + \sum_{j \neq i} (1 - y_j)$.

Давайте посмотрим, существует ли равновесие в доминантных стратегиях или равновесие по Нэшу.

Если внимательно посмотреть на целевую функцию, то видно, что i-му агенту выгодно, максимизируя свою целевую функцию, выбирать максимальное значение своего действия, независимо от того, что делают остальные (производная по действию i-го агента строго положительна независимо от обстановки). Значит, каждый агент будет выбирать максимальное значение своего действия, т.е. для него существует доминантная стратегия. Чтобы не сделали остальные, он, увеличивая свое действие, выигрывает, а больше единицы он выбрать не может, значит, $y_i^d = 1$, $i \in N$.

Давайте посчитаем выигрыш каждого агента от равновесия в доминантных стратегиях. Если все выбрали по единице, то каждый получил выигрыш, равный единице: $f_i(y^d) = 1$, $i \in N$.

Рассчитаем вектор действий, эффективный по Парето (вычислив, например, максимум суммы целевых функций всех агентов). Это – вектор нулевых действий: $y_i^P = 0$, $i \in N$. Если все выбирают нулевые действия, то выигрыш i-го агента равен $f_i(y^P) = n - 1$, $i \in N$, и нельзя увеличить выигрыш одновременно всех агентов. Если мы хотим увеличить выигрыш i-го агента и начинаем увеличивать его действие, то тем самым уменьшаем выигрыши остальных, потому что это действие входит с минусом в целевые функции других агентов.

Если играют три или более агентов, то, выбирая действия, эффективные по Парето, они получают строго больше, чем играя доминантные стратегии, так как $n - 1 > 1$ при $n \geq 3$.

Спрашивается, будет ли точка Парето точкой равновесия Нэша (ведь любое РДС является равновесием Нэша), то есть рациональной с точки зрения индивидуального поведения. Если кто-то из игроков выберет ненулевую стратегию, он выиграет. Поэтому он увеличивает свое действие до единицы, остальные поступают аналогично, и все "скатывается" к ситуации равновесия в доминантных стратегиях, которая никому не выгодна, но устойчива. •[1]

Рассмотренный пример иллюстрирует, что устойчивость относительно индивидуальных отклонений никак не связана с эффективностью по Парето. Решить эту проблему можно следующим образом: если разыгрывается повторяющаяся игра, и игроки договариваются наказывать того, кто отклоняется от коллективного оптимума, т.е. равновесия по Парето, то оказывается, если наказание достаточно сильно, то каждый будет играть индивидуально устойчиво ту стратегию, которая выгодна для всех.

Другой вариант, как этого можно достичь. Мы, описывая взаимодействие агентов, которые равноправны, принимаем решение посадить над ними начальника, который будет ответственен за то, чтобы они не отклонялись, не пытались локально увеличить свой выигрыш, а играли равновесие, эффективное по Парето. Т.е. функция начальника – предотвратить отклонения агентов от оптимума по Парето. Можно даже рассчитать, сколько агенты могут выделить на содержание такого начальника (как разность между тем, что они получают в сумме в точке Парето и тем, что они имеют при равновесии в доминантных стратегиях). Вот – одно из теоретико-игровых обоснований возникновения иерархий.

Итак, выше описана игра в нормальной форме, где выигрыш каждого агента зависит от действий всех, и все агенты принимают решения одновременно. Рассмотрим модели ситуаций, когда решения принимаются однократно, но последовательно.

Иерархические игры

С точки зрения управления наиболее интересными являются модели игр, в которых агенты принимают решения не одновременно, а последовательно, т.е., если мы говорим, что есть управляющий орган и управляемые субъекты, то сначала начальник определяет правила игры, а дальше субъекты принимают решения, исходя

---

[1] *Символ "•" здесь и далее обозначает окончание примера, доказательства и т.д.*

из этих правил. Такие игры называются иерархическими. По определению, *иерархическая игра* – игра с фиксированной последовательностью ходов.

Простейшая модель иерархической игры – такая, в которой есть первый игрок – центр, второй игрок – агент (см. рисунок 4).

Последовательность принятия решений такова, что сначала свою стратегию выбирает центр, а потом (при известной стратегии центра) свою стратегию выбирает агент. Тут возможны разные ситуации.

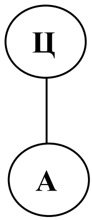

Рис. 4. Базовая структура «центр-агент»

Пусть известна целевая функция центра $\Phi(u, y)$, которая зависит от выбираемого им действия $u \in U$ и действия $y \in A$ агента, и имеется агент, выигрыш которого $f(u, y)$ зависит от тех же самых переменных. С одной стороны, получается игра двух лиц в нормальной форме, поэтому, если не введено условие последовательности выбора стратегий, то возможно достижение равновесия по Нэшу и т.п.

Предположим, что ситуация такая: центр выбрал свою стратегию и сообщил ее агенту. Соответствующая игра называется *игрой* Γ_1 и описывается следующим образом: каким образом будет вести себя агент, зная выбор центра. Найдем множество тех действий, на которых достигается максимум целевой функции агента при фиксированном выборе центра: $P(u) = \operatorname{Arg}\max\limits_{y \in A} f(u, y)$. Понятно, что это множество зависит от того выбора $u \in U$, который сделал центр. Если центр и агент знают целевые функции и допустимые множества друг друга, то центр может предсказать, как отреагирует агент: «если агент рационален, то в ответ на мое действие, он выберет одно из действий из множества действий, доставляющих максимум его целевой функции». Какова же стратегия центра, побуждающая агента выбрать то, что нужно центру? Зная свой выигрыш $\Phi(u, y)$, который зависит от действия центра и агента, центр должен определить, какое действие выберет агент из известного множества $P(u)$. Это множество может состоять из одной точки или нескольких. Во втором случае нужно ввести определенное предположение, как поведет себя агент. Типичных предположений два: критерии оптимизма и пессимизма (см. модели принятия решений выше).

Критерий оптимизма выглядит следующим образом. Агенту в принципе все равно (с точки зрения его целевой функции), какое действие из множества $P(u)$ выбирать. Центр может рассуждать так: если агенту все равно, какое действие выбирать, будем считать, что он выберет действие, которое выгодно мне. Разумно! Это предположение соответствует принципу оптимизма. Научно оно называется *гипотезой благожелательности*. Т.е. агент настроен благожелательно к центру и выбирает из множества действий, которые максимизируют его целевую функцию, то действие, которое наилучшее для центра.

Если взят максимум по действию агента, то осталась зависимость только от действий центра. Центр, как рациональный игрок, будет выбирать такое свое действие, которое будет максимизировать его целевую функцию.

Значит, оптимальным управлением (решением иерархической игры) будет действие центра, которое доставляет максимум по множеству допустимых управлений от такого функционала, в который мы подставили максимум по множеству $P(u)$ "реакций" агента:

$$u^o \in \operatorname{Arg}\max_{u \in U} \max_{y \in P(u)} \Phi(u, y).$$

Пессимистический подход – центр думает так: агенту все равно, какое действие выбрать из множества $P(u)$, поэтому рассмотрю-ка я наихудший случай. Тогда решение следующее:

$$u_g^o \in \operatorname{Arg}\max_{u \in U} \min_{y \in P(u)} \Phi(u, y),$$

то есть центр берет минимум своей целевой функции по действию агента из множества $P(u)$, а дальше максимизирует выбором своего действия.

Таким образом, мы получаем два различных решения игры. Первое определение решения игры называется *решением Штакельберга* (немецкий экономист, в 1938 году разработавший такую модель игры). Второе решение дает максимальный гарантированный результат центра в игре Γ_1.

Рассмотрим теперь игру, когда центр говорит агенту не конкретное значение управления, которое он выбирает, а сообщает зависимость того, каким будет управление в зависимости от действия агента. Простейшим примером является система стимулирования: начальник говорит подчиненному, если ты сделаешь 10 деталей, то получишь 10 рублей, а за 20 – 25 рублей. Т.е. он сообщает подчиненному зависимость вознаграждения от действия подчиненного (не конкретное значение, как в игре Γ_1, а именно зависимость).

Эта ситуация моделируется *игрой* Γ_2, которая имеет следующий вид: выбор центра является функцией от действия агента $u = \tilde{u}(y)$. Дальнейшая логика рассуждений аналогична предыдущей: центр может предсказать, что в зависимости от той функции, которую он назначит, агент выберет действие, которое будет максимизировать его целевую функцию, в которую подставлен выбор центра: $P(u(\cdot)) = \operatorname{Arg}\max\limits_{y \in A} f(\tilde{u}(y), y)$.

Зная это, центр может решать задачу, например, такую:

$$\min_{y \in P(\tilde{u}(\cdot))} \Phi(\tilde{u}(\cdot), y) \to \max_{\tilde{u}(\cdot)}.$$

Данная запись является стандартной записью простейшей *теоретико-игровой задачи управления*.

С содержательной точки зрения задача очень простая: есть два агента, известны их целевые функции, допустимые множества, нет никакой неопределенности.

С точки зрения математики: есть функционал, мы должны взять минимум этого функционала по переменной, которая принадлежит множеству, зависящему от искомой функции. Потом то, что получено, нужно максимизировать выбором этой функции. Как решать эту задачу в общем виде науке было не известно до тех пор, пока в конце 60-х годов XX века великий советский математик Юрий Борисович Гермейер не доказал, что решение имеет очень простую структуру. Соответствующая теорема достаточно громоздкая, но идея качественно заключается в следующем: функция $\widetilde{u}(\cdot)$ имеет очень простой вид, и управление состоит из двух режимов: *режима наказания* и *режима поощрения*. Наказывать агента нужно, если он не делает то, что нужно центру (то есть выбирает действие y, отличное от того действия x, которое требуется центру – это действие в задачах управления называется *планом*). Поощрять нужно в ситуации, когда агент делает то, что нужно центру:

$$\widetilde{u}(y) = \begin{cases} u_{наказание}, y \neq x \\ u_{поощрение}, y = x \end{cases}.$$

Далее, как искать функции поощрения, наказания и план x – дело техники.

Итак, идея заключается в существовании двух режимов и соответствующем решении на их основе задачи Γ_2. Теперь давайте посмотрим последовательно на игры Γ_1 и Γ_2. В игре Γ_1 первым ход делает центр и сообщает свою безусловную стратегию, т.е. не зависящую от действия агента. Получаем игру Штакельберга. В игре Γ_2 центр ведет себя более сложным образом: он говорит агенту зависимость своего действия от действия агента. Получаем *игру Гермейера* Γ_2.

Кроме того, можно построить игру Γ_3, в которой центр будет сообщать агенту зависимость управления от того, как в зависимости от управления будет вести себя агент. Т.е. стратегия агента становится "функцией", а стратегия центра становится функцией от этой функции (для сравнения – в Γ_1 имеем два "скаляра", в игре Γ_2 "навесили" функцию на действие центра).

Возможно построить игру Γ_4, где стратегия центра будет функцией от функции от функции от функции.

Т.е. с точки зрения математики усложнять это можно до бесконечности – строить игры любого сколь угодно большого порядка, только проинтерпретировать это будет сложно.

У игры Γ_3 простая интерпретация: начальник говорит подчиненному: «Я тебе выделяю ресурс, ты сообщи мне, как ты его будешь использовать в зависимости от того, сколько я тебе выделю. А в зависимости от этого, я буду его выделять».

У Γ_4 интерпретация уже сложнее. Возникает вопрос: а дает ли что-нибудь начальнику вложенность игр («уровень рефлексии»)? Выгоднее ли ему Γ_{106}, чем Γ_{1015}? К счастью, оказалось, что нет необходимости рассматривать игры высоких порядков.

Николай Серафимович Кукушкин (советский математик) доказал теорему, которая утверждает, что все четные игры вида Γ_{2k}, где $k = 1, 2, \ldots,$ эквивалентны с точки зрения выигрыша центра игре Γ_2. Все нечетные игры Γ_{2k+1} эквивалентны игре Γ_3. Т.е. всю бесконечную совокупность иерархических игр (порядка больше трех) свели к двум играм – Γ_2 и Γ_3. Кроме этого было доказано, что с точки зрения центра эффективность этих игр упорядочена следующим образом: $\Gamma_1 \leq \Gamma_3 \leq \Gamma_2$

Вывод из *теоремы Кукушкина* следующий: если центр может, то ему надо играть игру Γ_2, она для него наиболее выгодная и наиболее простая. Если не может, то игру Γ_3, если не может разыграть и ее, то – Γ_1. Играть же игры порядка 4 и выше не имеет смысла никогда.

Логичным продолжением перехода от игр в нормальной форме к иерархическим играм является следующее рассуждение: можно усложнять структуру дальше, но на самом деле существует единая технология описания теоретико-игровых задач управления в различных структурах.

Рассмотрим основную идею, которая позволяет видеть картину целиком и следить за логикой перехода от более простых к более сложным задачам, чтобы более сложная задача могла быть декомпозирована на более простые, и не казалась чем-то необычным.

Рассмотрим следующую картинку – см. рисунок 5. Был у нас один субъект (рисунок 5а), мы рассматривали его с точки зрения гипотезы рационального поведения (ГРП) как стремящегося максимизировать свою функцию полезности. Далее мы усложнили ситуацию и рассмотрели несколько субъектов на одном уровне (рисунок 5б). Описали это взаимодействие игрой Γ_0 в нормальной форме. Далее была рассмотрена ситуация с двумя агентами, но взаимодействующими по вертикали (рисунок 5в). Описали их взаимодействие игрой Γ_i, где $i = 1,2,3$.

Представим себе, что у нас есть структура «один начальник – несколько подчиненных» (рисунок 5г). Как мы можем ее описать? Взаимодействие агентов, находящихся на одном уровне, можно описывать игрой Γ_0. Взаимодействие «начальник-подчиненный» мы описываем игрой Γ_i. Тогда условно такую структуру можно представить игрой Γ_i, определенной на игре Γ_0. Т.е. иерархическая игра, но уже не на одном субъекте, который максимизирует свою целевую функцию, а на наборе субъектов, разыгрывающих свою игру.

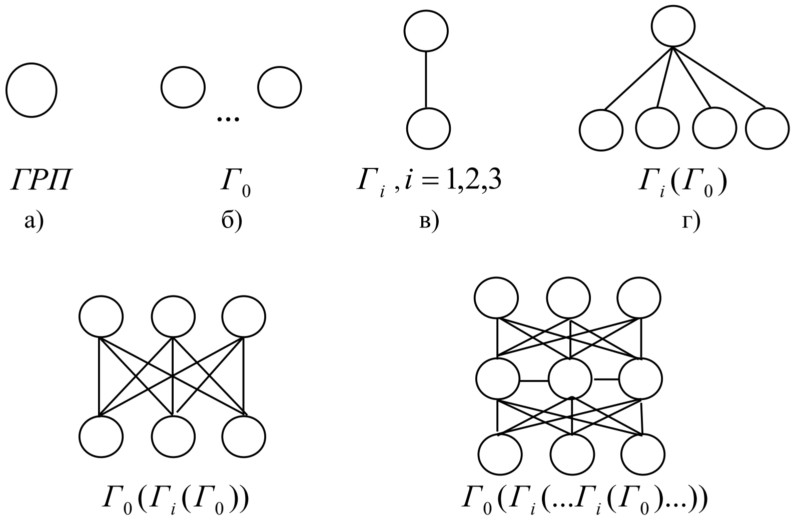

Рис. 5. Игры и структуры

Далее пусть есть несколько начальников (центров) и несколько подчиненных – агентов (рисунок 5д). В общем случае каждый связан с каждым. Как мы можем это описать? На нижнем уровне агенты играют игру Γ_0. Над ними центры играют иерархическую игру Γ_i, но центры в свою очередь разыгрывают на своем уровне игру Γ_0. Получаем игру вида $\Gamma_0(\Gamma_i(\Gamma_0))$. Такова конструкция: мы берем сложную структуру и разбиваем ее на более простые. Понятно, что данная игра отличается от предыдущей игрой центров.

Можно взять более сложную структуру с более сложным взаимодействием (например, рисунок 5е). Это будет иерархическая игра между уровнями, на уровнях – обычная игра и т.д. Качественно ничего не меняется, усложняется только формальная задача, идеология описания остается та же.

Далее мы поговорим о классификации задач управления, а затем начнем рассматривать последовательно задачи управления для структур 5в-5д.

Классификация задач управления

Как отмечалось выше, игра в нормальной форме $\Gamma_0 = \{N, f_i(\cdot), A_i\}$, описывается множеством игроков, целевыми функциями и допустимыми множествами. Тогда мы можем в ней управлять:

1) составом игроков (N) (этого уволить, этого нанять) – *управление составом*;

2) целевыми функциями ($f_i(\cdot)$). Такое управление называется *мотивационным управлением*;

3) допустимыми множествами (A_i) – *институциональное управление*.

4) если ситуация более сложная, и мы можем управлять тем, кто кому подчинен, кто на кого может или не может воздействовать, тогда у нас появляется *управление структурой*;

5) мы считали, что все участники одинаково информированы, но мы можем сообщать или не сообщать ту или иную информацию, тогда объектом управления является информированность – возникает *информационное управление*.

Т.е. пять компонентов модели организационной системы (состав, структура, целевые функции, допустимые множества и информированность) порождают пять *типов управления*: управление составом, структурой, целевыми функциями, допустимыми множествами, информированностью. Можно использовать их в любых комбинациях, управлять одновременно всем, но, традиционно, с методической точки зрения, во всех учебных курсах мы начинаем с мотивационного управления, т.к. оно наиболее простое и, наверное поэтому, более исследованное (с конца 60-х гг. исследования были посвящены именно этому направлению, задачи управления составом, структурой, институционального управления, информационного управления стали ставиться и решаться в последние десять лет). Естественно, развитие этих направлений науки во многом копировало развитие мотивационного управления, поэтому, прежде чем рассматривать их, необходимо изучить классику. Именно задачи мотивационного управления составляют основу курса «Теория управления организационными системами». Остальные типы управления обычно даются в виде факультативных курсов. Они гораздо более сложные, менее зрелые с теоретической точки зрения.

Мотивационное управление

Содержательная интерпретация мотивационного управления – это задача стимулирования. Несмотря на то, что под мотивацией в общем случае понимается и материальная, и моральная сторона, поощрения, побуждения к совершению требуемых действий, но, к сожалению, формальных моделей того, как человек реагирует на моральное вознаграждение, на сегодняшний день нет. Зато есть модель материального стимулирования. Можно строить аналогично и модели морального стимулирования. Но если при построении модели материального стимулирования мы вводим вполне реальные предположения (например, предприятие стремится максимизировать прибыль), то при построении моделей морального стимулирования мы должны говорить, предположим, что на такие-то стимулы человек будет реагировать так-то, а на такие-то – так-то. Это предположение обосновать уже сложно. Модели морального стимулирования более уязвимы для критики, а психология сегодня не дает нам должной основы. Поэтому будем описывать материальное стимулирование.

Рассмотрим систему, состоящую из одного центра (начальника) и одного подчиненного (агента), то есть приведенную на рисунке 4 (или рисунке 5в).

Есть центр, есть агент. Агент выбирает действие $y \in A = R_1^+$. Содержательная интерпретация действия агента: отрабатываемые часы, объем выпускаемой продукции. Начальник выбирает управление, т.е. зависимость вознаграждения агента от его действия. Эта зависимость называется *функцией стимулирования*.

Любую модель организационной системы будем описывать по тем пяти компонентам, которые перечислены выше при классификации задач управления (состав, структура, целевая функция, допустимые множества, информированность). Состав: центр, агент. Структура: начальник – подчиненный. Агент выбирает действие, центр выбирает стимулирование. Допустимые множества: множество допустимых действий – положительная полуось: часы, штуки, килограммы и т.п. Функцию стимулирования $\sigma(y)$ будем считать неотрицательной и, когда потребуется, дифференцируемой.

Целевая функция центра зависит от системы стимулирования агента и представляет собой разность между функцией дохода (от деятельности подчиненного начальник получает доход (например, продает на рынке то, что произвел подчиненный)) и то стимулирование, которое выплачивается подчиненному:

$$\Phi(\sigma(\cdot), y) = H(y) - \sigma(y),$$

где $H(y)$ – функция дохода центра.

Целевая функция агента: то стимулирование, которое он получает, минус затраты, т.к. в зависимости от выбираемого действия подчиненный несет затраты:

$$f(\sigma(\cdot), y) = \sigma(y) - c(y),$$

где $c(y)$ – функция затрат агента

Предположим, что функция дохода неотрицательна при любом действии y и принимает максимальное значение при $y \neq 0$: $\forall y \geq 0 \;\; H(y) \geq 0$, $0 \notin \operatorname{Arg}\max_{y \in A} H(y)$.

Относительно функции затрат предположим, что она неотрицательна, неубывающая и в нуле равна нулю: $\forall y \geq 0 \;\; c(y) \geq 0$, $c(0) = 0$.

Последние два предположения не очень существенны с формальной точки зрения, но ноль – хорошая точка отсчета. Содержательная интерпретация: выбор агентом действия, равного нулю, т.е.

отказ от работы, соответствует нулевому объему работы. Логично взять равной нулю и точку отсчета затрат.

Сформулируем задачу управления: агент будет выбирать действия из множества тех действий, которые обеспечивают максимум его целевой функции: $P(\sigma(\cdot)) = \operatorname{Arg}\max\limits_{y \geq 0} [\sigma(y) - c(y)]$. Это – игра Γ_2 в чистом виде (точнее – с побочными платежами). Реакция агента на управление – это множество тех действий, на котором достигается максимум целевой функции как разности между вознаграждением и затратами. Центр может предсказать поведение агента, значит задача заключается в том, что целевая функция центра зависит от действий и вознаграждения агента, он берет минимум из всех действий агента по множеству всех действий, на которых максимальна целевая функция агента (это соответствует принципу максимального гарантированного результата), и дальше центр хочет максимизировать эту величину выбором функции стимулирования, т.е. выбором зависимости вознаграждения от действий агента: $\min\limits_{y \in P(\sigma(\cdot))} \Phi(\sigma(\cdot), y) \to \max\limits_{\sigma(\cdot)}$. С формальной точки зрения даже при конкретном виде целевой функции задача получается сложная. Но мы можем воспользоваться теоремой Гермейера о том, что управление в данном случае имеет два режима: наказание и поощрение, а можем получить решение и более простым способом: сначала угадать его, а потом доказать его оптимальность. Что мы и сделаем.

Нашей задачей является нахождение функции стимулирования, которая максимизировала бы гарантированное значение целевой функции центра на множестве действий агента, которое представляет собой множество максимумов его целевой функции при заданной системе стимулирования. В данной задаче, которая является частным случаем игры Γ_2, теорему Гермейера можно сформулировать в простых, интерпретируемых терминах.

<u>Утверждение 1.</u> Предположим, что использовалась некоторая система стимулирования $\sigma(\cdot)$, такая, что при ее реализации агент выбирал какое-то действие $x \in P(\sigma(\cdot))$. Утверждается, что, если мы возьмем другую систему стимулирования $\tilde{\sigma}(\cdot)$, которая будет равна нулю всюду, кроме точки x, и будет равна старой системе

стимулирования в точке x, то и при новой системе стимулирования это же действие агента будет доставлять максимум его целевой функции.

Т.е., если центр использует некоторую систему стимулирования, и агент выбирает действие x, то центр говорит: "я меняю систему стимулирования и буду платить по-другому, т.е. вознаграждения не будет нигде, кроме точки x, а за эту точку я буду платить по-старому" (см. рисунок 6), то утверждается, что агент по-прежнему будет выбирать то же действие, что и ранее: $x \in P(\widetilde{\sigma}(\cdot))$, где

$$\widetilde{\sigma}(y) = \begin{cases} \sigma(x), & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}$$

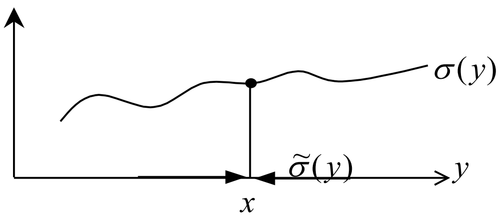

Рис. 6. Иллюстрация утверждения 1

Приведем формальное доказательство утверждения 1. Условие того, что выбор действия x доставляет максимум целевой функции агента при использовании системы стимулирования $\sigma(\cdot)$, можно записать в следующем виде: разность между стимулированием и затратами будет не меньше, чем при выборе любого другого действия: $\sigma(x) - c(x) \geq \sigma(y) - c(y) \quad \forall y \in A$.

Давайте заменим систему стимулирования $\sigma(\cdot)$ на систему стимулирования $\widetilde{\sigma}(\cdot)$, тогда получим следующее: в точке x система стимулирования $\widetilde{\sigma}(\cdot)$ по-прежнему равна системе стимулирования $\sigma(\cdot)$. В правой части будет тогда записана система стимулирования $\widetilde{\sigma}(\cdot)$: $\sigma(x) - c(x) \geq 0 - c(y) \quad \forall y \neq x$.

Если выполнялась первая система неравенств, то выполняется и новая система неравенств, т.к. мы в ней ослабили правую часть – здесь стояло какое-то положительное число, и если эта разность составляет положительное число (доход минус затраты), то тем более она будет больше, чем ноль минус затраты. Следовательно, $x \in P(\tilde{\sigma}(\cdot))$. Таким образом, утверждение 1 доказано. •

Итак, пусть центр использует некую систему стимулирования со сложной зависимостью вознаграждения агента от его действий. Утверждение 1 говорит, что центру достаточно ограничиться классом систем стимулирования, в которых стимулирование отлично от нуля в одной точке. Т.е. центр может использовать систему стимулирования, которая называется *компенсаторной* и имеет следующий вид:

$$\sigma_k(x, y) = \begin{cases} \lambda, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}.$$

Т.е. для любой сложной системы стимулирования найдется компенсаторная система стимулирования, которая приведет к тому же выбору агента, т.е. ничего не изменится ни для центра, ни для агента. Но изменится с точки зрения сложности задачи стимулирования, и понимания агентом того, как и за что его стимулируют. Представьте, одно делу вы говорите, что система стимулирования представляет собой «логарифм тангенса в квадрате», нормальный человек этого не поймет. Гораздо проще будет, если вы скажете человеку: «Тебе нужно сделать такое действие, за него ты получишь вот столько, если ты его не сделаешь, то ничего не получишь». Просто и понятно с точки зрения практики, а что это значит с точки зрения математики? Мы свели задачу поиска функции, принадлежащей множеству всех положительнозначных функций, к задаче поиска двух чисел: действия x и вознаграждения λ, которое надо платить за выбор именно этого действия. Два числа найти проще, чем функцию!

Теперь давайте попробуем понять, каким должно быть число λ, т.е. попытаемся еще упростить задачу и свести все к одному числу x. Для этого будем рассуждать следующим образом.

Предположим, есть функция затрат агента $c(y)$ (см. рисунок 7), ранее мы предположили, что эта функция неотрицательна, в нуле равна нулю и не убывает. Неубывание означает, что чем больше агент работает, тем больше у него затраты. Предположим, что есть функция дохода центра $H(y)$, которая достигаем максимума при ненулевых действиях агентов. Это существенное условие, т.к. если максимум доходов центра достигается при нулевых действиях агента, то нет и задачи стимулирования: зачем стимулировать агента, если максимум выигрыша центра достигается, когда подчиненный ничего не делает.

Теперь давайте рассмотрим рисунок 7 с точки зрения центра и агента. Ноль характеризуется тем, что если агент ничего не делает, то его затраты равны нулю, и если центр ему за это ничего не платит, то агент получает нулевую полезность. Таким образом, оценка снизу выигрыша агента – ноль: ничего не делает, ничего не получает. Значит, агент согласится что-то делать, если вознаграждение, которое будет платить ему центр, будет не меньше, чем его затраты. Таким образом, у нас есть ограничение: вознаграждение должно быть не меньше затрат агента. Значит, агента устраивает все, что лежит выше функции затрат $c(y)$.

С точки зрения центра: центр может получить какую-то полезность в случае нулевого действия агента, т.е. если он ничего ему не платит. И он точно не заплатит агенту больше, чем доход, который он получает от деятельности агента. Т.е. с точки зрения центра, мы «живем» под функцией дохода центра $H(y)$ (см. рисунок 7).

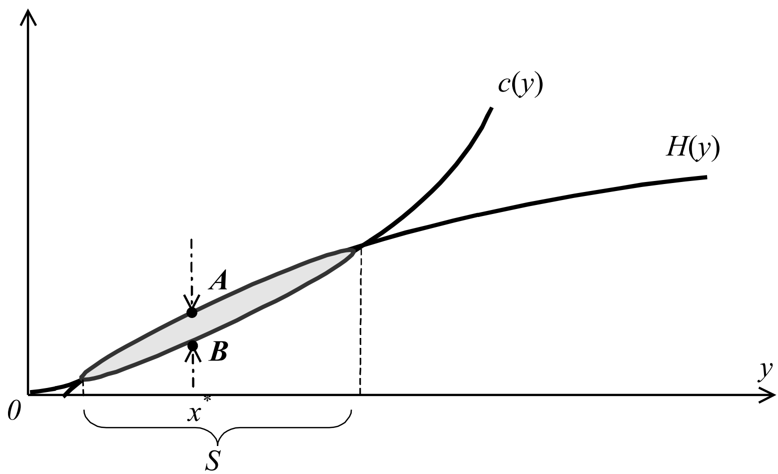

Рис. 7. Область компромисса в задаче стимулирования

Пересечение этих двух областей дает нам некоторую область. Формально, множество $S = \{y \in A \mid H(y) \geq c(y)\}$ – множество таких действий агента, что доход центра от деятельности агента не превосходит затраты последнего. Совокупность множества действий S и вознаграждений за эти действия, устраивающих одновременно и центра и агента (то есть размер вознаграждения должен быть не меньше затрат агента и не больше дохода центра) называется *областью компромисса*. Она заштрихована на рисунке 7.

Таким образом, мы определили, что речь идет не обо всем множестве действий и вознаграждений, а только об области S, т.к. выше нее не согласится центр, а ниже – агент. Спрашивается, а какую точку в этой области стоит выбирать.

Рассмотрим целевую функцию центра. Стимулирование агента входит в нее со знаком минус – вознаграждение агента центр старается минимизировать, т.е., желательно чтобы подчиненный работал за минимально возможную оплату. С точки зрения центра необходимо двигаться вниз по области компромисса.

С точки зрения агента – наоборот. При фиксированных затратах он хотел бы получить вознаграждение побольше.

Но, несмотря на желание агента, у нас есть иерархия, и решения первым принимает центр. Поэтому центр должен рассуждать так: сколько, как минимум, надо заплатить агенту за некое действие, чтобы он согласился его выполнить. Понятно, что центр должен «работать» на кривой затрат агента, т.е. должен сказать агенту: «Ты выбираешь такое-то действие, я тебе за него компенсирую затраты. А за любое другое действие я тебе ничего не заплачу».

Компенсаторная система стимулирования принимает следующий вид: λ должна быть равна затратам агента плюс еще что-то, т.е. не меньше, чем затраты агента. С точки зрения центра эту величину надо сделать минимальной, то есть $\sigma(x) = c(x) + \delta$, следовательно:

$$\sigma_K(x, y) = \begin{cases} c(x) + \delta, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}.$$

Нарисуем целевую функцию агента (см. рисунок 8). У него затраты со знаком минус. К ним добавляется такая система стимулирования: в точке x центр платит ему $c(x) + \delta$. Во всех остальных точках стимулирование равно нулю.

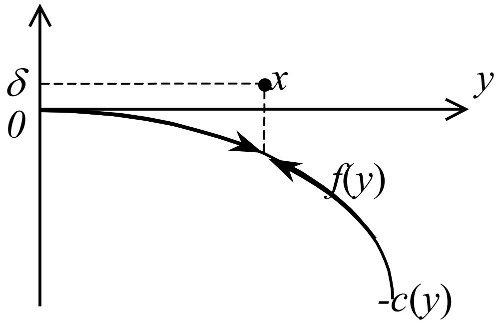

Рис. 8. Целевая функция агента

Вычитая из положительного стимулирования затраты, получаем, что целевая функция агента имеет следующий вид – жирная линия на рисунке 8. Она всюду равна отрицательным затратам, кроме точки x. В точке x она равна величине δ.

Определим значение $\delta \geq 0$. Оно должно быть минимальным с точки зрения центра. А дальше – ее значение зависит от того, как мы ставим задачу.

Если предполагается, что агент благожелательно относится к центру и готов среди двух точек, имеющих одинаковую для него предпочтительность, выбрать точку, наилучшую для центра, то достаточно положить δ, равной 0. Тогда, если $\delta = 0$, то точка максимума лежит на горизонтальной оси (см. рисунок 8), максимум полезности агента (разности между стимулированием и затратами), равный нулю, будет достигаться в двух точках: 0 (ничего не делать) и точно такую же нулевую полезность агент получит в точке плана x – действии, которого хочет от него добиться центр. Во всех остальных случаях его полезность отрицательна. Множество максимумов целевой функции агента состоит из двух точек, и, если агент благожелательно настроен к центру, то он выберет x.

Если же центр не вправе рассчитывать на благожелательность агента, а хочет гарантировать, чтобы агент выбрал какое-то действие, отличное от нуля, то ему достаточно положить δ, равной любому сколь угодно малому, строго положительному числу, чтобы значение целевой функции агента в точке x было строго больше нуля. Другими словами, δ характеризует различие между принципами пессимизма и оптимизма. Различие это невелико, так как δ может быть выбрано сколь угодно малой.

Таким образом, мы сначала перешли от системы стимулирования общего вида к системе стимулирования, зависящей от двух скалярных параметров: точки плана – то, чего хочет центр добиться от агента, и вознаграждения агента λ. Потом нашли значение λ, равное затратам агента плюс δ. В этот параметр δ для любой задачи можно «зашить» любую моральную составляющую, т.е. его можно интерпретировать, как *мотивационную надбавку*. С формальной точки зрения агент выбирает точку максимума своей целевой функции, но если $\delta = 0$, его полезность равна 0 независимо от того, не работает ли он вообще или выполняет план, т.е. понятно, что в этом с точки зрения практики есть что-то подозрительное, т.к. не работает – получает 0 и работает – получает 0. Тогда δ – мотивационная надбавка – показывает, сколько мы обещаем человеку за то, что он работает, и работает именно в нашей организации. Таким образом, все побуждающие мотивационные аспекты могут быть заложены в δ. Какова она должна быть – эта величина δ, это не наше, математиков и экономистов, дело. Этими аспектами занимаются менеджмент и психология.

Теперь осталось сделать последний шаг: найти оптимальное значение параметра x – плана.

Посмотрим на целевую функцию центра. Она представляет собой (при использовании компенсаторной системы стимулирования с $\lambda = c(x) + \delta$) разность между доходом центра и стимулированием агента, причем последнее в случае выполнения агентом плана равно его затратам, т.е.: $\{H(x) - c(x)\}$ (если учесть $\delta = \text{Const}$, то далее ее использовать бессмысленно, т.к. на точку максимума она не влияет). Следовательно, нужно выбрать x^*, который будет доставлять максимум по x разности $\{H(x) - c(x)\}$.

Таким образом, была сложная система стимулирования – ее упростили до системы с двумя параметрами. Первый параметр – λ – рассчитали. Он оказался равным затратам агента. Осталось найти второй параметр. Он должен быть такой, чтобы максимизировать разность между доходом центра и системой стимулирования, равной в точности затратам агента. В результате оптимальным решением задачи стимулирования будет компенсаторная система стимулирования такого вида, в которой размер вознаграждения равен затратам агента, а *оптимальный план* равен плану, максимизирующему разность между доходом центра и затратами агента. Окончательно оптимальное решение будет выглядеть следующим образом:

$$x^* \in \operatorname{Arg}\max_{x \in A} \{H(x) - c(x)\}.$$

Рассмотрим выражение для оптимального плана x^*. Это выражение означает, что разность между доходом центра и затратами агента – «толщина» области компромисса (см. рисунок 7) – максимальна. При дифференцировании в точке x^* угол наклона касательной к функции дохода центра будет равен углу наклона касательной к функции затрат агента. В экономике это интерпретируется, как точка оптимума, в которой предельная производительность равна предельным затратам.

Значит, точка x^* является оптимальной с точки зрения центра и реализуется исход, определяемый точкой B на рисунке 7. Возможна другая ситуация. Рассмотрим модель, в которой первое предложение делает агент. Он предлагает: я буду делать столько-то, а вы мне будете платить столько-то. Если центр это устраивает, он соглашается.

Вопрос: что должен предложить агент? Агент должен предложить центру то же самое действие x^*, а плату запросить максимальную, на которую еще согласится центр (см. точку A на рисунке 7). В этой ситуации всю прибыль $[H(x^*) - c(x^*)]$ будет забирать агент.

Другими словами, в данной игре выигрывает тот, кто делает ход первым. Если начальник, то он "сажает" на ноль подчиненного, если подчиненный, то он "сажает" на ноль начальника. В рамках формальной модели и тот, и другой на это согласится.

Рассмотрим следующую ситуацию. Пусть есть целевые функции центра и агента, то есть имеется функция дохода центра и другой параметр – затраты агента. Переменная – функция стимулирования – является внутренней характеристикой системы, отражающей взаимодействие между центром и агентом: сколько центр отдал, столько агент и получил. Если мы сложим целевые функции центра и агента, то сократятся значения функции стимулирования, и останется разность доходов и затрат. Значит, действие x^*, которое является решением задачи стимулирования, оказывается, максимизирует и сумму целевых функций. Т.е. действие агента, которое реализует центр, оптимально по Парето.

Можно ставить задачи определения точки внутри отрезка АВ внутри области компромисса (см. рисунок 7). Мы рассмотрели две крайности:

1. всю прибыль себе забирает центр;
2. всю прибыль забирает агент.

Возможно определение компромисса между ними, т.е. центр и агент могут договориться делить эту прибыль, например, пополам. Агент, кроме компенсации затрат, получает половину этой прибыли. Или другой принцип: фиксированный норматив рентабельности, т.е. пусть стимулирование агента составляет не только затраты, а затраты, умноженные на единицу плюс норматив рентабельности. Аналогично анализируются и другие модификации задачи стимулирования.

Связь данных задач с практикой следующая: содержательная интерпретация понятна: описаны ситуации, в которых можно платить, а можно не платить за действия агента. Как это связано с другими системами стимулирования, которые используются в жизни? Рассмотрим эти системы.

Если есть система стимулирования, то *квазисистемой* стимулирования называется система стимулирования, полученная из нее обнулением всех, кроме одной точки. На самом деле в рамках гипотезы благожелательности она тоже будет побуждать выбирать это действие (см. утверждение 1). Таким образом, из любой системы стимулирования можно получить квазисистему, обнулив ее всюду, кроме одной точки.

Решение задачи найдено – компенсаторная система стимулирования с планом x^*. Единственно ли оно? Рассуждение очень простое: пусть есть функция затрат агента, и есть план x^*. Оптимальная система стимулирования – квазикомпенсаторная – побуждает агента выбирать x^*, и центр несет затраты на стимулирование в точности равные затратам агента.

Возьмем другие системы стимулирования, которые побуждают агента выбирать то же действие, а центр платить столько же. Для того чтобы такая система стимулирования существовала, достаточно, чтобы функция стимулирования проходила через точку (x^*, $c(x^*)$).

<u>Утверждение 2.</u> Для того чтобы агент по-прежнему выбирал действие $y = x^*$, достаточно, чтобы функция стимулирования проходила через точку (x^*, $c(x^*)$), а во всех остальных точках была не больше, чем затраты агента.

Докажите это утверждение самостоятельно.

Если мы возьмем любую систему стимулирования из изображенных на рисунке 9, то она тоже будет побуждать агента выбирать действие x^*, и центр будет платить столько же.

Можно взять скачкообразную систему стимулирования – всюду ноль, а потом константа – так называемая *аккордная оплата*: выполнил план – получил вознаграждение не меньшее затрат, не выполнил – ничего не получил, выполнил больше – все равно получил столько же. Мы можем выбрать монотонную систему стимулирования, но чтобы она проходила через точку (x^*, $c(x^*)$), и всюду лежала ниже затрат. Т.е. любая кривая, проходящая через точку (x^*, $c(x^*)$) и лежащая ниже функции затрат, будет решением задачи стимулирования. Кривых таких – континуум, т.е. имеется бесконечное число решений этой задачи.

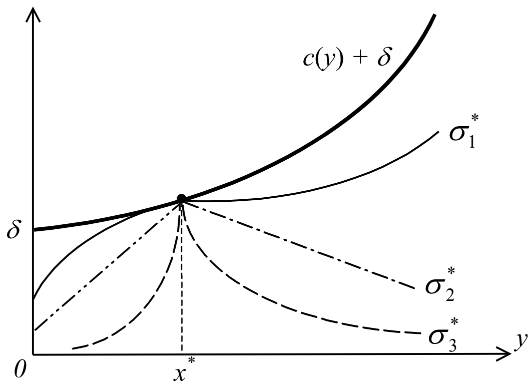

Рис. 9. Оптимальные системы стимулирования

Вопрос: какие из этого континуума задач разумны с содержательной точки зрения? Разумна аккордная система оплаты, когда мы платим только при превышении действия над некоторым нормативом плана. Рассмотрим некоторые другие варианты.

Пропорциональные системы стимулирования

При применении на практике такой распространенной системы оплаты труда, как пропорциональная оплата, то есть – почасовая оплата, сдельная оплата и т.д., происходит следующее. Формализуем понятие «сдельная оплата» в нашей задаче: сдельная оплата – линейная функция стимулирования, когда существует *ставка оплаты* в единицу времени, за единицу выпущенной продукции и т.п., и вознаграждение пропорционально действию агента.

Сформулируем задачу стимулирования следующим образом. Целевая функция агента в случае использования центром пропорциональной системы стимулирования $\sigma_L(y) = \alpha\ y$, где α – ставка оплаты) выглядит следующим образом:

$$f(\sigma(\cdot), y) = \alpha\ y - c(y).$$

Графически ее можно представить следующим образом (см. рисунок 10). Угол наклона прямой $\sigma_L(y)$ и есть ставка оплаты.

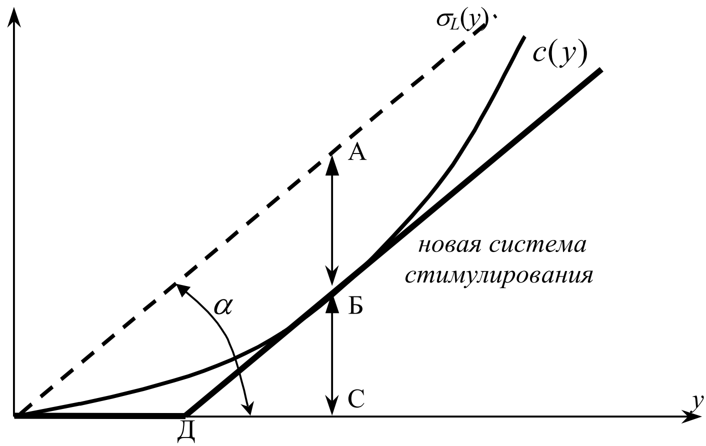

Рис. 10. Пропорциональная система стимулирования

Утверждение 3. Если функция затрат $c(\cdot)$ – выпуклая, то пропорциональная система стимулирования $\sigma_L(y) = \alpha\ y$ не лучше компенсаторной системы стимулирования.

Это значит, что для побуждения агента к одному и тому же действию при использовании пропорциональной системы стимулирования центр должен заплатить больше, чем при использовании компенсаторной системы стимулирования.

Содержательная интерпретация проста: предположим, что мы используем некоторую пропорциональную систему стимулирования. Какое действие выберет агент? Из условия максимума его целевой функции следует, что он выберет такое действие, при котором угол наклона касательной к его функции затрат равен ставке оплаты α. Если мы найдем эту точку, то за выбор данной точки при пропорциональной системе стимулирования мы должны заплатить АС (см. рисунок 10), а при компенсаторной – компенсировать затраты БС. Т.е. АБ мы агенту переплачиваем сверх необходимого минимума.

Тогда почему же на практике так распространены системы пропорциональной оплаты? Для того чтобы сделать систему пропорциональной оплаты такой же хорошей, как и компенсаторная, глядя на график, нужно ее сделать ломанной.

Т.е. начнем платить с какого-то норматива Д, а норматив и угол наклона подберем так, чтобы прямая касалась нашей кривой в нужной точке Б. Эта система стимулирования обладает той же эффективностью, что и компенсаторная, т.к. побуждает агента выбрать то же действие, и затраты центра на стимулирования такие же.

Любую систему стимулирования, которая встречается на практике, можно изложить в терминах рассматриваемых моделей, то есть можно составить из линейных, скачкообразных, компенсаторных и *комиссионных функций стимулирования*, имеющих следующий вид: $\sigma_d(y) = \xi H(y)$, где $\xi \in [0,1]$ – доля дохода центра, которую он отдает агенту в качестве вознаграждения.

Итак, существуют четыре системы стимулирования: пропорциональная, скачкообразная, компенсаторная и комиссионная, и они позволяют сконструировать любую другую систему стимулирования.

Рассмотрим второй аспект привязки к практике, более тонкий. Он заключается в следующем: формулы для описания модели получены, они достаточно просты, но в этих формулах фигурируют такие функции, как доход центра, затраты агента. На практике их можно рассчитать: с функцией дохода центра, как правило, все достаточно просто, т.к. если центр – юридическое лицо или какое-то подразделение, то есть имеется бухгалтерская отчетность, можно выделить вклад подчиненного, можно выделить, что это за функция, у нее есть интерпретация, она может быть разложена на отдельные составляющие. Если агент является тоже юридическим лицом (ситуация стимулирования – модель «заказчик-исполнитель», «подрядчик-субподрядчик», т.е. две фирмы заключают договор и т.д.), тогда затраты можно измерить, или известны нормативы, либо ищется предыстория, используется бухгалтерская отчетность.

Самой сложной является ситуация, в которой агентом является человек. Что такое затраты человека по выбору действия? Как определить его затраты в деньгах (моральное стимулирование, усталость и т.п. сложно измеримо)? Для этого проводят специальные исследования, изучая свойства функций затрат и их зависимость от индивидуальных характеристик [4].

Многоэлементные системы

Выше мы рассмотрели простейшую систему, состоящую из одного центра и одного агента, и решили для этой простейшей модели задачу стимулирования, в которой целевая функция центра представляла собой разность между доходом и затратами на стимулирование, выплачиваемое агенту. Мы доказали, что оптимальной является компенсаторная система стимулирования, которая имеет следующий вид: агент получает вознаграждение, равное затратам, в случае выполнения плана, и вознаграждение, равное нулю, во всех остальных случаях. Оптимальный план определялся как план, максимизирующий разность между доходом центра и затратами агента.

Давайте теперь начнем усложнять эту задачу – переходить от простейших структур (см. рисунок 5) к более сложным. Какие могут быть более сложные случаи? Первое, что приходит в голову – это организационная система, состоящая из нескольких агентов, подчиненных одному центру. Т.е. от структуры, приведенной на рисунке 5в, переходим к простейшей веерной структуре – см. рисунок 11 (и рисунок 5г).

Мы с вами помним, что любая организационная система (точнее ее модель) описываются пятью параметрами: состав, структура, целевые функции, допустимые множества и информированность.

Тогда состав этой системы понятен: есть центр, и есть n агентов, структура представлена рисунком 11 – все агенты находятся на нижнем уровне, центр – на верхнем уровне, всего уровней иерархии два. Целевые функции и допустимые множества:

$$y_i \in A_i, \sigma_i(y_i),\ i \in N = \{1,2,\ldots,n\}.$$

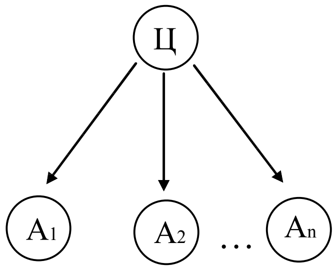

Рис. 11. Веерная структура

Будем считать, что i-ый агент выбирает действие y_i из множества A_i, центр выбирает стимулирование i-го агента $\sigma_i(y_i)$, которое зависит от действия, которое выбирает i-й агент, где i принадлежит множеству агентов N.

Целевая функция центра представляет собой разность между доходом $H(y)$, который он получает от деятельности агентов, где $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – вектор действий всех агентов, и суммарным стимулированием, выплачиваемым агентам, т.е. сумму по всем агентам тех вознаграждений, которые он им выплачивает:

$$\Phi(\sigma(\cdot), y) = H(y) - \sum_{i \in N} \sigma_i(y_i) \ .$$

Мы обобщили предыдущую более простую модель: целевая функция агента имеет тот же вид, только появляется индекс i. И таких целевых функций у нас n штук, т.е. i-ый агент получает стимулирование за свои действия от центра и несет затраты, зависящие только от его собственных действий:

$$f_i(\sigma(\cdot), y_i) = \sigma_i(y_i) - c_i(y_i),\ i \in N\ .$$

Давайте посмотрим на целевую функцию в предыдущей одноэлементной модели, которую мы уже исследовали, и на целевую функцию, которая выписана для веерной структуры с несколькими агентами. Стимулирование i-го агента зависит только от его собственных действий, затраты тоже зависят только от его собственных действий, следовательно, и целевая функция i-го агента зависит только от его стимулирования и от его собственных действий, т.е. агенты между собой, фактически, никак не связанны. Итак, полноценной игры между агентами нет, потому что тот выигрыш, который получает любой агент, зависит только от того, что делает он сам и не зависит от того, что делают остальные агенты.

Эта сложная система может быть разбита на n подсистем, каждая из которых имеет вид, приведенный на рисунке 4, и рассматривать мы их можем, в принципе, независимо. Применим для каждой из них по отдельности результат утверждений 1 и 2.

Мы с вами из одноэлементной модели знаем, что каждого из агентов можно стимулировать независимо, и каждому из них достаточно компенсировать затраты. Поэтому задачу надо решать так: мы знаем, что доход центра будет $H(y)$, и заплатить он должен i-му агенту за выбор действия y_i ровно $c_i(y_i)$. Подставляем оптимальную систему стимулирования в целевую функцию центра, получаем разность $H(y) - \sum_{i \in N} c_i(y_i)$. Ищем оптимальный план, который будет максимизировать целевую функцию центра на множестве допустимых векторов действия агентов:

$$H(y) - \sum_{i \in N} c_i(y_i) \to \max_{y \in A'} .$$

Это – оптимизационная задача, здесь никакой глубокой управленческой сути нет, и проблем с решением этой задачи не возникает.

Давайте проговорим еще раз полученный результат. Каким образом будет принимать решение отдельный агент? Его целевая функция зависит только от его собственного действия, и при известной системе стимулирования, сообщенной ему центром, он будет решать задачу выбора своего собственного действия, которое будет максимизировать его целевую функцию – разность между вознаграждением и затратами. Т.к. его целевая функция зависит только от его собственного действия, то выбираемое им действие не будет зависеть от того, что делают остальные агенты. В этом смысле агенты независимы, т.е. у каждого есть доминантная стратегия. Получилось, что мы агентов добавили, а никакого качественно нового эффекта не появилось – можно рассматривать взаимодействие между центром и агентами независимо. На практике это не всегда так. Поэтому давайте усложнять модель.

Первым шагом усложнения будет введение ограничения на фонд заработной платы, потому что иначе агенты ничем не объединены. Такие системы называются *системами со слабо связанными агентами*. Поэтому добавим фонд заработной платы R:

$$\sum_{i \in N} \sigma_i(y_i) \le R .$$

Т.е. на стимулирование наложим ограничение, что сумма вознаграждений, которые выплачиваются агентам, должна быть не больше, чем некоторая известная величина, которую содержательно можно интерпретировать как фонд заработной платы.

Посмотрим, что при этом изменится. Поведение агентов не изменится, потому что целевая функция каждого агента зависит только от его собственных действий. Изменится задача, которую должен решать центр. Центр знает, что при использовании оптимальной системы стимулирования он должен компенсировать затраты каждому агенту, а теперь у него есть дополнительное ограничение, и он должен проводить максимизацию не по всем векторам действия агентов, а только по тем из них, которые будут удовлетворять бюджетному ограничению. Задача меняется – мы должны проводить максимизацию по множеству A' в пересечении с множеством таких векторов действий y, что сумма $\sum_{i \in N} c_i(y_i) \le R$, то есть, должно быть выполнено *бюджетное ограничение*.

С точки зрения центра по-прежнему оптимально каждому из агентов компенсировать затраты на выполнение плана, т.е. система стимулирования остается. Целевая функция агентов, по-прежнему, зависит только от системы стимулирования, которую задал центр и от действия данного агента. И агента не интересует наличие бюджетного ограничения – он производит свой выбор при сообщенной ему системе стимулирования. Получили задачу условной оптимизации:

$$H(y) - \sum_{i \in N} c_i(y_i) \to \max_{\{y \in A' | \sum_{i \in N} c_i(y_i) \le R\}} .$$

Все, задача стимулирования решена – она сведена к задаче условной оптимизации. Рассмотрим пример.

Пример 2. Пусть есть два агента ($n = 2$), функция дохода центра представляет собой сумму действия агентов:

$$H(y) = y_1 + y_2$$

Функция затрат i-го агента является квадратичной:

$$c_i(y_i) = \frac{y_i^2}{2r_i},\ i = 1,2$$

где константа $r_i > 0$ может интерпретироваться как эффективность деятельности агента, его квалификация – чем больше квалификация, тем меньше затраты.

Целевая функция центра при использовании компенсаторной системы стимулирования – это сумма действий агентов, минус сумма их затрат. Ее можно максимизировать по y_1 и $y_2 \geq 0$ при ограничении, что сумма компенсируемых затрат не больше, чем фонд заработной платы:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 - \dfrac{y_1^2}{2r_1} - \dfrac{y_2^2}{2r_2} \to \max\limits_{(y_1, y_2) \geq 0}; \\ \dfrac{y_1^2}{2r_1} + \dfrac{y_2^2}{2r_2} \leq R. \end{cases}$$

Задача стимулирования сводится к определению двух параметров: y_1 и y_2 . Теперь давайте искать эти параметры:

$$y_1^{\max} = r_1,\ y_2^{\max} = r_2$$

$$\frac{(y_1^{\max})^2}{2r_1} + \frac{(y_2^{\max})^2}{2r_2} \leq R\ .$$

Это – безусловный максимум целевой функции: если мы возьмем максимум по y_1 и продифференцируем, то получим $1 - y_1/r_1$. Затраты первого агента равны $r_1 / 2$. Значит, если $\dfrac{r_1 + r_2}{2} \leq R$, то оптимальное решение – $x_1 = r_1$, $x_2 = r_2$. Если $\dfrac{r_1 + r_2}{2} > R$, то бюджетное ограничение становится существенным и тогда можно пользоваться методом множителей Лагранжа.

Запишем лагранжиан:

$$(y_1 + y_2) - (1+\lambda)\left(\frac{y_1^2}{2r_1} + \frac{y_2^2}{2r_2}\right) - \lambda R\,.$$

Дифференцируем по y_1, получаем: $1 - (1+\lambda)\dfrac{y_1}{r_1}$. Приравниваем нулю – нашли оптимальное действие в зависимости от множителя Лагранжа. Следовательно, $y_1 = (1+\lambda)r_1$. Аналогично $y_2 = (1+\lambda)r_2$. Подставляем в бюджетное ограничение, которое выполняется как равенство: $\dfrac{(1+\lambda)^2 r_1^2}{2r_1} + \dfrac{(1+\lambda)^2 r_2^2}{2r_2} = R$. Откуда $(1+\lambda) = \sqrt{\dfrac{2R}{r_1 + r_2}}$. Следовательно, оптимальное решение будет иметь следующий вид $x_i = r_i\sqrt{\dfrac{2R}{r_1 + r_2}}$, $i = 1, 2$.

Итак, если фонд заработной платы меньше чем полусумма констант r_1 и r_2, то оптимально назначать планы $x_1 = r_1$, $x_2 = r_2$; если фонд заработной платы больше полусуммы r_1 и r_2, то оптимальны планы $x_i = r_i\sqrt{\dfrac{2R}{r_1 + r_2}}$, $i = 1, 2$. Обратите внимание, что решение получилось непрерывным, т.е. при R, равном полусумме r_1 и r_2, решения "состыковываются". •

Кроме того, заметим, что, рассматривая задачу стимулирования слабо связанных агентов, на самом деле б*о*льшую часть времени мы потратили на решение задачи согласованного планирования, т.е. на решение задачи условной оптимизации, которая к управлению никакого отношения не имеет, потому что мы уже воспользовались готовым результатом, что в оптимальной компенсаторной функции стимулирования вознаграждение в точности равно затратам и агенты будут выполнять план.

Будем усложнять задачу дальше. Логика была такая: мы от одноэлементной системы перешли к такой, где все агенты были независимы и ограничений не было, затем добавили ограничение на фонд заработной платы. Предположим теперь, что агенты *сильно связаны*, и эту связь будем отражать следующим образом: давайте предположим, что затраты каждого агента зависят не только от его собственных действий, но и от действий других агентов. Соответственно вознаграждение будет зависеть от действия всех агентов.

Целевая функция центра:

$$\Phi(\sigma(\cdot), y) = H(y) - \sum_{i \in N} \sigma_i(y_i);\ y = (y_1, \ldots, y_n),$$

целевые функции агентов:

$$f_i(\sigma(\cdot), y_i) = \sigma_i(y_i) - c_i(y_i),\ i \in N\ .$$

Мы предположили, что на нижнем уровне агенты взаимодействуют таким образом, что затраты каждого зависят от вектора действий всех, и вознаграждение каждого, в общем случае, зависит от вектора действий всех. Это сильно осложняет дело, так как непосредственно воспользоваться результатом анализа одноэлементной модели мы уже не можем.

Давайте формулировать задачу управления. Как агенты будут принимать решения? Первый ход делает центр: сообщает им систему стимулирования, т.е. каждому говорит зависимость вознаграждения от вектора действий всех агентов. Агенты это узнали, дальше они должны выбирать действия. Если выигрыш каждого зависит от действий всех, значит, они играют в игру. Исходом игры является ее равновесие, например, равновесие Нэша. Обозначим вектор-функцию стимулирования $\sigma(\cdot) = (\sigma_1(\cdot), \cdots, \sigma_n(\cdot))$, и запишем определение множества равновесий Нэша игры агентов в зависимости от системы стимулирования, которую использует центр:

$$E_N(\sigma(\cdot)) = \left\{ y^N \in A' \left| \begin{array}{l} \sigma_i(y^N) - c_i(y^N) \geq \sigma_i(y_i, y_{-i}^N) - c_i(y_i, y_{-i}^N) \\ \forall i \in N, \forall y_i \in A_i \end{array} \right. \right\}.$$

Теперь сформулируем задачу управления:

$$\min_{y \in E_N(\sigma(\cdot))} [H(y) - \sum_{i \in N} \sigma_i(y)] \to \max_{\sigma(\cdot)}.$$

Целевая функция центра зависит от функции стимулирования и от действий агентов. Агенты при фиксированной функции стимулирования выберут действия, являющиеся равновесием Нэша их игры. Давайте возьмем гарантированный результат целевой функции центра по множеству равновесий Нэша игры агентов при заданной системе стимулирования. Эта конструкция будет уже зависеть только от функции стимулирования. Дальше нужно ее максимизировать выбором вектор-функции стимулирования, т.е. центр должен найти такой набор стимулирований агентов, который бы максимизировал гарантированное значение его целевой функции на множестве равновесий Нэша игры агентов.

Вид этой задачи почти такой же, как и одноэлементной, только раньше (когда у нас была одноэлементная система) не было суммы и было множество максимумов целевой функции агента. В многоэлементной системе вместо множества максимумов целевой функции агента появляется множество равновесий Нэша, и появляется сумма стимулирований агентов. Задача сложна, т.к. мы сначала должны взять минимум некоторого функционала по множеству, которое зависит от вектор-функции, которая входит в этот функционал, а потом минимизировать выбором вектор-функции.

Если посмотреть на определение множества равновесий Нэша, то увидим, что это множество зависит от вектор-функции и определяется бесконечной системой неравенств. Решим эту задачу. При решении сложных задач важно угадать решение. Решение этой задачи угадывалось достаточно долго. Сформулировали эту задачу в 1984 году, а решение нашли в 1998. Идея на самом деле очень простая: если в одноэлементной задаче есть компенсаторная система стимулирования – простая и понятная, то какую надо придумать компенсаторную систему стимулирования для решения многоэлементной задачи?

Есть параметр – план, и мы агенту платим в зависимости от действия y. Понятно, что мы не должны ничего платить, если агент выбирает действие, не равное соответствующей компоненте плана. Сколько ему нужно платить, если он выбирает действие, совпадающее с планом? Ему нужно платить что-то совпадающее с его затратами, но затраты каждого агента зависят от действий всех. Нужно помнить, что мы должны платить так, чтобы агент выполнял план, т.е. выполнение плана должно быть равновесием Нэша игры агентов. Оказывается, нужно оплачивать агенту фактические затраты (в случае если он сделал то что нужно).

Затраты агента зависят от того, что делает он сам, и от действий всех остальных агентов. Мы говорим: "делай план, обещаем компенсировать фактические затраты по выполнению плана, независимо от того, что сделают остальные агенты":

$$\sigma_i(x, y) = \begin{cases} c_i(x_i, y_{-i}), \ y_i = x_i; \\ 0, \ y_i \neq x_i. \end{cases}, \ i \in N.$$

Давайте убедимся, что при такой системе стимулирования выполнение плана является равновесием Нэша. Для этого надо подставить эту систему стимулирования в определение равновесия Нэша и доказать, что вектор x является равновесием Нэша. При выполнении плана i-ый агент получает компенсацию затрат, и несет такие же затраты. В случае невыполнения плана он получает нулевое вознаграждение и несет какие то затраты:

$$c_i(x_i, x_{-i}) - c_i(x_i, x_{-i}) \geq 0 - c_i(x_i, y_{-i}).$$

Получили выражение "минус затраты меньше нуля". Это неравенство всегда выполняется. Это неравенство будет выполняться всегда – при любых обстановках игры, т.е. каждому агенту выгодно выполнять план, независимо от того, что делают другие агенты. Вспомним, что доминантная стратегия агента – это такое его действие, которое доставляет максимум целевой функции, независимо от действий остальных агентов. В данном случае выполнение плана будет максимизировать целевую функцию агента независимо от действий остальных, т.е. выполнение плана будет равновесием в доминантных стратегиях.

Итак, мы доказали, что предложенная компенсаторная система стимулирования реализует заданный вектор планов как равновесие в доминантных стратегиях игры агентов. Можно ли заставить агентов выбрать какой-либо вектор действий как равновесие их игры, и заплатить им в сумме меньше, чем сумма их затрат? Целевая функция центра зависит от суммы стимулирований с минусом, хотелось бы эту сумму минимизировать. Штрафы мы не можем накладывать, так как стимулирование неотрицательное (можно наказать только ничего не заплатив). Можем ли мы неотрицательным стимулирование побудить агентов выбрать какой то вектор действий, и заплатить им сумму меньше, чем сумма их затрат. Утверждается, что нет!

Введем предположение, что затраты агента в случае выбора им нулевого действия равны 0, независимо от того, что делают остальные: $\forall y_i \in A_i, c_i(0, y_{-i}) = 0$, $i \in N$.

Целевая функция каждого агента – вознаграждение минус затраты. Фиксируем некоторый вектор действий, который хотим от агентов добиться. Если мы говорим, что сумма стимулирований по реализации этого вектора меньше чем сумма затрат агентов, то это значит, что найдется хотя бы один агент, у которого вознаграждение будет меньше затрат, что противоречит предположению о неотрицательности затрат и возможности каждого агента обеспечить себе нулевые затраты выбором нулевого действия.

Значит, помимо того, что компенсаторная система стимулирования реализует вектор планов как равновесие в доминантных стратегиях игры агентов, при этом центр платит минимально возможную величину. Следовательно, эта система стимулирования оптимальна. Осталось найти, каким должен быть вектор планов. Также как и в одноэлементной модели, нужно в целевую функцию центра подставить вместо стимулирования затраты агентов и минимизировать полученное выражение выбором плана:

$$\left[H(y) - \sum_{i \in N} c_i(y)\right] \to \max_{y \in A}.$$

То есть, нужно найти такое допустимое действие, которое максимизировало бы целевую функцию центра, и назначить это действие в качестве плана, подставив его в систему стимулирования. Задача решена!

Обратим внимание, что здесь, как и в одноэлементной модели, как и в системе со слабо связанными агентами, имея результат об оптимальности компенсаторных систем стимулирования, дальше решаем только задачу планирования. В данном случае доказательство оптимальности декомпозирующей системы стимулирования было сложнее, чем в одноэлементной системе, потому что здесь была игра агентов. Но мы угадали решение, и эту игру как бы "развалили на части", т.е. за счет управления центр декомпозировал взаимодействие агентов. Использование таких управлений, которые декомпозируют взаимодействие агентов, превращают их игру в игру, в которой существует равновесие в доминантных стратегиях, называется *принцип декомпозиции игры агентов*. Он "работает" в многоэлементных системах и по аналогии он работает в динамике, там, где декомпозиция идет по периодам времени.

Сформулируем полученные результаты в виде следующего утверждения.

Утверждение 4. Оптимальна компенсаторная система стимулирования, декомпозирующая игру агентов, с планом, максимизирующим доход центра за вычетом суммы затрат агентов.

Системы с распределенным контролем

Усложним задачу дальше. Решим задачу управления для структуры, приведенной на рисунке 12. Такие структуры называются *системами с распределенным контролем*.

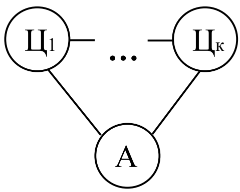

Рис. 12. Система с распределенным контролем

Это – перевернутая веерная структура, в которой один агент подчинен нескольким начальникам. Ситуация достаточно распространена, в частности, в проектном управлении: есть агент, который работает по какому-то проекту – он подчинен руководителю проекта, в то же время, он работает в подразделении – подчинен своему функциональному руководителю. Или преподаватель прикреплен к кафедре, и его приглашают читать лекции на другую кафедру или факультет.

Система с распределенным контролем характеризуется тем, что, если в веерной структуре имела место игра агентов, то в этой структуре имеет место игра центров. Если мы добавим сюда еще нескольких агентов, каждый из которых подчинен разным центрам, то получится игра и тех, и других на каждом уровне (см. рисунок 5д). Опишем модель, которая сложнее рассмотренной выше многоэлементной системы, т.к., если игра агентов заключается в выборе действий, то игра центров заключается в выборе функций стимулирования агента, зависящих от его действий. В игре центров стратегией каждой из них является выбор функции.

Целевая функция i-го центра имеет следующий вид:

$$\Phi_i(\sigma(\cdot), y) = H_i(y) - \sigma_i(y_i), i \in K = \{1,2,\cdots,n\},$$

и представляет собой разность между его доходом, который он получает от действия агента, и стимулированием, выплачиваемым агенту.

Целевая функция агента: $f_i(\sigma(\cdot), y) = \sum_{i \in K} \sigma_i(y) - c(y)$, то есть он получает стимулирования от центров, которые суммируются, и несет затраты.

Предположим, что действия агента принадлежат множеству A, которое будет уже не отрезком действительной оси (часы, шт. и т.д.), а может быть многомерным множеством (отражать разные виды деятельности), тогда функция затрат будет отображать множество действий во множество действительных чисел.

Определим множество выбора агента – множество максимумов его целевой функции в зависимости от стимулирования со стороны центров:

$$P(\sigma(\cdot)) = \operatorname{Arg}\max_{y \in A} \left[\sum_{i \in K} \sigma_i(y) - c(y) \right],$$

где $\sigma(\cdot) = \{\sigma_1(\cdot), \sigma_2(\cdot), \ldots, \sigma_n(\cdot)\}$ – вектор-функция стимулирования.

Поведение агента понятно: в зависимости от вектора стимулирований агент будет выбирать действие, которое будет максимизировать его целевую функцию, представляющую собой разность между его суммарным вознаграждением и затратами.

Тогда центры должны решить, какое стимулирование назначать агенту. Причем, каждый должен решить сам, как ему управлять подчиненным. Центры оказываются "завязанными" на одного подчиненного, и что он будет делать, зависит от того, что ему предложит каждый из центров.

Каждый из центров не может рассуждать по отдельности, т.е. если он попросит агента сделать что-то, то тот не обязательно это сделает, т.к. другой центр может попросить от него другого и пообещает заплатить больше. Таким образом, центры вовлечены в игру и должны прийти к равновесию, подбирая соответствующие функции стимулирования и прогнозируя, что в ответ на вектор стимулирований будет выбирать агент.

Задача достаточно громоздка, поэтому приведем несколько известных результатов, которые позволяют ее упростить.

Первый результат говорит следующее. В теории игр принято использовать два основных подхода: равновесие Нэша и эффективность по Парето, которые, как сказано выше, не всегда совпадают. Оказывается, что в системе с распределенным контролем множество равновесий Нэша пересекается с множеством Парето, т.е. можно из множества равновесий Нэша выбрать такое, которое является эффективным по Парето. Есть теорема, которая говорит, что существует класс простых функций стимулирования, которые гарантируют Парето-эффективность равновесия Нэша игры центров. Эти функции стимулирования имеют компенсаторный вид:

$$\sigma_i(x, y) = \begin{cases} \lambda_i, \; y = x \\ 0, \;\; y \neq x \end{cases}, i \in K .$$

Содержательно эта система стимулирования значит, что существует некоторое действие агента (план x), относительно которого центры договорились выплачивать агенту стимулирование в случае, если он выберет это действие. При этом i-ый центр платит λ_i за выполнение плана. В случае, если агент выполняет другое действие, то он не получает вознаграждения вовсе. Таким образом, этот результат позволяет нам перейти от игры центров, в которой стратегией каждого является выбор функции, к игре, в которой стратегией является выбор одного действия агента и размера вознаграждения.

Причем относительно вектора вознаграждений мы можем сказать следующее. Посмотрим на целевую функцию агента: он получает сумму вознаграждений, и несет какие-то затраты. Если затраты в нуле равны нулю, то мы должны быть уверены, что с точки зрения агента суммарное стимулирование должно быть не меньше, чем затраты: $\sum_{i \in K} \lambda_i \geq c(x)$.

С другой стороны Парето-эффективными с точки зрения центров являются такие суммы вознаграждений, которые нельзя уменьшить, не изменив действия агента. Значит, сумма вознаграждений должна быть в точности равна затратам.

Пользуясь этим результатом, охарактеризуем равновесие игры центров, то есть найдем такие условия, при которых они договорятся, чего хотят добиться от агента. Для этого рассчитаем следующие величины:

$$W_i = \max_{y \in A}[H_i(y) - c(y)],\ i \in K.$$

Если i-ый центр сам взаимодействует (работает в одиночку) с агентом, то он будет использовать компенсаторную систему стимулирования, и прибыль, которую он получит, будет равна величине W_i (это следует из решения одноэлементной задачи – см. выше).

Найдем условия того, что каждому центру будет выгодно взаимодействовать с другими центрами (совместно управлять агентом), по сравнению с индивидуалистическим поведением, когда он говорит: пусть подчиненный работает только на меня.

Запишем эти условия следующим образом:

$$H_i(x) - \lambda_i \geq W_i,\ i \in K\ .$$

В случае если центры взаимодействуют друг с другом, i-ый центр получает доход $H_i(x)$ от выбора агентом действия x и платит агенту λ_i. При этом значение его целевой функции должно быть не меньше, чем если бы он взаимодействовал с агентом в одиночку, что даст ему полезность W_i. Кроме того, должно быть выполнено условие, что сумма вознаграждений агента должна быть равна его затратам.

Обозначим множество действий агента и векторов компенсаций его деятельности со стороны центров, таких, что сумма этих компенсаций в точности равна затратам агента по реализации этого действия, и каждый из центров получает выигрыш, не меньший, чем если бы он действовал в одиночку

$$\Lambda = \left\{ x \in A, \vec{\lambda} \geq 0 \mid \sum_{i \in K} \lambda_i = c(x), H_i(x) - \lambda_i \geq W_i, i \in K \right\}$$

Область Λ представляет собой подмножество декартова произведения множества A на k-мерный положительный октант. Множество Λ есть *множество компромисса* для системы с распределенным контролем. Она содержательно и интуитивно похожа на область компромисса в игре одного центра и одного агента.

Утверждение 5.

1) Если область компромисса Λ не пуста, тогда имеет место *сотрудничество центров*: центры могут договориться, какой вектор действия агенту выбирать и кто сколько должен заплатить;

2) Возможна ситуация, когда эта область Λ пуста. Тогда это будет ситуация *конкуренции центров*.

В случае конкуренции исходом игры центров в содержательном смысле будет следующее: начальники между собой не договорились, как использовать подчиненного. Тогда первый начальник считает, что бы он хотел получить от подчиненного, действуя в одиночку. Аналогично остальные. Каждый из начальников говорит подчиненному: «Давай ты будешь работать на меня – я тебе плачу столько-то». Начинает он с компенсации затрат. Каждый сказал, подчиненный сидит на нуле. Кто-то из начальников догадывается, и говорит: "я тебе оплачу затраты и выдам еще надбавку при условии, что ты будешь работать на меня". Это лучше для подчиненного, т.к. он получает не ноль, а что-то сверх компенсации затрат. Начинается конкуренция центров, каждый центр "перетягивает" на себя агента. В такой ситуации наилучшее положение у агента. Из центров победит тот, у которого больше значение W_i, т.е. параметр, характеризующий прибыль, которую получает центр от взаимодействия с агентом. Кто более эффективно взаимодействует с агентом, тот его и "переманит".

Если мы упорядочим центры в порядке убывания W_i: $W_1 \geq W_2 \geq \ldots \geq W_k$, то победит тот, у кого W_i максимально, заплатив агенту, помимо компенсации затрат, W_2 плюс бесконечно малую величину, чтобы переманить агента у другого (второго в данном упорядочении) центра.

Ситуация упорядочения центров по эффективности, когда побеждает тот, кто обладает максимальной эффективностью, причем побеждает по цене следующего за ним, называется *аукционным решением* (аукцион второй цены).

Найдем условия существования режима сотрудничества. Введем следующую величину: максимум суммарного выигрыша центров, т.е. определим действие агента, которое доставляет максимум суммы доходов центров минус затраты агента:

$$W_0 = \max_{y \in A} \left[\sum_{i \in N} H_i(y) - c(y) \right].$$

Утверждение 6. Режим сотрудничества может быть реализован, т.е. область компромисса не пуста, тогда и только тогда, когда сумма индивидуальных выигрышей центров от их деятельности по отдельности не больше, чем суммарный выигрыш системы при совместном взаимодействии центров: $\Lambda \neq 0 \Leftrightarrow \sum_{i \in K} W_i \le W_0$.

Содержательная интерпретация утверждения 6 следующая: *свойство эмерджентности* системы (целое больше, чем сумма частей). В данном случае целое – сотрудничество центров – должно быть больше, чем сумма частей. Т.е., если в системе присутствует синергетический эффект, то центры смогут прийти к компромиссу.

Механизмы планирования

Ранее речь шла о задачах мотивационного управления организационными системами, в частности, основной акцент делался на задачах стимулирования, в которых центр решал следующую задачу: установить систему вознаграждения своих подчиненных с тем, чтобы побудить их выбрать требуемое действие. Основной результат рассмотрения этих задач сводился к тому, что во всех моделях – как простейших одноэлементных, так и более сложных многоэлементных – решение разбивается на два этапа: определить систему стимулирования, которая является согласованной с предпочтениями агентов (как правило, такой системой стимулирования была компенсаторная система стимулирования, когда центр платил вознаграждение за выполнение плана и ничего не платил в случае невыполнения плана), а второй этап заключался в поиске оптимального согласованного плана.

Основные теоретические сложности возникали как раз на этапе определения согласованной системы стимулирования: имея результат, что оптимальной является компенсаторная система стимулирования, дальше все сводилось к оптимизационным задачам.

Далее мы будем рассматривать другой класс задач, который также является задачами мотивационного управления, т.к. управляющее воздействие направлено на целевые функции управляемых агентов. Этот класс задач условно называется *механизмом плани-*

рования. Термин "планирование" употребляется в двух смыслах. Во-первых, план это – образ действий. В более узком смысле *план* это – желательное состояние системы (желательное с точки зрения центра). Под *механизмом планирования* в теории управления понимается несколько более узкая вещь, а именно процедура определения планов в зависимости от сообщений агентов. Затем же нужны сообщения агентов?

Когда мы с вами рассматривали модели принятия решений, то говорили, что имеет место гипотеза рационального поведения, т.е. субъекты максимизируют свою полезность выбором тех действий, которые от них зависят. Кроме того, имеет место гипотеза детерминизма, в соответствии с которой субъект принимает решение, стремясь устранить всю имеющеюся неопределенность и принимать решения в условиях полной информированности. Так, начальник, устанавливая какие-то параметры управляющего воздействия, т.е. плана, должен принимать решения в соответствие с гипотезой детерминизма, устранив неопределенность. Что значит неопределенность? Это – недостаточная информированность, она может быть как относительно существенных характеристик окружающей среды, так и относительно управляемых субъектов. Понятно, что субъекты, как правило, лучше знают свои характеристики, чем начальник. Поэтому, если у начальника не хватает информации для принятия решения, то у него есть несколько путей устранения неопределенности.

Возможный путь – использование максимального гарантированного результата, когда начальник рассчитывает на наихудшее значение параметров подчиненных. Но, возникает мысль: если подчиненные знают что-то лучше нас, то давайте их и спросим о том, что мы не знаем. Мы их спрашиваем, они сообщают нам информацию, на основе этой информации мы принимаем решение, но наши подчиненные активны, они обладают своими интересами, в том числе для них те или иные наши управленческие решения могут быть предпочтительней в той или иной степени. Значит, имея возможность своими сообщениями влиять на те решения, которые мы будем принимать, они постараются сообщить такую информацию, чтобы было принято наиболее выгодное для них решение. То есть та информация, которую агенты сообщат, вовсе необязательно будет достоверной.

Этот эффект искажения информации называется *эффектом манипулирования* информацией. Возникает вопрос, какие процедуры принятия решения будут неманипулируемы, т.е. будут побуждать управляемых субъектов сообщать достоверную информацию? Желательно было бы использовать такие правила принятия решений, при которых управляемым субъектам было бы выгодно говорить правду. Вот этой задачей мы и будем заниматься.

Задача манипулирования механизмов принятия решений – классическая задача теории выбора и теории голосований. Например, при голосовании: предположим, что у нас есть механизм выбора того или иного человека на ту или иную должность. Всегда ли избирателю будет выгодно голосовать в соответствии с тем, как он действительно считает нужным, т.е. должен ли избиратель честно выражать свое мнение, или в каких-то ситуация ему выгодно проголосовать за другого кандидата, чтобы получить более выгодный для себя результат? Во многих случаях избирателям выгодно искажать свои предпочтения. Мы будем заниматься этой проблемой применительно к задачам управления организационными системами.

Рассмотрим следующую модель. Пусть имеется управляющий орган – центр – и множество $N = \{1,2,\ldots,n\}$ агентов. Каждый агент характеризуется параметром $r_i \in \Omega_i$, $i \in N$, который будем называть его *типом*. Это – параметр, который отражает все существенные характеристики данного агента. Примером может быть эффективность деятельности агента, или то количество ресурса, которое ему нужно, или то состояние природы, которое с его точки зрения имеет место.

Агент i сообщает центру информацию $s_i \in S_i$, о значении своего типа $r_i \in \Omega_i$, $i \in N$. Обратим внимание на то, что тип принадлежит одному множеству, а сообщения принадлежат другому множеству. В частном случае эти множества совпадают между собой, т.е. агент может непосредственно сообщать информацию о своем типе, но в общем случае он может и давать информацию другого рода – косвенную информацию, имеющую опосредованное значение по отношению к своему типу.

Если обозначить вектор сообщений $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, то *механизмом планирования* будет отображение множества возможных сообщений во множество планов, то есть $\pi = \pi(s) : S \to X$, где множество возможных сообщений является декартовым произведением множества возможных сообщений агентов, множество планов является декартовым произведением множества возможных планов агентов: $s = \prod_{j \in N} S_j;\ X = \prod_{i \in N} X_i;\ x_i = \pi_i(s);\ i \in N$. Планы, назначаемые каждому агенту, – это соответствующая компонента механизма планирования. Мы видим, что план, назначаемый i-му агенту, зависит от сообщений всех агентов, значит, они будут вовлечены в игру.

Пусть $s^* \in S$ – равновесие игры агентов, $s^* = s^*(r)$, где $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ – вектор типов агентов. Предположим, центр сначала сообщаем агентам механизм планирования, т.е. отображение $\pi(\cdot)$, затем агенты выбирают свои сообщения. Выбираемые ими сообщения будут равновесиями их игры (тип равновесия оговаривать пока не будем, но в большинстве случаев речь будет идти о равновесии Нэша), и эти равновесия, очевидно, зависят в общем случае от вектора типов агентов.

Для того чтобы в явном виде записать, что такое равновесие, надо определить целевую функцию i-го агента, которая зависит от назначаемого ему плана и его типа: $f_i(x_i, r_i)$.

Обратим внимание на то, что предпочтения i-го агента зависят только от его собственного плана, т.е. i-го агента не интересует, какие планы назначили другим агентам. Такие предпочтения называются *сепарабельными*. Давайте в целевую функцию подставим план, зависящий от сообщений: $f_i(\pi_i(s), r_i)$, и запишем, что такое равновесие: $s^*(r)$ будет равновесием Нэша тогда и только тогда, когда (по определению, равновесие Нэша – это вектор, одностороннее отклонение от которого не выгодно никому из агентов)

$$\forall i \in N, \forall s_i \in S_i \quad f_i(\pi_i(s^*(r), r_i)) \geq f_i(\pi_i(s_i, s^*_{-i}(r), r_i).$$

Видно, что сообщение i-го агента зависит в общем случае от вектора типов всех агентов, т.е. это система неравенств, записанная для всех n агентов, в качестве решения даст вектор $s^*(r)$.

Таким образом, можно провести параллель между механизмами стимулирования и планирования: стратегией агента в механизме стимулирования был выбор действия; стратегией агента в механизме планирования является выбор сообщения. Стратегией центра в механизме стимулирования было назначение функции стимулирования (вектор-функции, ставящей в соответствие вектору действий агентов их вознаграждения); стратегией центра в механизме планирования является выбор процедуры планирования (вектор-функции, ставящей в соответствие вектору сообщений агентов вектор планов, назначаемых этим агентам) – см. таблицу 1.

Таблица 1

Соответствие между механизмами стимулирования и механизмами планирования

Стимулирование	**Планирование**
$y_i \in A_i$	$s_i \in S_i$
$\sigma(\cdot)$	$\pi(\cdot)$
$f_i(\sigma_i(\cdot), y)$	$f_i(\pi_i(\cdot), s)$

План, назначаемый каждому агенту, является отображением множества возможных сообщений во множество планов. Сообщения агентов равновесны, они зависят от типов агентов. Мы можем сделать замену переменных: ввести механизм, зависящий от типов агентов, и определить его как сложную функцию: $h(r) = \pi(s^*(r))$. Если вместо сообщений подставить сообщения, зависящие от типов агентов, то процедура принятия решений может быть определена как отображение вектора типов агентов в вектор планов $h(r) = \pi(s^*(r)) : \Omega \to X, \Omega = \prod_{j \in N} \Omega_j$. Отметим, что при такой подстановке, если имеется несколько равновесий, то нужно определить, какое из равновесий в каждом конкретном случае подставляется.

Механизм $h(\cdot)$ называется *соответствующим* механизму $\pi(\cdot)$ *прямым механизмом*. Термин "прямой механизм" возник потому, что исходный механизм $\pi(\cdot)$, который отображал какие-то сообщения агентов во множество планов, иногда называется *непрямым*, так как агенты в нем могут сообщать косвенную информацию о своих типах. Механизм $h(\cdot)$ является прямым в том смысле, что в нем агенты непосредственно (прямо) сообщают информацию о своих типах. Связь между ними такова: почему механизм $h(\cdot)$ соответствует исходному механизму $\pi(\cdot)$? Потому что он определяется в явном виде через механизм $\pi(\cdot)$, т.е. сначала берется непрямой механизм, потом для него строится соответствующий прямой механизм.

Можно переписать определение равновесия Нэша в терминах прямого механизма: $r^*(r)$ – равновесие Нэша тогда и только тогда, когда

$$\forall i \in N, \forall \tilde{r}_i \in \Omega_i \quad f_i(h_i(r^*(r), r_i)) \geq f_i(h_i(\tilde{r}_i, r^*_{-i}(r), r_i)) .$$

Под сообщением достоверной информации будем понимать следующее: $\forall r \in \Omega, \forall i \in N \;\; r_i^*(r) = r_i$, то есть, каков бы ни был вектор типов агентов, всем агентам выгодно сообщать достоверную информацию, т.е. для любого вектора типов, для любого агента равновесным является сообщением достоверной информации о своем типе.

Прямой механизм, который является неманипулируемым, т.е. в котором всем агентам выгодно сообщать центру достоверную информацию, называется *эквивалентным прямым механизмом*.

Для каких процедур принятия решения агентам будет выгодно сообщать достоверную информацию? Общих результатов, характеризующих необходимые и достаточные условия для каких-либо достаточно обширных классов механизмов принятия решений, нет.

Известно, что, если в системе имеется один агент, то для любой процедуры планирования существует механизм, при котором данному агенту будет выгодно сообщать достоверную информацию. Это свойство основано на том, что для того, чтобы агентам было выгодно сообщать достоверную информацию, необходимо и достаточно, чтобы в исходном механизме существовало равновесие в доминантных стратегиях. Если имеется один агент, то у него по определению стратегия, выбираемая им при максимизации его целевой функции, является доминантной. В таком случае, когда существует один агент, оказывается, что для любого механизма планирования существует эквивалентный прямой механизм. Если агентов несколько, этот результат не имеет места, и каждый случай нужно исследовать отдельно.

На сегодняшний день известно несколько процедур принятия решений, которые, с одной стороны, обладают хорошими содержательными интерпретациями, а, с другой стороны, обладают свойством неманипулируемости. Исследование в каждом конкретном случае свойства манипулируемости является достаточно трудоемкой задачей. Но это оправданно, потому что, если процедура принятия решения неманипулируема, то мы можем не задумываться о том, что агенты могут искажать информацию, а воспринимать их сообщения как достоверные, потому что им выгодно будет говорить правду.

Механизмы распределения ресурса

Задача распределения ресурсов – одна из классических (типовых) задач экономики. Пусть у центра имеется некоторый ресурс, и он необходим агентам. Задача центра – распределить его между агентами. Если центр знает эффективность использования ресурса подчиненными, то задача заключается в том как распределить ресурс чтобы, например, суммарный эффект от его использования был максимальным. Если агенты являются активными, а центр не знает эффективности использования ими ресурса, и спрашивает: кому сколько ресурса нужно, и кто как будет его использовать, то, если ресурс ограничен, то сообщения агентов в общем случае могут не быть правдивыми. Возникнет проблема с достоверностью информации – не обязательно информация, полученная центром, будет достоверна. В каких ситуациях управляющий орган может предложить такую процедуру, т.е. правило распределения ресурсов между агентами, которая была бы неманипулируема, т.е. такую процедуру, чтобы каждому из агентов было выгодно говорить правду?

Рассмотрим механизм распределения ресурсов $\pi(s)$, который обладает следующими свойствами:

1) Процедура планирования непрерывна и монотонна по сообщениям агентов (монотонность означает, что чем больше просит агент ресурса, тем больше он его получает).

2) Если агент получил некоторое количество ресурса, то он может получить и любое меньшее количество ресурса.

3) Если количество ресурса, распределяемое между группой агентов, увеличилось, то каждый из агентов этой группы может получить не меньшее количество ресурсов, чем раньше.

Целевая функция i-го агента $f_i(x_i, r_i)$ зависит от типа r_i данного агента, который в случае механизмов распределения ресурса будет рассматриваться как оптимальное для данного агента количество ресурсов, и называться *точка пика*.

Допустим, что целевая функция агента имеет единственный максимум по x_i в точке пика. Т.е. агенту нужно некоторое количество ресурса, если ему недодают ресурса – его полезность при этом меньше, если ему дают лишний ресурс – его полезность тоже меньше. Единственным максимумом может быть и бесконечность, т.е. целевая функция может монотонно возрастать. Т.е. по мере удаления агента от точки пика полезность агента убывает. Такие функции предпочтения называются однопиковые (см. рисунок 13).

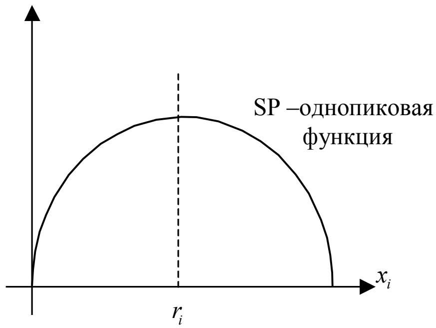

Рис. 13. Однопиковая функция

Рассмотрим сначала пример, а потом приведем общие результаты.

<u>Пример 3.</u> $n = 3$, $x_i = \pi_i(s) = \dfrac{s_i}{s_1 + s_2 + s_3} R$, R – количество ресурса, $s_i \in [0; R]$, $i = 1, 2, 3$. Пусть $R = 1$; $r_1 = 0{,}3; r_2 = 0{,}4; r_3 = 0{,}5$.

Имеем: $r_1 + r_2 + r_3 = 1{,}2 > R = 1$.

1) Пусть каждый агент сообщает правду:

$$\text{если } s_i = r_i, \text{то } x_1 = 0{,}25; x_2 = 0{,}333; x_3 \approx 0{,}4.$$

2) Пусть $s_i = R \Rightarrow x_i = \dfrac{R}{3} = 0{,}33 \in (r_1; r_2)$.

Первый агент должен найти такое свое сообщение, которое обеспечивает ему оптимальное количество ресурса при условии, что оба его оппонента сообщают максимальные заявки. То есть, он решает задачу: $\dfrac{s_1}{s_1 + 2} = 0{,}3 \Rightarrow s_1 = 6/7$. Получаем следующее равновесие Нэша:

$$s_1^* = 6/7;\ s_2^* = 1;\ s_3^* = 1 \Rightarrow x_1^* = 0{,}3;\ x_2^* = 0{,}35;\ x_3^* = 0{,}35.$$

Процедура распределения ресурса пропорционально заявкам, называется *механизмом пропорционального распределения*, это – самый распространенный способ распределения ресурса. Видно, что данная процедура распределения ресурса удовлетворяет условию нормировки – при любых комбинациях сообщений агентов распределяется в точности весь ресурс. Условия непрерывности и монотонности также выполнены.

Предположим, что сообщение каждого агента лежит от нуля до всего количества ресурсов, т.е., как минимум, агент может отказаться от ресурса, как максимум – может попросить весь ресурс, который имеется у центра.

Если агент получил некоторое количество ресурса, то, уменьшая заявку, в силу непрерывности и монотонности процедуры распределения ресурса, он всегда может получить меньшее количество, вплоть до нуля. Данная процедура распределения ресурса монотонна по количеству ресурса, имеющегося у центра, т.е., если количество ресурса, распределяемое между агентами, увеличилось, то при фиксированных сообщениях каждый агент получит его не меньше.

Если каждый агент скажет правду, сколько ресурса ему нужно, тогда он получит меньше, что логично, потому что ресурса на всех не хватает – агенты сказали правду и были "пропорционально урезаны".

Предположим, что игру центр разыгрывает неоднократно. На втором шаге агенты попросят больше. Если каждый будет просить максимально возможную заявку, то все получат поровну. Если кому-то этого много, то излишки он может отдать другому, но кому-то все равно не хватает.

Данный механизм является манипулируемым, потому что агентам невыгодно сообщать достоверную информацию о своих типах – тех количествах ресурса, которое им необходимо. •

Итак, рассмотрен пример механизма распределения ресурса. Рассчитано равновесие. Запишем результаты исследования таких механизмов в общем виде. Для этого попробуем сначала понять, какими свойствами характеризуется равновесие. Агентов можно разделить на две категории:

- «приоритетные» агенты (*диктаторы*) – те, кто получают абсолютно оптимальные для себя планы, то есть планы, равные их типам (при механизме распределения ресурса – те агенты, которые получают ресурса ровно столько, сколько им нужно),

- «обделенные» агенты – те, кому не хватает ресурса, те, кто хоть и просит по максимуму, но в равновесии получает меньше, чем ему нужно.

Утверждение 7. 1) Если некоторый агент в равновесии получает строго меньше ресурса, чем ему необходимо: $x_i^* < r_i$, то в равновесии он запросит максимально возможное количество ресурса: $s_i^* = R$.

2) Если кто-то из агентов в равновесии просит строго меньше максимума: $s_i^* < R$, то это значит, что он получает количество ресурса, оптимальное для него: $x_i^* = r_i$, т.е. является диктатором.

Утверждение 7 дает два свойства, характеризующие равновесие в механизмах распределения ресурса.

Введем определение *анонимного механизма* принятия решений, т.е. механизма, симметричного относительно перестановок агентов. Анонимность – демократическое требование, например, в процедурах выборов она отражается в том, что на избирательном участке обмен между двумя избирателями пустыми бланками бюллетеней не меняет результата выборов. Т.е. все находятся в равных условиях. Тогда, переставляя местами агентов, мы соответственно переставляем и планы этих агентов.

Утверждение 8.

1) Все анонимные механизмы распределения ресурса эквивалентны между собой, т.е. приводят при одних и тех же предпочтениях агентов к одним и тем же равновесным количествам ресурса, которые они получают.

2) Так как механизм пропорционального распределения является анонимным (все агенты входят в него симметрично: если мы поменяем их местами, ничего не изменится), а все анонимные механизмы эквивалентны между собой, то это значит, что все механизмы распределения ресурсов, которые являются анонимными, эквивалентны механизму пропорционального распределения.

Таким образом, любая анонимная процедура, удовлетворяющая перечисленным выше трем требованиям, приводит к одним и тем же результатам. А механизм пропорционального распределения (который является анонимным) достаточно прост по своему виду, поэтому прост и для исследования, и для агентов (ресурс делится пропорционально запросам),

Таким образом, утверждение 8 говорит, что, если мы ограничимся классом анонимных механизмов, то не нужно выдумывать сложных механизмов распределения ресурса – достаточно рассмотреть механизм пропорционального распределения. Кроме того, оказывается, что механизм пропорционального распределения эквивалентен механизму последовательного распределения, рассчитать равновесие для которого совсем просто.

Механизмы последовательного распределения ресурса. Механизм пропорционально распределения хорош тем, что он имеет простой вид и для него просто посчитать равновесие.

Механизм последовательного распределения заключается в следующем. Это – прямой механизм, т.е. каждого агента спрашивают о том, сколько ресурса ему нужно.

Предположим, что агенты сделали свои сообщения. Упорядочим их по возрастанию сообщений (первый попросил меньше всех ресурса, потом второй и т.д.): $\tilde{r}_1 \le \tilde{r}_2 \le \ldots \le \tilde{r}_n$. Дальше применяем следующий *алгоритм последовательного распределения* (*положив* $x_i := 0,\ i \in N$):

Шаг 1. Если мы можем дать каждому агенту столько, сколько попросил первый агент, то даем всем по $\tilde{r}_1$ (если $n \cdot \tilde{r}_1 \le R$, то $x_i := x_i + \tilde{r}_1, , i \in N; \tilde{r}_i := \tilde{r}_i - r_1; R = R - n \cdot r_1$). Если не можем, распределяем ресурс между всеми агентами поровну (если $n \cdot \tilde{r}_1 > R$, то $x_i := \frac{R}{n}, i \in N$) и останавливаем алгоритм.

Шаг 2. Исключаем первого агента из рассмотрения, перенумеровываем агентов и возвращаемся к шагу 1.

<u>Пример 4.</u> $R = 1, r_1 = 0{,}3; r_2 = 0{,}4; r_3 = 0{,}5; 0{,}3 \le 0{,}4 \le 0{,}5.$ Предположим, что все сообщили правду, тогда мы можем дать всем одновременно по минимуму – 0,3: $x_1 = 0{,}3; x_2 = 0{,}3; x_3 = 0{,}3.$

После первого шага: $r_1 = 0; r_2 = 0{,}1; r_3 = 0{,}2; R = 0{,}1.$ Первый агент удовлетворен полностью. Поэтому мы забываем про него и повторяем для тех, кто что-то еще требует. Остаток ресурса, равный 0,1, недостаточен для того, чтобы дать обоим агентам столько, сколько требует первый (бывший второй) – по 0,1, следовательно, мы должны остаток ресурса поделить поровну, т.е. по 0,05.

В результате второй агент получит 0,35, третий тоже 0,35:

$$x_2 := x_2 + \frac{0.1}{2} = 0{,}35.$$

Так работает механизм последовательного распределения. Понятно, что максимум через n шагов, где n – количество агентов, процедура остановится.

<u>Утверждение 9.</u> В механизме последовательного распределения ресурса агентам выгодно сообщать достоверную информацию, т.е. сообщение достоверной информации является доминантной стратегией каждого агента.

Другими словами, механизм последовательного распределения является неманипулируемым прямым механизмом.

Рассмотрим на предыдущем примере, может ли кто-то из агентов, сообщая неправду, улучшить свое положение?

Первый агент получает оптимальное количество ресурса, ему нет нужды искажать информацию. Предположим, что начинает изменять свое сообщение второй агент (завышает заявку или занижает). Если он будет уменьшать свою заявку, все изменится в тот момент, когда разность от сообщения окажется такой, чтобы, выдавая столько, сколько просит второй агент, нам хватало бы ресурса. Такая разность равна 0,05 (деление поровну). Это значит, что второй агент должен заявить 0,35. Если он заявляет 0,35, то он получает 0,35, что и получал до этого, т.е. никакой выгоды занижение ему не принесло. Если же он сообщит меньше, чем 0,35, то он и получит столько, сколько сообщит, т.е. меньше 0,35. Ему это не выгодно, т.к. в действительности ему требуется 0,4. Таким образом, уменьшать заявку ему не выгодно.

Если же он начинает просить больше, чем 0,4, то вообще ничего не изменится, т.к. на втором шаге ресурса и так не хватает, и его остаток делится поровну между вторым и третьим агентами.

Аналогично для других агентов показывается, что, увеличивая или уменьшая до определенного уровня заявку, они ничего для себя не меняют, а дальнейшее уменьшение заявки дает уменьшение количества получаемого ресурса.

Утверждение 9 говорит о том, что при механизме последовательного распределения агентам выгодно сообщать достоверную информацию. Анонимность (симметричность агентов) необходима для того, чтобы мы могли распределять минимум всем и/или делить ресурс поровну.

Следствием утверждения 9 является следующее: для механизма пропорционального распределения и, соответственно, для любого анонимного механизма (в силу утверждения 8) существует механизм последовательного распределения, в котором доминантной стратегией каждого агента является сообщение достоверной информации.

Механизмы распределения затрат

Двойственными с содержательной точки зрения к механизмам распределения ресурса являются механизмы распределения затрат. Задача распределения затрат формулируется следующим образом: если нужно разделить затраты, то каждый агент стремится свои затраты минимизировать, и проблема возникает, когда мы не знаем, насколько эффективно функционирует агент, например, хорошо ли работает подразделение и насколько велик его вклад в общий доход или прибыль предприятия. Тогда мы начинаем спрашивать цеха, подразделения о данных показателях. При этом все начинают сообщать такую информацию, чтобы минимизировать свои затраты.

Пример 5. Пусть на заводе есть два подразделения и требуется сделать новую систему охраны или проложить новую дорогу, т.е. сделать то, чем смогут пользоваться оба подразделения. Это называется *общественное благо* – такое благо, уклониться от потребления которого не может, не хочет ни один из агентов. Если мы строим новую дорогу, то по ней будут ездить сотрудники обоих подразделений. Следовательно, оба подразделения заинтересованы в создании общественного блага. Предположим, что затраты на создание блага (строительство дороги) равны 1 ($c = 1$). Предположим также, что каждое из подразделений может оценить свою личную пользу от строительства этого блага: первый получает 0,4 единиц полезности ($h_1 = 0{,}4$) от использования блага, а второй – 0,8 ($h_2 = 0{,}8$). Это, например, удовольствие от того, что и те, и другие могут ездить по новой хорошей дороге. Видно, что ни один из агентов в одиночку построить дорогу не может, т.к. полезность каждого меньше, чем затраты.

На первый взгляд видно, что если они будут действовать совместно, то создание общественного блага выгодно, т.к. сумма полезностей равна 1,2, что больше необходимых суммарных затрат, равных 1. Значит, имеем 0,2 единиц прибыли, и задача распределения затрат преобразуется в задачу распределения этой прибыли.

Пусть x_1 – плата (взнос) первого, x_2 – второго за строительство дороги. Можно использовать разные принципы принятия решений относительного того? кто сколько должен заплатить.

Первое требование, которому должен удовлетворять принцип распределения затрат, что сумма затрат (взносов агентов) должна быть не меньше требуемой. Понятно, что больше, чем необходимо, платить не следует, но и меньше нельзя, т.к. иначе дорога не будет построена. По западной терминологии, эта задача называется задача о безбилетном пассажире (Free Rider Problem: пассажиры ездят на автобусе, автобус – общественное благо, но никто не хочет платить за проезд). Т.е. принцип должен удовлетворять требованию сбалансированности: сумма плат цехов, подразделений должна окупать затраты.

Далее если мы – дирекция завода, то можем поделить поровну затраты между подразделениями. В принципе, с одной стороны, это хорошо, т.к. это – нéманипулируемый механизм, т.к. мы ни у кого ничего не спрашиваем. Но, если мы априори знаем, что полезность подразделений от использования блага будет разной, то мы не должны заставлять платить их поровну. Т.е. в нашем примере, польза от строительства дороги 0,4 меньше, чем половина затрат – 0,5. Тогда первое подразделение откажется или разорится. Т.е. принцип равного распределения затрат не всегда допустим.

Прежде чем рассматривать другие варианты распределений, давайте посмотрим, какие условия удовлетворят агентов. Для этого нарисуем на плоскости их взносов ограничения (см. рисунок 14). Первое ограничение: $x_1 + x_2 = c$. Второе ограничение: очевидно, что первый заплатит не больше, чем получит пользы от этого блага. Для первого ограничение: он готов платить меньше, чем 0,4, а второй меньше, чем 0,8.

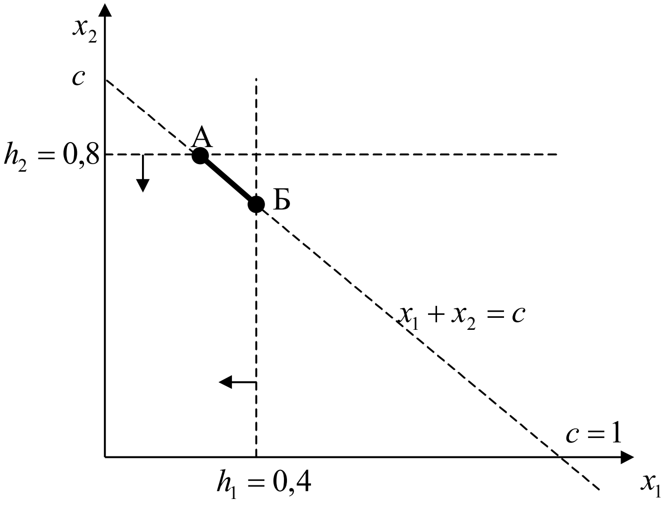

Рис. 14. Пример задачи распределения затрат

Тогда допустимым является отрезок АБ на рисунке 14. Здесь возможны следующие варианты.

Предположим, что центра нет, и агенты должны сами между собой договориться, тогда они разыгрывают игру, в которой каждый (одновременно с оппонентом) называет сумму, которую он готов заплатить. Каждый из них, если они оба знают пользу оппонента от использования общественного блага, может посчитать отрезок АБ. Легко показать, что отсутствие строительства вообще (точка (0; 0)) плюс данный отрезок есть множество равновесий

Нэша их игры. Т.е. опять остается неопределенность – агенты априори не могут сказать, какое равновесие им выбрать, потому что все равновесия из отрезка АБ Парето-эффективны и (кроме краев отрезка) доминируют точку (0;0), но один агент хочет одного, а второй другого. Первый агент хочет попасть в точку равновесия А, а второй – в Б. Поэтому, если их будут спрашивать последовательно, то оптимальная стратегия первого: «Я вношу 0,2», тогда второму ничего не остается, кроме, как вносить 0,8. Если первый ход делает второй агент, то он внесет 0,6, а первый – 0,4.

Прием последовательного сообщения хорошо применим для центра – если он хочет реализовать ту или иную крайнюю точку из отрезка АБ (например, точку А), то нужно принимать решение не коллегиально, а последовательно, т.е. вызвать первого агента и предложить ему сказать, сколько он может заплатить (0,2). После этого вызывается второй агент, которому говориться, что имеется проект, в котором первый платит 0,2, а в сумме нужно 1. И второй соглашается платить 0,8. Это – другой принцип принятия решений.

Итак, задача распределения затрат является, во-первых, содержательно двойственной задаче распределения ресурсов, во-вторых, возможно использование различных принципов принятия решений. Однозначно рекомендации относительно того, какой принцип принятие решений лучше, дать нельзя. Единственное, что может предложить математик реальному руководителю – смоделировать поведение подчиненных: как они будут вести себя, куда их можно привести управлением.

Продолжим рассмотрение механизмов планирования, для которых существуют эквивалентные прямые (неманипулируемые) механизмы.

Механизмы внутренних цен

Рассмотрим систему, состоящую из центра и n агентов. Целевая функция i-го агента представляет собой разность между вознаграждением, выплачиваемым i-му агенту, и затратами, которые квадратичным образом зависят от действия агента:

$$f_i(\lambda, y_i) = \lambda y_i - \frac{y_i^2}{2r_i}, \quad i \in N.$$

Коэффициент r_i, стоящий в знаменателе функции затрат – тип агента, который характеризует эффективность его деятельности.

Чем больше эффективность (чем больше значение типа), тем меньше затраты на выполнение одних и тех же действий. Параметр λ – *внутрифирменная цена* – стоимость единицы продукции, выпускаемой агентом, y_i – объем этой продукции.

Рассмотрим следующую задачу: предположим, что центр хочет, чтобы агенты выбрали действия, сумма которых равна заданной величине R, т.е. должно выполняться следующее условие:

$$\sum_{i \in N} y_i = R .$$

Например, центр хочет добиться выполнения подразделениями корпорации суммарного заказа R. Считается, что подразделения выпускают однородную продукцию, в сумме надо добиться некоторого выпуска. Это – первое ограничение.

Кроме того, центр хочет, чтобы заказ был выполнен с минимальными затратами. Т.е. сумма затрат агентов должна быть минимальна: $\sum_{i \in N} \frac{y_i^2}{2r_i} \to \min$.

Но, центр имеет возможность управлять только путем выбора функции стимулирования, т.е. зависимости вознаграждения агента от результатов его деятельности. Этот параметр λ, который называется внутрифирменной ценой, один и тот же для всех агентов. Агенты, зная внутрифирменную цену, будут выбирать действия, которые максимизируют их целевые функции. Агенты в данном случае независимы друг от друга, так как их целевые функции зависят только от их индивидуальных действий, поэтому задачей центра является выбор внутрифирменной цены таким образом, чтобы затраты агентов были минимальны, было выполнено суммарное действие, и агенты выбирали действия, исходя из максимизации своих целевых функций.

Опишем поведение агента, вычислив точку максимума его целевой функции. Целевая функция агента вогнутая, имеет единственный максимум. Продифференцировав, найдем зависимость действия, выбираемого агентом, от параметра λ: $y_i^*(\lambda) = r_i \lambda$, $i \in N$. Получаем следующую задачу:

$$\begin{cases} \lambda^2 \sum_{i \in N} \frac{r_i}{2} \to \min \\ \lambda \sum_{i \in N} r_i = R \end{cases}$$

Обозначим $\sum_{i \in N} r_i = H$. В этой задаче не остается никаких свободных переменных, т.к. первое ограничение нам однозначно определит λ, а значение λ, определенное из ограничения, даст значение целевой функции: а именно, λ должно быть равно отношению $\lambda = \frac{R}{H}$. Оптимальным значением целевой функции является величина $\frac{R^2}{2H}$.

Т.е. центр имеет полную централизацию, агентам назначаются планы, и агентам выгодно их выполнять. Остается только понять, какие планы назначать агентам, чтобы достичь минимума затрат агентов при выполнении программы суммарного выпуска. Решая эту задачу, получим следующее.

Запишем лагранжиан (μ – множитель Лагранжа):

$$\sum_{i \in N} \frac{y_i^2}{2r_i} - \mu(\sum_{i \in N} y_i - R) \to \min .$$

Получаем: $\frac{y_i}{r_i} - \mu = 0,\ y_i = \mu\, r_i,\ i \in N,\ \mu = \frac{R}{H} = \lambda$.

Следовательно, $y_i^* = r_i \frac{R}{H},\ i \in N$, то есть оптимальное действие агента пропорционально его типу.

Таким образом, сформулированы две разные задачи и получены одинаковые решения. Первая задача: центру необходимо выбрать такую внутрифирменную цену, чтобы сумма затрат агента была минимальна, при условии, что агенты выбирают свои действия из условия максимизации своих целевых функций. Вторая задача: найти оптимальный набор планов, таких, что сумма этих планов равна R, а сумма затрат агентов минимальна. В результате множитель Лагранжа в этой задаче – внутрифирменная цена

($\mu = \lambda$). Интересно, что в данной модели оптимальной оказалась пропорциональная система стимулирования, и, более того, оптимальной оказалась система стимулирования, в которой ставки оплаты для всех агентов одинаковы (такая система стимулирования называется *унифицированной*). Ведь можно было бы каждому агенту назначать свою цену, но оптимальна равная цена для всех подразделений.

Содержательной интерпретацией этой модели может быть не только задача корпорации (внутрифирменная цена корпорации), но это может быть и ставка оплаты труда агента внутри бригады. Кроме того, известна такая задача: выполняется проект и есть задача сокращения критического пути (времени выполнения проекта). Тогда тем агентам, кто выполняет критические операции, нужно дополнительно доплачивать, чтобы они сокращали время выполнения операций, а в сумме они должны сократить длительность проекта на заданную величину. Если участники проекта, выполняющие критические операции, имеют квадратичные затраты, а мы им за единицу сокращения времени платим λ, то получается такая же задача с аналогичным решением.

Естественно, результат, который мы получили: решения задач совпадают, оптимальным является система стимулирования, когда ставки всех агентов одинаковы (унифицированная система стимулирования) – получен только в рамках тех предположений, которые мы ввели, а именно: в данной модели существенным является предположение о виде функций затрат агента (квадратичная функция). Это свойство степенных функций дает в экономико-математических моделях много хороших свойств:

1. оптимальность унифицированной системы стимулирования (оптимальность единой ставки оплаты);

2. возможность решения задач агрегирования, т.е. решая задачи минимизации затрат с данным набором агентов с характеристиками r_i, получили, что затраты на выполнение данного заказа имеют такой же вид, что и затраты одного агента с характеристикой H – все агенты могут быть заменены на одного агента, действие которого равно сумме их действий, и тип которого равен сумме их типов.

Такие свойства присущи квадратичным функциям, функциям типа Кобба-Дугласа: $\frac{1}{\alpha} r_i^{1-\alpha} y_i^{\alpha}$, $\alpha \geq 1$. Это можно доказать и для функций более общего вида: $r_i \varphi(\frac{y_i}{r_i})$, где $\varphi(\cdot)$ – возрастающая выпуклая функция.

Выше мы считали, что все параметры известны, и решали задачу, полагая, что, в частности, нам известны параметры r_i функций затрат агентов. Если мы не обладаем этой информацией, то можно спросить у агентов значения их типов.

Рассмотрим задачу, когда информацией о типах агентов r_i центр не обладает, тогда пусть s_i – сообщение i-го агента о своем типе.

Центр на основании сообщений решает задачу планирования, т.е. определяет, какими должны быть вектор планов $x(s)$ и значение внутрифирменной цены $\lambda(s)$ в зависимости от сообщений агентов.

Первое, что приходит в голову – воспользоваться решениями задач, которые получены при полной информированности о функциях затрат агентов. Т.е. центр может подставить сообщения агентов в параметры механизмов, которые мы определили решая задачу в условиях полной информированности, и назначать планы в соответствии с полученными механизмами.

Данный путь приведет к тому, что значение λ будет следующим: $\lambda(s) = \frac{R}{\sum_{i \in N} s_i}$, а план, назначаемый i-му агенту, равен (подставляем вместо типов сообщения):

$$x_i(S) = \frac{S_i}{\sum_{j \in N} S_j} R, \; i \in N.$$

Получили так называемый *механизм внутренних цен* (который похож на механизм пропорционального распределения ресурса). Но информация, сообщаемая центру, зависит от типов агентов. Рассмотрим их целевые функции, подставив в них зависимости $\lambda(s)$ и $x_i(s)$ для того, чтобы понять, будет ли агенту выгодно выполнять назначенный план, и какую информацию ему будет выгодно сообщать:

$$f_i(\lambda, s) = \frac{R^2 s_i}{(\sum_{j\in N} s_j)^2} - \frac{s_i^2 R^2}{2(\sum_{j\in N} s_j)^2 r_i} = \frac{R^2}{(\sum_{j\in N} s_j)^2}(s_i - \frac{s_i^2}{2r_i}),\ i \in N.$$

Получили целевую функцию, которая зависит не от действий, а от сообщений агентов. Какие сообщения будет делать агент, чтобы максимизировать свою целевую функцию?

Будем искать максимум целевой функции i-го агента по его сообщению s_i. Для дифференцирования неудобен знаменатель, т.к. он тоже включает в себя s_i. Избавляются от этого "недостатка" введением *гипотезы слабого влияния*: предположим, что агентов достаточно много, т.е. так много, что каждый агент своим сообщением практически не влияет на общий для всех агентов управляющий параметр – внутрифирменную цену. Знаменатель целевой функции тогда не будет зависеть от сообщения отдельного агента. Получим, что $s_i = r_i$, $i \in N$, то есть сообщение достоверной информации выгодно всем агентам – механизм является неманипулируемым.

Итак, для механизма внутренних цен выполняется:

1) требование сообщения агентами достоверной информации;

2) балансовое ограничение: сумма действий равна требуемой величине;

3) суммарные затраты агентов минимальны.

Отличный механизм!

Рассмотрим еще один механизм планирования, в котором агентам выгодно сообщение достоверной информации.

Механизмы экспертизы

Экспертиза – выявление свойств объекта, процесса, явления путем опроса экспертов. Человек, принимающий решения, не может быть универсалом, обладать исчерпывающей информацией обо всех сторонах жизни, поэтому ему приходится привлекать экспертов.

Эксперты имеют свои предпочтения, поэтому может сложиться ситуация, когда при проведении экспертизы эксперт будет сообщать недостоверную информацию.

Это может происходить в следующих случаях: собрались эксперты для принятия решения в какой-то области. В ходе обсуждения один из экспертов видит, что решение, которое они собираются принять, сильно отличается от того что он считает нужным сделать. Например, принимают решения, куда вкладывать деньги университета. Один из деканов считает, что нужно покупать вычислительную технику. Но чувствует, что сейчас примут решение о ремонте. И если этот декан раньше считал, что 30% можно потратить на ремонт, а 70% – на закупку техники, то он скажет: «Ничего не нужно на ремонт, давайте все отдадим на компьютерную технику». Тем самым, исказив информацию.

Тем более искажение информации существенно, если эксперты решают (или готовят информацию для принятия решений), как разделить деньги между ними или субъектами, интересы которых они лоббируют. Искажение может происходить по благородным и неблагородным мотивам. С точки зрения математического моделирования важно, что искажение информации может иметь место, если каждый из экспертов заинтересован в том, чтобы результат экспертизы (коллективное решение) был как можно ближе к его мнению.

Предположим, что результатом экспертизы является величина $x \in [d, D]$, s_i – сообщение i-го эксперта, $s_i \in [d; D]$, r_i – истинное мнение эксперта, $r_i \in [d, D]$. Результат экспертизы x – известная функция от мнения экспертов – отображение (*процедура экспертизы*) $\pi(\cdot) : [d, D]^n \to [d, D]$ множества возможных сообщений $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in [d; D]^n$ во множество возможных решений, то есть $x = \pi(s)$.

Условия, налагаемые на механизм экспертизы:

1) непрерывность;

2) монотонность;

3) *условие единогласия*: $\forall a \in [d, D]$ $\pi(a, a, \ldots, a) = a$. Если все эксперты сообщили одно и то же мнение, то это мнение должно быть принято в качестве коллективного решения.

Рассмотрим сначала пример, а потом приведем общие результаты.

Пример 6. Пусть результат экспертизы принадлежит отрезку [0; 1]. Пусть имеется три эксперта. Мнение первого эксперта – оцениваемая величина равна 0,3, второго – 0,5, третьего – 0,7. Процедура экспертизы: берется среднее арифметическое мнений экспертов. Такая функция удовлетворяет всем введенным выше требованиям. Легко убедиться, что среднее арифметическое непрерывно, монотонно и удовлетворяет условию единогласия. Итак:

$$x \in [0,1],\ n = 3,\ r_1 = 0{,}3,\ r_2 = 0{,}5,\ r_3 = 0{,}7,$$

$$x = \pi(S) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} s_i .$$

Рассмотрим, как могут действовать эксперты. Пусть все эксперты сообщили правду: $s_i = r_i$. Тогда принимаемое решение будет 0,5 (среднее арифметическое) $x(\vec{r}) = 0{,}5$. Посмотрим на поведение отдельных экспертов. Каждый эксперт хочет, чтобы результат экспертизы был как можно ближе к его мнению. Второй эксперт абсолютно доволен, т.к. результат совпадает с тем, что он хочет. Первый недоволен, т.к. ему требуется меньший результат. Третий эксперт также недоволен, т.к. он хочет, чтобы результат был больше.

Следовательно, т.к. функция монотонна, то первый эксперт будет уменьшать сообщение, а третий – увеличивать. Пусть первый говорит 0, второй – 0,5, третий – 1. Тогда результат – 0,5, т.е. не изменился, т.к. на сколько первый уменьшил, на столько третий увеличил: $s_1 = 0$, $s_2 = 0{,}5$, $s_3 = 1$.

Данный вектор сообщений является равновесием Нэша игры экспертов, т.к. второй эксперт сообщение менять не будет, первый хотел бы сделать результат поменьше, но сделать этого не может, так как сообщает минимум, третий хотел бы сделать результат побольше, но сделать этого не может, так как сообщает максимум. Аналогично в других ситуациях равновесия: кто хочет меньше – не может, т.к. "упирается" в нижнее ограничение; кто хочет больше – не может, т.к. "упирается" в верхнее ограничение. •

Значит, в общем случае агенты сообщают недостоверную информацию. Спрашивается, можно ли сделать что-то, чтобы заставить их сообщать свои истинные мнения?

Утверждение 10. (аналогично утверждению 7 для механизмов распределения ресурса).

1) если в равновесии решение оказывается больше, чем мнение некоторых экспертов: $x^* > r_i$, то эти эксперты в равновесии будут сообщать минимальную оценку: $s_i^* = d$.

2) если в равновесии решение оказывается меньше, чем мнение некоторых экспертов: $x^* < r_i$, то эти эксперты в равновесии будут сообщать максимальную оценку: $s_i^* = D$.

3) если в равновесии некоторые эксперты сообщают мнение, не равное границам отрезков: $s_i^* \in (d; D)$, то это значит, что принимаемое решение их устраивает: $x^* = r_i$.

Опираясь на утверждение 10, можно построить равновесие в механизме экспертизы и исследовать его.

Упорядочим экспертов по возрастанию их мнений: $r_1 < r_2 < \ldots < r_n$ (будем считать, что мнения экспертов попарно различны). В ситуации, если на отрезке [d, D] было принято некоторое решение, то в соответствии утверждением 10 те эксперты, мнения которых расположены левее принятого решения, будут сообщать нижнюю границу, те, кто правее – верхнюю.

Значит, вектор равновесных сообщений будет иметь вид

$$s^* = (d, d, \ldots, d, s_k^*, D, D, \ldots, D) .$$

Эксперты с "маленькими" номерами хотят сдвинуть равновесие влево и сообщают минимальные заявки; быть может, какой-то эксперт с номером k сообщает s_k^* в отрезке [d,D], эксперты с большими номерами хотят сдвинуть равновесие вправо и сообщают максимальные заявки.

Равновесное сообщение s_k^* должно быть таким, чтобы выполнялось: $\pi(d, \ldots, d, s_k, D, \ldots, D) = r_k$.

Данное уравнение позволяет найти вектор равновесных сообщений агентов. Но здесь неизвестно, на какой позиции находится s_k: сколько агентов сообщают максимальное значение, а сколько – минимальное, а какой (один или ни одного) эксперт сообщает отличную от границ оценку. Если мы будем это знать, то подставив

s_k, решив это уравнение, определим вектор равновесных сообщений.

В рассмотренном выше примере k-ым экспертом является второй. Он рассчитывает, если первый говорит – 0, а третий – 1, то что необходимо сказать ему, чтобы итоговое решение было 0,5? Сообщение должно быть 0,5. Такой эксперт называется диктатором. Чтобы найти его номер в общем случае, введем последовательность чисел:

$$w_i = \pi(\underbrace{d,...,d}_{i},\underbrace{D,...,D}_{n-i}),\quad i=\overline{0,n}$$

Фиксируем число экспертов, сообщающих минимальные мнения, остальные сообщают максимальные. Варьируя число экспертов, которые сообщают минимальные заявки, от 0 до n, получаем убывающую последовательность точек. Точка w_0 совпадает с правой границей D, поскольку, если все сообщили правую границу, то в силу условия единогласия такое решение и будет принято. Аналогично, если все сообщили нижнюю оценку d, то решение равно w_n.

У нас есть две последовательности чисел: первая – возрастающая последовательность истинных мнений экспертов r; вторая – убывающая последовательность точек w. Утверждается, что рано или поздно эти последовательности пересекутся. Найдем крайнюю правую точку пересечения этих последовательностей, т.е. нужно взять минимум из этих двух чисел, соответствующих одному и тому же номеру, и взять максимум по всем номерам. Следовательно, существует эксперт с номером $k = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \min(r_i, w_{i-1})$.

В рассмотренном выше примере: для первого агента – минимум из его мнения и его действия равен r_1, для второго – r_2, для третьего агента происходит "поворот" – минимум равен 1/3. Максимум из этих трех точек равен 0,5. Значит, формула дает номер того эксперта, который будет диктатором. В примере $k = 2$.

Предположим, что мы используем не исходный механизм $\pi(\cdot)$, а предлагаем экспертам следующий *прямой механизм экспертизы*: итоговое мнение будет определяться по вашим сообщениями $\{r_i\}$ в соответствии с процедурой (где сообщения сначала упорядочиваются по возрастанию): $\hat{x}^* = \max_i \min(r_i, w_{i-1})$.

В итоге приходим к следующему утверждению.

Утверждение 11. При использовании прямого механизма экспертизы сообщение достоверной информации является доминантной стратегией экспертов.

Заключение

Таким образом, в данном лекционном курсе отражены основы построения и исследования теоретико-игровых и оптимизационных моделей управления организационными системами. Изложенные подходы и математические средства открывают перспективу как дальнейшего освоения и развития теоретических моделей, так и их детализации и конкретизации с учетом специфики объектов, форм и организаций, совершенствованием которых занимаются исследователи-прикладники.

Литература[1]

1 Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А. Теория графов в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2001. – 124 с.

2 Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять организациями. М.: Синтег, 2004. – 400 с.

3 Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2002. – 148 с.

4 Новиков Д.А. Стимулирование в организационных системах. М.: Синтег, 2003. – 312 с.

5 Новиков Д.А., Петраков С.Н. Курс теории активных систем. М.: Синтег, 1999. – 108 с.

6 Петраков С.Н. Механизмы планирования в активных системах: score неманипулируемость и множества диктаторства. М.: ИПУ РАН, 2001. – 135 с.

[1] *Все работы в электронном виде можно найти на сайте теории управления организационными системами www.mtas.ru.*