РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова

Д.А. Заложнев, Д.А. Новиков

МОДЕЛИ ТАРИФНО-ПРЕМИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ОПЛАТЫ ТРУДА

Москва – 2006

УДК 519
ББК 32.81

Заложнев Д.А., Новиков Д.А. **Модели тарифно-премиальных систем оплаты труда**. М.: ИПУ РАН, 2006. – 75 с.

Работа посвящена рассмотрению моделей тарифно-премиальных систем оплаты труда, в рамках которых вознаграждение каждого агента складывается из двух составляющих – тарифной и премиальной. Тарифная составляющая определяется квалификацией агента и не зависит от результатов его деятельности. Премиальная составляющая, наоборот, в основном, определяется именно результатами деятельности агента.

В первой части работы приводится обзор известных математических моделей материального стимулирования. Вторая часть содержит оригинальные результаты постановки и решения задачи синтеза оптимальной тарифно-премиальной системы оплаты труда, в том числе – модели компенсаторных, линейных, аккордных и бригадных тарифно-премиальных систем стимулирования. В третьей части рассматривается ряд моделей коллективного стимулирования, учитывающих индивидуальные различия агентов.

Работа рассчитана как на специалистов-теоретиков по управлению социально-экономическими системами, так и на руководителей организаций и сотрудников HR-отделов.

Рецензент: д.т.н., профессор В.Н. Бурков

Рекомендовано к печати Редакционным советом ИПУ РАН

УДК 519
ББК 32.81

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Настоящая работа посвящена рассмотрению математических моделей тарифно-премиальных систем стимулирования (оплаты труда), в рамках которых вознаграждение каждого агента складывается из двух составляющих – тарифной и премиальной. Тарифная составляющая определяется квалификацией агента и не зависит от результатов его деятельности. Премиальная составляющая, наоборот, в основном, определяется именно результатами деятельности агента (и, быть может, его квалификацией и результатами других агентов).

Структура изложения материала настоящей работы следующая. В первой части приводится обзор известных моделей материального стимулирования. Вторая часть содержит оригинальные результаты постановки и решения задачи синтеза оптимальной тарифно-премиальной системы оплаты труда, в том числе – модели компенсаторных, линейных, аккордных и бригадных тарифно-премиальных систем стимулирования. В третьей части рассматривается ряд моделей коллективного стимулирования, учитывающих индивидуальные различия агентов.

Авторы признательны за ценные замечания к.т.н. М.В. Губко, к.т.н. А.О. Калашникову, принявшему участие в написании второй части, и к.т.н. Н.А. Коргину, принявшему участие в написании раздела 3.5.

1. Системы оплаты труда

Ниже приводится обзор известных подходов к описанию базовых систем стимулирования (раздел 1.1), форм и систем оплаты труда (раздел 1.2), постановке и решению задач стимулирования в рамках теоретико-игровых моделей (раздел 1.3), а также к исследованию таких распространенных на практике систем стимулирования, как: линейные системы стимулирования (раздел 1.4), системы «бригадной» оплаты труда (раздел 1.5), ранговые системы стимулирования (раздел 1.6) и конкурсные системы стимулирования (раздел 1.7).

1.1. Базовые системы стимулирования

Перечислим, следуя [17], *базовые системы стимулирования* в *организационных системах* (ОС), состоящих из одного управляющего органа – *центра* – и одного управляемого субъекта – *агента*.

<u>Скачкообразные системы стимулирования (С-типа)</u> характеризуются тем, что агент получает постоянное вознаграждение $C \geq 0$ (как правило, равное максимально возможному или заранее установленному значению), при условии, что выбранное им действие $y \geq 0$ не меньше заданного, и нулевое вознаграждение, при выборе меньших действий (см. Рис. 1):

(1) $\sigma_C(x,y) = \begin{cases} C, & y \geq x \\ 0, & y < x \end{cases}$.

Параметр $x \geq 0$ называется *планом* – желательным с точки зрения центра состоянием (действием, результатом деятельности и т.д.) агента.

Системы стимулирования С-типа содержательно могут интерпретироваться как *аккордные*, соответствующие фиксированному вознаграждению при достижении заданного результата (например, объеме работ не ниже оговоренного заранее, времени и т.д.). Другая содержательная интерпретация соответствует случаю, когда действием агента является количество отработанных часов, то есть, вознаграждение соответствует, например, фиксированному тарифному окладу без каких либо надбавок и оценки качества деятельности.

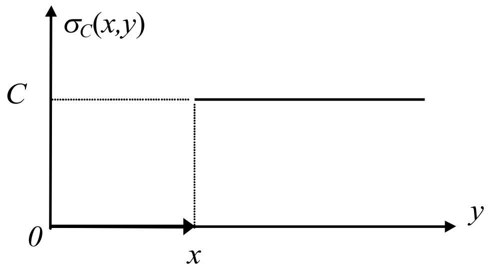

Рис. 1. Скачкообразная система стимулирования

Величины, соответствующие системам стимулирования С-типа, будем индексировать «*C*».

Компенсаторная система стимулирования (К-типа) характеризуется тем, что агенту компенсируют его затраты при условии, что его действия лежат в определенном диапазоне, задаваемым, например, ограничениями на абсолютную величину индивидуального вознаграждения:

(2) $\sigma_K(x,y) = \begin{cases} c(y), & y \le x \\ 0, & y > x \end{cases}$,

то есть центр может компенсировать агенту затраты при $y \le x$ и не оплачивать выбор бо́льших действий.

Пропорциональные системы стимулирования (L-типа). На практике широко распространены системы оплаты труда, основанные на использовании постоянных ставок оплаты: повременная оплата подразумевает существование *ставки оплаты* единицы рабочего времени (как правило, часа или дня), сдельная оплата - существование ставки оплаты за единицу продукции и т.д. Объединяет эти системы оплаты то, что вознаграждение агента прямо пропорционально его действию (количеству отработанных часов, объему выпущенной продукции и т.д.), а ставка оплаты $\alpha \ge 0$ является коэффициентом пропорциональности (см. Рис. 2):

(3) $\sigma_L(y) = \alpha\, y$.

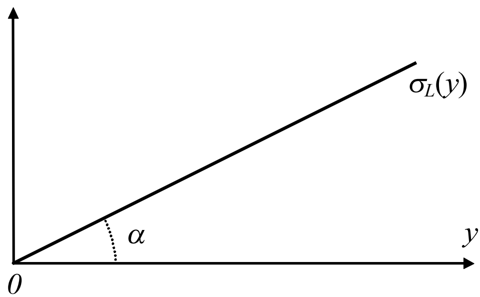

Рис. 2. Пропорциональная система стимулирования

В более общем случае возможно, что часть вознаграждения агента выплачивается ему независимо от его действий, то есть пропорциональная система может иметь вид: $\breve{\sigma}_L(y) = \sigma_0 + \alpha\, y$.

Системы стимулирования, основанные на перераспределении дохода (D-типа) используют следующую идею [22]. Так как центр выражает интересы системы в целом, то можно условно идентифицировать его доход и доход от деятельности всей организационной системы. Поэтому возможно основывать стимулирование агента на величине дохода центра $H(y)$ – положить вознаграждение агента равным определенной (например, постоянной) доле дохода центра:

(4) $\sigma_D(y) = \xi\, H(y)$,

где $\xi \in [0; 1]$.

Перечисленные системы стимулирования являются простейшими (см. модели более сложных систем стимулирования в [19, 23]), представляя собой элементы «конструктора», используя которые можно построить другие более сложные системы стимулирования. Для возможности такого «конструирования» необходимо определить операции над базовыми системами стимулирования. Для одноэлементных детерминированных ОС достаточно ограничиться операциями следующих трех типов [17].

Первый тип операции – переход к соответствующей «квази»-системе стимулирования – вознаграждение считается равным нулю всюду, за исключением действия, совпадающего с планом.

Второй тип операции – разбиение множества возможных действий на несколько подмножеств и использование различных базовых систем стимулирования на различных подмножествах. Получающиеся в результате применения операции второго типа системы стимулирования будем называть *составными*[1] и обозначать последовательной записью обозначений ее компонент [17].

Например, центр может фиксировать планы x_1 и x_2 ($x_1 \le x_2$) и использовать систему стимулирования С-типа со скачком в точке x_1 при действиях агента, меньших x_2, и пропорциональную систему стимулирования при действиях агента, превышающих план x_2

---

[1] *В литературе иногда для обозначения этого класса систем стимулирования используется термин «дифференциальные системы стимулирования».*

(содержательные интерпретации очевидны). Эскиз получающейся при этом системы стимулирования CL-типа приведен на Рис. 3.

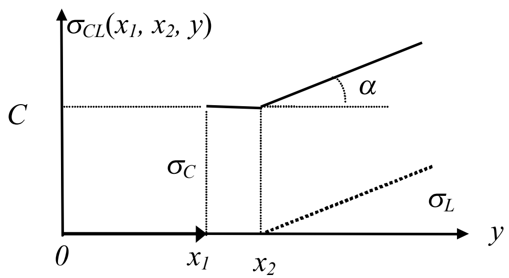

Рис. 3. Система стимулирования CL-типа (*составная*)

К одной и той же системе стимулирования можно применять операцию второго типа несколько раз. Возможно также применение операции второго типа к результатам ее предшествующего применения и т.д. Например, применяя операцию второго типа к системе стимулирования CL-типа, изображенной на Рис. 3, то есть добавляя условие, что система стимулирования является скачкообразной при $y \geq x_3 \geq x_2$, получим систему стимулирования CLC-типа и т.д.

Третий тип операции – алгебраическое суммирование двух систем стимулирования. Результат применения операции третьего типа будем называть *суммарной системой стимулирования* и обозначать «суммой» исходных систем стимулирования. Эскиз системы стимулирования C+L-типа, получающейся в результате применения операции третьего типа к системам стимулирования C-типа и L-типа, изображен на Рис. 4.

Операцию третьего типа также можно применять последовательно к результатам предшествующих ее применений, получая, например, системы стимулирования C+L+K-типа и т.д. Возможно также ее комбинированное применение с операциями первого и второго типа.

Получающиеся в результате последовательного применения операций первого, второго или третьего типа к системам C-типа, или K-типа, или L-типа или D-типа (которые называются *основ-*

ными), а также к результатам предшествующих их применений, называют *производными* от исходных.

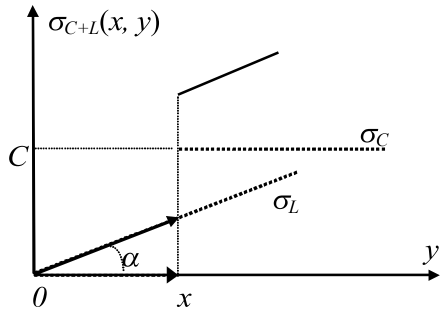

Рис. 4. Система стимулирования C+L-типа (*суммарная*)

Итак, *базовыми системами стимулирования* называют системы стимулирования C-типа, K-типа, L-типа и D-типа, а также все производные от них (в оговоренном выше смысле) системы стимулирования.

Таким образом, описав скачкообразные, компенсаторные, пропорциональные и основанные на перераспределении дохода системы стимулирования и определив три операции над ними, мы получили возможность генерировать значительное число различных систем стимулирования. Рассмотрим, как описанные модели связаны с используемыми на практике формами и системами оплаты труда.

1.2. Формы и системы оплаты труда

Системой оплаты труда называется способ определения размеров вознаграждения в зависимости от затрат, результатов труда и т.д. Те или иные конкретные системы оплаты труда выделяются в рамках более общих *форм оплаты труда*. Поэтому рассмотрим сначала, следуя [17], формы заработной платы, а затем для каждой из форм перечислим основные системы оплаты.

Различают следующие **формы** индивидуальной заработной платы:

- *тарифная*, при использовании которой индивидуальное вознаграждение агента не связано явным образом с количественными показателями его деятельности, а определяется ее содержанием, квалификационными требованиями и прочими нормативами;

- *повременная*, при использовании которой индивидуальное вознаграждение зависит от отработанного времени с учетом квалификации и качества труда;

- *сдельная*, при использовании которой индивидуальное вознаграждение зависит от количества произведенной продукции;

- *участие в доходе* (*участие в прибылях, выплаты бонуса*), например – приобретение акций компании (*опционы*);

- *премии* – дополнительное по сравнению с заработной платой вознаграждение, выплачиваемое в определенных случаях.

Отдельной формой заработной платы, не рассматриваемой подробно в настоящей работе, являются *комиссионные* [17].

Повременная форма заработной платы может реализовываться в виде следующих *систем оплаты*:

- *простая повременная*;
- *повременно-премиальная*.

Сдельная форма заработной платы (иногда ее называют поштучной) может реализовываться в виде следующих *систем оплаты*:

- *прямая сдельная*;
- *сдельно-премиальная*;
- *сдельно-прогрессивная*;
- *косвенно-сдельная*;
- *аккордная*.

Рассмотрим некоторые перечисленные выше системы оплаты более подробно.

Простая повременная система оплаты соответствует использованию фиксированных (постоянных, то есть не зависящих от каких-либо показателей деятельности агента) ставок оплаты за единицу времени. Если под действием агента понимать отработанное время, то данной системе оплаты соответствует линейная система стимулирования L-типа.

При использовании *повременно-премиальной системы оплаты* к сумме заработка по тарифу (при условии выполнения и/или перевыполнения нормативов, например – плана x) добавляется премия (обозначим ее ставку $\Delta\alpha$), измеренная, например, в процентах к тарифной ставке – см. Рис. 5. Данной системе оплаты соответствует система стимулирования LL-типа.

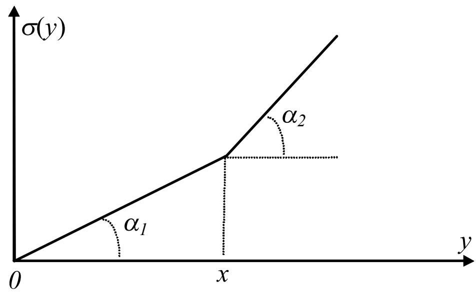

Рис. 5. Повременно-премиальная система оплаты (*норматив – x;* $\alpha_2 = (1+\Delta\alpha)\,\alpha_1$ *или* $\alpha_2 = \alpha_1+\Delta\alpha$)

Прямая сдельная система оплаты характеризуется прямо пропорциональной зависимостью величины вознаграждения от объема выпуска (количества произведенной продукции) по единым твердым сдельным расценкам (ставкам), не зависящим от объема выпуска и т.д. Если под действием агента понимать количество произведенной продукции, то данной системе оплаты соответствует линейная система стимулирования.

При использовании *сдельно-премиальной системы оплаты*, помимо базового тарифа, выплачивается премия, например, за перевыполнение нормативов и т.д. (см. Рис. 6). Следует отметить, что в литературе сдельно-премиальная и сдельно-прогрессивная системы оплаты не всегда разделяются достаточно четко, поэтому можно в общем случае считать, что при перевыполнении нормативов используется повышенный тариф или ставка оплаты. Данной системе оплаты соответствует система стимулирования L+C-типа или в более общем случае, приведенном на Рис. 6 ($\alpha_1 \le \alpha_2$), система стимулирования LL+C-типа.

Сдельно-прогрессивная система оплаты, в рамках которой выработка сверх установленной нормы оплачивается по повышенным расценкам, с точки зрения формального анализа полностью аналогична повременно-премиальной системе оплаты, и ей соответствует система стимулирования LL-типа.

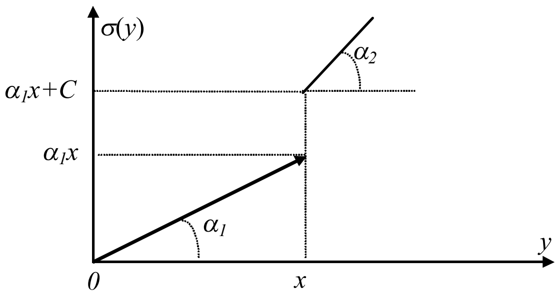

Рис. 6. Сдельно-премиальная система оплаты (*норматив* – x)

Косвенно-сдельная система оплаты используется, например, для оплаты труда вспомогательных рабочих. При этом размер их заработка может составлять определенный процент от заработка основных (обслуживаемых ими) рабочих. Данной системе оплаты соответствует система стимулирования, основанная на перераспределении дохода – см. ниже и участие в доходе (прибыли) как форму индивидуальной заработной платы

При использовании *аккордной системы оплаты* совокупный индивидуальный заработок выплачивается за фиксированные стадии работы или за выполнение полного комплекса работ (за выполнение плана). Данной системе оплаты соответствует система стимулирования С-типа. Разновидностью аккордной системы оплаты является так называемые *аккордно-премиальные системы оплаты*, в которых дополнительная премия выплачивается за качество работ, сокращение сроков и т.д.

Обсудим кратко такую форму индивидуальной заработной платы как *премия*. Будем различать премии, предусмотренные системой оплаты труда в организации (и относимые на себестоимость), то есть «регулярные», и премии поощрительного характера – единовременные (выплачиваемые организацией за счет собственных средств), которые не являются обязательными (например, премии к юбилейным датам и т.д.). Поощрительные премии не зависят явным образом от индивидуальных показателей деятельности за учетный период и поэтому рассматриваться нами не будут.

Различают регулярные премии следующих двух видов (отличающиеся показателями и условиями премирования).

В первом случае абсолютная величина премии, например, при выполнении и/или перевыполнении плановых заданий, оговорена заранее, чему соответствует система стимулирования A+C-типа, где A – некоторая базовая система стимулирования. В том числе величина премии может быть пропорциональна базовому окладу (без учета премиальных, прогрессивных и других надбавок).

Во втором случае абсолютная величина премии определяется как заранее установленный процент от заработка за учетный период.

Таким образом, краткий обзор основных используемых на практике систем оплаты труда позволяет сделать вывод, что подавляющее большинство из них охватывается множеством базовых систем стимулирования. При этом можно утверждать, что такие формы индивидуальной заработной платы как: повременная, сдельная, участие в доходе, премиальная (и соответствующие им системы оплаты: простая повременная, повременно-премиальная, прямая сдельная, сдельно-премиальная, сдельно-прогрессивная, косвенно-сдельная и аккордная и др.) могут быть относительно адекватно описаны следующим множеством систем стимулирования (см. их определения выше): L, LL, L+C или LL+C, D, C.

Установив в первом приближении качественную взаимосвязь теоретических моделей систем стимулирования с формами индивидуальной заработной платы, перейдем к описанию известных результатов теоретического исследования базовых систем стимулирования.

1.3. Теоретико-игровые модели стимулирования

Основным аппаратом моделирования задач стимулирования в теории управления является теория игр – раздел прикладной математики, исследующий модели принятия решений в условиях несовпадения интересов сторон (*игроков*), когда каждая сторона стремится воздействовать на развитие ситуации в собственных интересах [10]. Простейшей игровой моделью является взаимодействие двух игроков – *центра* (principal) и подчиненного ему агента (agent). Такая организационная система (ОС) имеет следующую структуру: на верхнем уровне иерархии находится центр, на нижнем – подчиненный ему агент. В качестве центра может выступать работодатель, непосредственный руководитель агента или организация, заключившая трудовой (или какой-либо иной – страховой, подрядный и т.д.) договор с агентом. В качестве агента может выступать наемный работник, подчиненный, или организация, являющаяся второй стороной по соответствующему договору.

Рассмотрим двухуровневую организационную систему (ОС), состоящую из одного управляющего органа – центра – на верхнем уровне иерархии и n управляемых субъектов – агентов – на нижнем.

Стратегией i-го агента является выбор *действия* $y_i \in A_i \subseteq \Re^k_+$, $i \in N = \{1, 2, ..., n\}$ – множеству агентов; стратегией центра – выбор системы стимулирования $\{\sigma_i(z)\}_{i \in N}$, где $z_i = Q_i(y) \in B_i \subseteq \Re^m_+$, $m \le k$, – наблюдаемый центром *результат деятельности* i-го агента, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ – вектор действий агентов, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$ – вектор результатов деятельности агентов, $Q_i: A \to B_i$ – *оператор агрегирования*, $\sigma_i: B \to \Re^1$, $i \in N$, $A = \prod_{i \in N} A_i$, $B = \prod_{i \in N} B_i$.

Предпочтения центра отражены его целевой функцией

(1) $\Phi(z, \sigma(z)) = H(z) - \sum_{i \in N} \sigma_i(z)$,

где $H(\cdot): B \to \Re^1$ – функция дохода центра.

Предпочтения i-го агента отражены его целевой функцией:

(2) $f_i(y, \sigma_i(z)) = \sigma_i(z) - c_i(y)$,

где $c_i(\cdot): A \to \Re^1$ – функция затрат i-го агента, $i \in N$.

Последовательность функционирования ОС такова: центр выбирает и сообщает агентам систему стимулирования (зависимость вознаграждения, выплачиваемого каждому из агентов, от вектора результатов их деятельности), затем агенты однократно, одновременно и независимо выбирают свои действия, которые приводят к соответствующим результатам деятельности. Целевые функции и допустимые множества, а также операторы агрегирования, являются общим знанием [28] среди всех участников ОС (центра и агентов); агенты на момент принятия решений знают выбранную центром систему стимулирования; центр наблюдает результаты деятельности агентов, но может не знать их действий.

Обозначим: $P(\sigma(\cdot)) \subseteq A$ – множество действий, выбираемых агентами при системе стимулирования $\sigma(\cdot)$: обычно считается, что агенты выбирают действия, являющиеся равновесием их игры [10]; $Q(P) = \bigcup_{y \in P} \{(Q_1(y_1), Q_2(y_2), ..., Q_n(y_n))\}$ – множество результатов деятельности агентов, которые могут реализоваться при выборе ими действий из множества P.

Эффективность стимулирования $K(\sigma)$ определяется как гарантированное значение целевой функции центра:

(3) $K(\sigma) = \min_{z \in Q(P(\sigma))} [H(z) - \sum_{i \in N} \sigma_i(z)]$.

В общем виде задача стимулирования формулируется следующим образом – найти допустимую систему стимулирования, обладающую максимальной эффективностью:

(4) $K(\sigma) \to \max_{\sigma}$.

Выше рассмотрен общий случай, в котором в многоагентной системе действием агента является вектор. Обычно (при рассмотрении прикладных задач) анализируются более частные случаи, поэтому пока будем считать, что имеется единственный агент со скалярным действием, и агрегирование отсутствует, то есть $z \equiv y$ ($Q(\cdot)$ – тождественное отображение, $m = k = 1$, $B = A = \Re^1_+$). Определим $y_{LCA} = \arg \min_{y \in A} c(y)$ – действие агента, минимизирующее его затраты.

Введем следующие предположения, которых будем придерживаться, если не оговорено особо, в ходе дальнейшего изложения. Относительно функции затрат предположим, что она непрерывна, а затраты от выбора действия y_{LCA} равны нулю. Также допустим, что значение вознаграждения, выплачиваемого центром агенту, неотрицательно, и что функция дохода центра непрерывна и достигает максимума при действии агента, отличном от y_{LCA}.

Перейдем к решению задачи стимулирования. Предположим, что использовалась система стимулирования $\sigma(\cdot)$, при которой агент выбирал действие $x \in P(\sigma(\cdot))$. Легко видеть [23], что если взять другую систему стимулирования $\tilde{\sigma}(\cdot)$, которая будет равна нулю всюду, кроме точки x, и будет равна старой системе стимулирования в точке x: $\tilde{\sigma}(y) = \begin{cases} \sigma(x), & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}$, то и при новой системе стимулирования это же действие агента будет доставлять максимум его целевой функции.

Так как центр стремится минимизировать выплаты агенту, при условии, что последний выбирает требуемое действие, то вознаграждение в случае выполнения плана должно равняться затратам агента (точнее – превосходить их на сколь угодно малую положительную величину δ – для того, чтобы целевая функция агента имела единственный максиму – точку плана). Этот важный вывод для скалярных систем стимулирования получил название «*принцип компенсации затрат*» [24].

Следовательно, параметрическим (с параметром $x \in A$) решением задачи (4) является следующая система стимулирования

(5) $\sigma_K(x, y) = \begin{cases} c(x) + \delta, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}$,

которая называется *компенсаторной* (K-*типа*).

Величина δ, фигурирующая в оптимальной системе стимулирования, получила название *мотивационной надбавки* [23], так как именно ее величина определяет значение целевой функции агента.

Оптимальное реализуемое действие может быть найдено из решения следующей стандартной оптимизационной задачи

(6) $x = \arg \max\limits_{x \in A} \; [H(x) - c(x)]$.

Известно [23, 24], что система стимулирования (5)-(6) δ-оптимальна.

Отметим, что компенсаторная система стимулирования (5) не является единственной оптимальной системой стимулирования – легко показать, что в рамках гипотезы благожелательности решением задачи (4) является любая система стимулирования $\hat{\sigma}(\cdot)$, удовлетворяющая следующему условию: $\hat{\sigma}(y^*) = c(y^*)$, $\forall\, y \neq y^*$ $\hat{\sigma}(y) \leq c(y)$.

1.4. Линейные системы стимулирования

Рассмотрим, следуя [23], случай $n = 1$, $k = 1$, $A = \Re^1_+$, $y_{LCA} = 0$, в отсутствии агрегирования информации.

При использовании пропорциональных (линейных) систем стимулирования и непрерывно дифференцируемой монотонной выпуклой функции затрат агента, выбираемое им действие определяется следующим выражением: $y^* = c'^{-1}(\alpha)$, где $c'^{-1}(\cdot)$ – функция, обратная производной функции затрат агента.

Известно [23, 26], что эффективность пропорциональных систем стимулирования $\sigma_L(y) = \alpha\, y$ не выше, чем компенсаторных. Невысокая эффективность таких пропорциональных систем стимулирования обусловлена требованием неотрицательности вознаграждений. Если допустить возможность использования систем стимулирования $\breve{\sigma}_L(y) = \sigma_0 + \alpha\, y$, где $\sigma_0 \le 0$, то при выпуклых функциях затрат агента эффективность этой может быть равна эффективности оптимальной (компенсаторной) системы стимулирования. Для этого достаточно выбрать: $y^*(\alpha) = c'^{-1}(\alpha)$, $\breve{\sigma}_L(y^*) = c(y^*)$, то есть $\sigma_0(\alpha) = c(c'^{-1}(\alpha)) - \alpha\, c'^{-1}(\alpha)$. Оптимальное значение ставки оплаты α^* при этом выбирается из условия максимума целевой функции центра:

$$\alpha^* = \arg \max_{\alpha \ge 0} \; [H(y^*(\alpha)) - \breve{\sigma}_L(y^*(\alpha))].$$

1.5. Системы «бригадной» оплаты труда

Настоящий раздел посвящен описанию такой разновидности коллективного стимулирования как «бригадные» формы оплаты труда, в рамках которых вознаграждение агента – члена «бригады» (команды, группы, коллектива, организации и т.п.) – определяется *коэффициентом его трудового вклада* (КТВ) и зависит от его действия в сравнении с действиями других агентов (в частном случае – при фиксированном премиальном фонде, в общем случае – когда премиальный фонд определяется агрегированным результатом деятельности всей бригады в целом) [11, 31].

Предполагается, что по результатам своей деятельности коллектив получает премиальный фонд R, который распределяется между агентами полностью. Будем считать, что i-ый агент характеризуется показателем r_i, отражающим его квалификацию (эффективность деятельности), то есть индивидуальные затраты i-го агента $c_i = c_i(y_i, r_i)$ монотонно убывают с ростом квалификации r_i, $i \in N$. Действие агента y_i пока будем считать принадлежащим множеству неотрицательных действительных чисел (многокритериальный случай рассматривается в настоящем разделе ниже).

Коллектив, в котором квалификация всех агентов одинаковая, будем называть *однородным*, в противном случае – *неоднородным*. Эффективность системы стимулирования $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ будем оценивать суммой действий агентов: $K(\sigma) = \sum_{i \in N} y_i$.

Целевые функции агентов имеют вид:

(1) $f_i(y_i) = \sigma_i - c_i(y_i, r_i), i \in N.$

Естественный и простейший способ определения КТВ δ_i агента – пропорционально действию последнего, то есть

(2) $\delta_i = \dfrac{y_i}{\sum_{j \in N} y_j}, i \in N.$

Пусть функции затрат агентов линейны: $c_i(y_i, r_i) = y_i / r_i$. Тогда из (1) и (2) получаем следующее выражение для целевой функции i-го агента, зависящей уже от действий всех агентов:

(3) $f_i(y) = R \dfrac{y_i}{\sum_{j \in N} y_j} - y_i / r_i, i \in N.$

Следовательно, исследуемую ситуацию можно рассматривать как игру n лиц с функциями выигрыша вида (3).

Рассмотрим сначала случай однородного коллектива ($r_i = r$, $i \in N$). Равновесные по Нэшу действия агентов имеют вид:

(4) $y_i^* = \dfrac{Rr(n-1)}{n^2}, i \in N,$

что приводит к следующему значению эффективности:

(5) $K_1(R, r, n) = \dfrac{Rr(n-1)}{n}.$

В ряде случаев возможно повысить суммарный показатель эффективности однородного коллектива, не увеличивая фонд премирования R, за счет иного способа формирования КТВ агентов – возводя в (2) действия в одинаковую для всех агентов степень, большую единицы.

1.6. Ранговые системы стимулирования

В рассмотренных выше моделях стимулирования вознаграждение агентов зависело от абсолютных значений их результатов деятельности. В то же время, на практике достаточно распространены *ранговые системы стимулирования* (РСС), в которых величина вознаграждения агента определяется либо принадлежностью результата его деятельности некоторому наперед заданному множеству – так называемые *нормативные* РСС, либо местом, занимаемым агентом в упорядочении результатов деятельности всех агентов – так называемые *соревновательные* РСС.

Нормативные РСС (НРСС) характеризуются наличием процедур присвоения рангов агентам в зависимости от результатов их деятельности. Для их описания, согласно [27], введем следующие предположения. Во-первых, будем считать, что множества возможных действий агентов одинаковы и составляют множество неотрицательных действительных чисел. Во-вторых, предположим, что функции затрат агентов монотонны и затраты от выбора нулевого действия равны нулю.

Пусть $\{q_j\}$ – совокупность w неотрицательных чисел, соответствующих вознаграждениям за «попадание» в различные ранги. При использовании УНРСС агенты, выбравшие одинаковые действия, получают одинаковые вознаграждения. Введем вектор $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_w)$, такой, что $0 \le Y_1 \le Y_2 \le \ldots \le Y_w < +\infty$, который определяет разбиение множества $\Re^1_+$. Унифицированная НРСС задается кортежем $\{w, \{Y_j\}, \{q_j\}\}$, причем вознаграждение i-го агента σ_i определяется следующим образом: $\sigma_i(y_i) = \max\limits_{\{j=\overline{1,w} \mid y_i \ge Y_j\}} q_j$, где $Y_0 = 0$, $q_0 = 0$. Унифицированная НРСС называется *прогрессивной*, если вознаграждения возрастают с ростом действий: $q_0 \le q_1 \le q_2 \le \ldots \le q_w$ [30].

Так как УНРСС кусочно-постоянна, то в силу монотонности функций затрат очевидно, что агенты будут выбирать действия с минимальными затратами на соответствующих отрезках. Иначе говоря, условно можно считать, что при фиксированной системе стимулирования множество допустимых действий равно $Y = \{Y_1, Y_2, ..., Y_w\}$, причем, так как $c_i(0) = 0$, то $q_0 = 0$. Действие y_i^*, выбираемое i-ым агентом, определяется парой векторов (Y, q), то есть имеет место $y_i^*(Y, q) = Y_{k_i}$, где

(1) $k_i = \arg \max\limits_{k=\overline{0,w}} \{q_k - c_i(Y_k)\},\ i \in N.$

Обозначим $y^*(Y, q) = (y_1^*(Y, q),\ y_2^*(Y, q), ...,\ y_n^*(Y, q))$. Задача синтеза оптимальной УНРСС заключается в выборе размерности УНРСС w, вектора $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$ и множества Y, удовлетворяющих заданным ограничениям, которые максимизировали бы целевую функцию центра $\Phi(\cdot)$:

(2) $\Phi(y^*(Y, q)) \to \max\limits_{w, Y, q}$.

Фиксируем вектор действий $y^* \in \Re_+^n$, который мы хотели бы реализовать с помощью УНРСС. Из того, что при использовании УНРСС агенты выбирают действия только из множества Y, следует, что минимальная размерность системы стимулирования должна быть равна числу попарно различных компонент вектора действий, который требуется реализовать. Следовательно, использование УНРСС размерности, большей, чем n, нецелесообразно. Без потери общности будем считать, что $w = n$ (если в результате решения задачи синтеза оптимальной УНРСС окажется, что некоторые оптимальные нормативы попарно совпадают, то может оказаться, что $w < n$).

Для фиксированного вектора действий y^* положим $Y_i = y_i^*$, $i \in N$, и обозначим $c_{ij} = c_i(Y_j)$, $i \in N$, $j = \overline{0, w}$. Из определения реализуемого действия (см. (5.1)) следует, что для того, чтобы УНРСС реализовывала вектор y^* (то есть, побуждала агентов выбирать соответствующие действия) необходимо и достаточно выполнения следующей системы неравенств:

(3) $q_i - c_i(y_i^*) \geq q_j - c_i(y_j^*),\ i \in N, j = \overline{0, w}$.

Обозначим суммарные затраты центра на стимулирование по реализации действия y^* УНРСС

(4) $\vartheta(y^*) = \sum_{i \in N} q_i(y^*)$,

где $q(y^*)$ удовлетворяет (3).

Задача синтеза оптимальной (минимальной) УНРСС заключается в минимизации (4) при условии (3). При заданных размерах вознаграждений исследование УНРСС сводится к необходимости ответа на следующий вопрос – какие векторы действий агентов могут быть реализованы в этом классе систем стимулирования (иначе говоря, для каких действий система неравенств (3) имеет решение).

Обозначим $\alpha_{ij}(y^*) = c_i(Y_j) - c_i(Y_i)$, $i \in N$, $j = \overline{0, w}$. Введем в рассмотрение n-вершинный граф $G_\alpha(y^*)$, веса дуг в котором определяются $\|\alpha_{ij}(y^*)\|$. В [27] доказано, что для того чтобы вектор y^* был реализуем в классе УНРСС, необходимо и достаточно, чтобы граф $G_\alpha(y^*)$ не имел контуров отрицательной длины. В упомянутой работе приведен также алгоритм поиска минимальных вознаграждений (за «попадание» в соответствующие диапазоны), реализующих заданный вектор действий агентов. Введем следующее предположение, в рамках которого задача может быть решена аналитически: Агентов можно упорядочить в порядке убывания затрат и предельных затрат: $\forall\, y \geq 0 \;\; c_1'(y) \geq c_2'(y) \geq \dots \geq c_n'(y)$.

Фиксируем некоторый вектор $y^* \in \Re^n_+$, удовлетворяющий следующему условию:

(5) $y_1^* \leq y_2^* \leq \dots \leq y_n^*$,

то есть, чем выше затраты агента, тем меньшие действия он выбирает.

В [27] доказано, что в рамках введенных предположений:

1) унифицированными нормативными ранговыми системами стимулирования реализуемы такие и только такие действия, которые удовлетворяют (5.5);

2) оптимальная УНРСС является прогрессивной;

3) минимальные индивидуальные вознаграждения в УНРСС, реализующей вектор y^*, удовлетворяют:

$$(6)\ q_1 = c_{11},\ \ q_i = \sum_{j=1}^{i} (c_j(y_j^*) - c_j(y_{j-1}^*)),\ i \in N \setminus \{1\}.$$

Выражение (6) позволяет исследовать свойства УНРСС – вычислять оптимальные размеры вознаграждений, строить оптимальные процедуры классификаций, сравнивать эффективность УНРСС с эффективностью компенсаторных систем стимулирования и т.д. [27].

Рассмотрим кратко свойства *соревновательных ранговых систем стимулирования* (СРСС), в которых центр задает число классов и число мест в каждом из классов, а также величины поощрений агентов, попавших в тот или иной класс. То есть в унифицированной СРСС индивидуальное поощрение i-го агента $q_i(z^*)$ не зависит непосредственно от абсолютной величины выбранного им действия, а определяется тем местом, которое он занял в упорядочении показателей деятельности всех агентов.

В [27] доказано, что

1) необходимым и достаточным условием реализуемости вектора действий агентов $y^* \in A$ в классе СРСС является выполнение (5);

2) данный вектор реализуем следующей системой стимулирования, обеспечивающей минимальность затрат центра на стимулирование:

$$(7)\ q_i(y^*) = \sum_{j=2}^{i} \{c_{j-1}(y_j^*) - c_{j-1}(y_{j-1}^*)\},\ i = \overline{1,n}\ .$$

Выражение (7) позволяет исследовать свойства СРСС – вычислять оптимальные размеры вознаграждений и строить оптимальные процедуры классификаций.

Близкими к СРСС являются конкурсные системы стимулирования.

1.7. Конкурсные системы стимулирования

Пусть имеются несколько агентов, каждый из которых принимает (одновременно с другими агентами и независимо от них) решения о собственных действиях. Тот агент, который достиг наилучших результатов (назовем его «победитель»), получает фиксированное вознаграждение. Остальные агенты не получают ничего. Требуется найти равновесие игры агентов. Содержательная интерпретация – конкурсная система стимулирования, в которой вознаграждение получает только победитель конкурса [12].

Обозначим через $N = \{1, 2, ..., n\}$ множество агентов. Агент номер i выбирает свое действие $y_i \geq 0$. Действительнозначные функции затрат агентов $\{c_i(y_i)\}_{i \in N}$ известны всем агентам.

Обозначим:

(1) $x(y) = \max_{i \in N} \{y_i\}$,

где $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ – вектор действий агентов. Содержательно (1) характеризует наилучший результат, достигнутый агентами. Агент с номером $k(y) = \arg \max_{i \in N} \{y_i\}$, который достиг этого результата, есть победитель. Если максимальный результат достигнут одновременно несколькими агентами, то будем считать, что априори известна процедура, в соответствии с которой из них выбирается единственный победитель. Например, условимся, что побеждает агент с большим номером. Можно также полагать, что, если победителей несколько, то они делят между собой вознаграждение поровну. Однако в последнем случае устойчивого равновесия взаимодействия агентов не существует.

Пусть задана действительнозначная функция $H(x)$. Ее содержательная интерпретация такова – победитель получает доход (вознаграждение) $H(x)$, зависящий от результата (1). Проигравшие агенты не получают ничего.

Таким образом, выигрыш победителя равен $H(x) - c_k(x)$, а выигрыши проигравших равны их затратам, взятым со знаком минус:

(2) $f_i(y) = \begin{cases} H(x) - c_k(x), \text{если } i = k(y) \\ -c_i(y_i), \quad\quad \text{если } i \neq k(y) \end{cases}, \; i \in N.$

Введем следующие предположения.

А.1. Функции затрат агентов непрерывны и строго возрастают.

А.2. Затраты от выбора нулевого действия равны нулю.

А.3. Существует упорядочение агентов такое, что

(3) $\forall\, y > 0 \;\; c_1(y) > c_2(y) > ... > c_n(y)$.

B.1. $H(\cdot)$ – непрерывная неубывающая положительнозначная функция.

B.2. $\exists\, y^+ > 0,\ y^+ < +\infty$: $\forall\, z \geq y^+\ \ H(z) < \min\limits_{i \in N}\ c_i(z)$.

B.3. $\forall\, x \geq 0\ \ H(x) = h$.

Имеем игру агентов в нормальной форме [10]: множество агентов N, их целевые функции (2) и множества допустимых действий заданы; считаем, что агенты производят свой выбор однократно, одновременно и независимо, а описание игры является общим знанием [28] среди агентов. Задача заключается в нахождении решения (равновесия) игры агентов.

Прежде чем приступать к решению данной задачи, сделаем ряд качественных замечаний.

Рассматриваемая модель близка к задаче синтеза оптимальной соревновательной системы стимулирования (см. выше). Следует отметить, что теоретико-игровой анализ соревновательных систем стимулирования гораздо более сложен и трудоемок, чем «обычных» или нормативных систем стимулирования. Основная сложность заключается в том, что при использовании принципа «конкурса» у агентов не существует равновесных по Нэшу стратегий, следовательно, возникает необходимость введения гипотез о поведении элементов и искусственного построения множества решений игры. Одним из возможных вариантов является следующий (используемый в настоящей работе): следует проверять условие «угроз» [27], т.е. произвольный агент не может быть спокоен до тех пор, пока другой агент может угрожать ему изменением своей стратегии.

Угрозой агенту называется такая игровая ситуация, при которой какой-либо из его партнеров может изменить свою стратегию, увеличив при этом свой выигрыш и одновременно уменьшив выигрыш того, кому он угрожает. *Равновесием в безопасных стратегиях* (РБС) в таком случае будет такой набор стратегий, при отклонении от которого в одиночку любой игрок или уменьшает значение своего выигрыша, или попадает в угрожающее ему состояние [14]. В настоящем разделе под термином «равновесие» подразумевая именно РБС.

Рассмотрим сначала случай, когда выполнены предположения A.1-A.3 и B.1-B.3. Тогда победителем является агент с номером n. Фиксируем $h > 0$ и обозначим:

(4) $x_i(h) = c_i^{-1}(h),\ i \in N$,

где $c_i^{-1}(\cdot)$ – функция, обратная функции затрат i-го агента (эта функция существует в силу предположения А.1). Из предположения А.3 следует, что

$$\forall\, h > 0 \;\; x_1(h) < x_2(h) < \ldots < x_n(h).$$

Обозначим РБС через y^*. В рассматриваемом случае равновесие зависит от размера вознаграждения h, т.е. $y^* = y^*(h) = (y_1^*(h),\ y_2^*(h), \ldots,\ y_n^*(h))$. Из определения РБС (см. условие отсутствия угроз и описание ранговых систем стимулирования выше) и теоремы 5.2.1 [27] получаем, что справедливо следующее утверждение.

Пусть выполнены предположения А.1-А.3 и В.1-В.3. Тогда:

а) существует РБС такое, что:

$$\forall\, i \neq n \;\;\; y_i^*(h) = 0;\;\; y_n^*(h) = x_{n-1}(h) + \varepsilon,$$

где $\varepsilon \in (0;\, x_n(h) - x_{n-1}(h))$;

б) зависимость соответствующего равновесию результата x^* от вознаграждения h имеет вид: $x^*(h) = x_{n-1}(h) + \varepsilon$ [12].

Если ввести гипотезу, что агент, получающий в результате победы нулевую полезность, предпочтет выбирать нулевое действие, то можно положить константу ε равной нулю. Эту гипотезу будем считать выполненной в дальнейшем (в противном случае можно считать ε сколь угодно близкой к нулю).

Содержательно приведенный результат означает, что победителем будет агент с минимальными затратами – который за фиксированное вознаграждение может добиться максимального результата (при условии неотрицательности его целевой функции, т.е. – в рамках предположения А.2 – при условии, что затраты не превышают вознаграждения). Он выберет такое действие, чтобы ему не мог угрожать ни один другой агент. А угрожать ему может, в первую очередь, предыдущий в упорядочении затрат агент. Поэтому победитель, стремясь минимизировать свои затраты, выберет действие $x_{n-1}(h)$, на котором обращается в ноль выигрыш угрожающего ему агента. Этот качественный принцип определения РБС справедлив и при более слабых предположениях (см. ниже).

Откажемся теперь от предположения А.3. Фиксируем $h > 0$. Перенумеруем агентов таким образом, чтобы больший номер соответствовал большему значению величины (1): $i_1(h) < i_2(h) < \ldots < i_n(h)$. Если оказывается, что у нескольких агентов величина (1) одинакова, то упорядочим этих агентов по возрастанию их номера в исходном упорядочении. В результате получим

(5) $\forall\, h > 0 \quad x_{i_1(h)}(h) \le x_{i_2(h)}(h) \le \ldots \le x_{i_n(h)}(h)$.

Пусть выполнены предположения А.1-А.2 и В.1-В.3. Тогда:

а) существует РБС такое, что:

(6) $\forall\, i \ne i_n(h) \quad y_i^*(h) = 0;\ y_{i_n(h)}^*(h) = x_{i_{n-1}(h)}(h)$;

б) зависимость соответствующего равновесию результата x^* от вознаграждения h имеет вид:

(7) $x^*(h) = x_{i_{n-1}(h)}(h)$;

в) зависимость (7) результата от размера вознаграждения является монотонной непрерывной функцией [12].

Данное утверждение справедливо в рамках предположений А.1-А.2 и В.1-В.3. Откажемся теперь от предположения В.3 (отказ от предположений А.1 и/или В.1 существенно усложнит анализ, так как число возможных вариантов станет невообразимо велико; предположение В.2 является достаточным для существования РБС, если выполнены предположения А.1 и В.1).

Обозначим:

(8) $y_i^{\max} = \max \{y \ge 0 \mid H(y) \ge c_i(y)\},\ i \in N,$

$k^* = \arg \max\limits_{i \in N} y_i^{\max}$.

В силу предположения В.2 выполнено: $y_i^{\max} \le y^+ < +\infty,\ i \in N$. Если выполнено предположение А.3, то величины (5) упорядочены в соответствии с исходной нумерацией агентов и $k^* = n$.

Перенумеруем агентов таким образом, чтобы больший номер соответствовал большему значению величины (5): $j_1 < j_2 < \ldots < j_n$. Если оказывается, что у нескольких агентов величина (5) одинакова, то упорядочим этих агентов по возрастанию их номера в исходном упорядочении. В результате получим

$$y_{j_1}^{\max} \le y_{j_2}^{\max} \le \ldots \le y_{j_n}^{\max}.$$

Пусть выполнены предположения А.1, А.2, В.1 и В.2. Тогда:

а) существует РБС, такое, что: $\forall\, i \ne j_n \quad y_i^* = 0$;

(9) $y_{j_n}^* = \arg \max\limits_{y \in [y_{j_{n-1}}^{\max};\, y_{j_n}^{\max}]} [H(y) - c_{j_n}(y)]$.

б) равновесию соответствует результат $x^* = y^*_{j_n}$ [12].

Итак, в первой главе проведен краткий обзор моделей систем стимулирования. Приведенные результаты будут использованы ниже при анализе тарифно-премиальных систем оплаты труда.

2. Задача синтеза оптимальной тарифно-премиальной системы оплаты труда

Имея результаты исследования моделей систем оплаты труда, можно детализировать сделанные выводы на примере рассмотрения такой широко распространенной на практике системы стимулирования как тарифно-премиальная система оплаты труда. В ее рамках вознаграждение агентов складывается из двух частей: тарифной (компенсационная составляющая), которая зависит от тарифного разряда агента, и премиальной (мотивационная составляющая), зависящая от результатов деятельности агента в соотношении с результатами деятельности его коллег. В последнем случае, как правило, фиксированный премиальный фонд распределяется между агентами в зависимости от результатов их деятельности.

Правила распределения премиального фонд могут быть различными – в их основу могут быть положены описанные выше пропорциональные, или бригадные, или ранговые системы стимулирования. Такие системы оплаты труда часто встречаются на практике при определении премий (надбавок, доплат и т.д.) как в производственных коллективах, так и в научных или образовательных организациях. Перейдем к описанию соответствующей общей формальной модели.

2.1. Общая постановка задачи

Рассмотрим модель n-агентной ОС, в которой деятельность i-го агента, характеризуемого типом $r_i > 0$, описывается его скалярным действием $y_i \geq 0$, $i \in N = \{1, 2, ..., n\}$ – множеству агентов. Обозначим тарифную составляющую заработной платы $t(r_i)$, премиальный фонд – $R \geq 0$.

А.4. Относительно функции затрат i-го агента $c_i(y_i, r_i)$ предположим, что она зависит только от его собственного действия и является гладкой, выпуклой и неубывающей по *действию* y_i, невозрастающей по *типу* r_i функцией, то есть $c_y > 0,\ c_{yy} \geq 0,\ c_r < 0$ и $c_{ry} \leq 0$.

А.5. Относительно типов агентов (эффективностей их деятельности) будем считать, что агенты упорядочены по их возрастанию: $r_1 \leq r_2 \leq \ldots \leq r_n$.

А.6. Относительно тарифной составляющей заработной платы предположим, что она является кусочно-постоянной неубывающей (прогрессивной), непрерывной справа функцией.

В рамках предположения А.6 прогрессивная тарифная система оплаты труда описывается кортежем

$$\wp = \{w,\ 0 = v_1 \leq v_2 \leq \ldots \leq v_w,\ q_1 \leq q_2 \leq \ldots \leq q_w\},$$

где w – число тарифных разрядов (см. также модели НРСС выше), а размер вознаграждения в зависимости от типа агента (его квалификации) определяется следующим образом (см. Рис. 7):

$$t(r_i) = \max_{\{j=\overline{1,w} \mid r_i \geq v_j\}} q_j,\ i \in N.$$

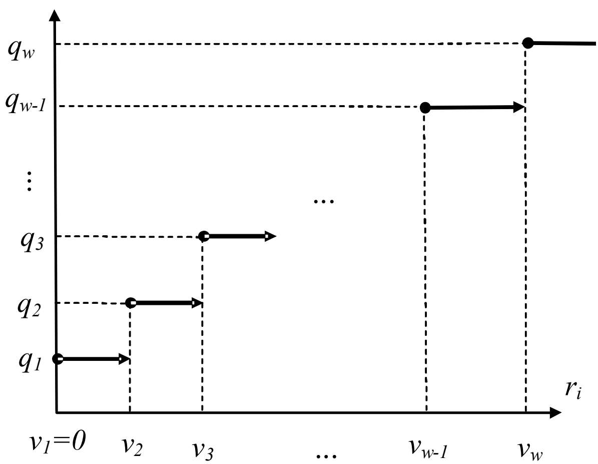

Рис. 7. Тарифная система оплаты труда

Премиальную составляющую заработной платы i-го агента обозначим $\pi_i(y)$, $i \in N$, где $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \Re^n_+$ – вектор действий агентов.

Таким образом, вознаграждение i-го агента, складывающееся из тарифной и премиальной составляющих, имеет вид:

$$\sigma_i(y, r_i) = t(r_i) + \pi_i(y),\ i \in N.$$

Введем ограничение резервной полезности $u(\cdot)$, которое определяет минимальное значение целевой функции агента (в зависимости от его типа), которое должно быть ему обеспечено, то есть $u(r_i)$ – *резервная полезность* i-го агента, $i \in N$.

Обозначим $r = (r_1, r_2, ..., r_n)$ – вектор типов агентов, $\pi(y) = (\pi_1(y), \pi_2(y), ..., \pi_n(y))$ – вектор-функцию премиального стимулирования.

Целевая функция i-го агента имеет вид:

(1) $f_i(y, \pi_i(\cdot), t(\cdot), r_i) = t(r_i) + \pi_i(y) - c_i(y_i, r_i),\ i \in N.$

Целевая функция центра имеет вид:

(2) $\Phi(y, \pi(\cdot), t(\cdot), r) = H(y) - \sum_{i \in N} \pi_i(y) - \sum_{i \in N} t(r_i)$.

Пусть $P(r, \pi(\cdot))$ – множество равновесий Нэша игры агентов при заданной тарифно-премиальной системе стимулирования (отметим, что оно не зависит от тарифной составляющей – см. выражение (1)); $S(r, R) = \{\pi(\cdot) \mid \forall\, y \in P(r, \pi(\cdot)) \mid \sum_{i \in N} \pi_i(y) \le R\}$ – множество премиальных систем стимулирования, таких что для любого соответствующего равновесного вектора действий агентов суммарное премиальное стимулирование не превышает премиального фонда;

$$U(r, \pi(\cdot), t(\cdot)) = \{y \in \Re^n_+ \mid t(r_i) + \pi_i(y) - c_i(y_i, r_i) \ge u(r_i),\ i \in N\}$$

– множество векторов действий агентов, при которых значения их целевых функций удовлетворяют ограничениям резервной полезности.

Эффективность тарифно-премиальной системы стимулирования определим как гарантированное значение целевой функции центра на множестве решений игры агентов:

(3) $K(t(\cdot), \pi(\cdot), r) = \min_{y \in P(r, \pi(\cdot)) \cap U(r, \pi(\cdot), t(\cdot))} [H(y) - \sum_{i \in N} \pi_i(y) - \sum_{i \in N} t(r_i)]$.

Общая постановка задачи синтеза оптимальной тарифно-премиальной системы стимулирования имеет вид:

(4) $K(t(\cdot),\ \pi(\cdot),\ r) \to \max\limits_{\pi(\cdot)\in S(r,R),\, t(\cdot),\, R\geq 0}$,

то есть, требуется найти оптимальные (с точки зрения критерия эффективности (3)) тарифные выплаты $t(\cdot)$, премиальный фонд R и правила его распределения (премиальную систему стимулирования $\pi(\cdot)$), которые обеспечивали бы всем агентам в равновесии заданную резервную полезность.

В качестве отступления отметим, что, умея решать задачу (4) или ее упрощенные модификации, можно ставить и решать *задачи синтеза оптимального состава* организационной системы (определения набора включаемых в нее агентов) по аналогии с тем, как это делается в [15, 22]. Ряд частных примеров решения задачи оптимизации состава ОС приведен ниже.

Задачу (4) вряд ли можно решить в общем виде. Обычно на практике ее решение разбивается на несколько этапов.

Первым этапом является задача синтеза тарифной составляющей системы стимулирования. Необходимость ее решения может и отсутствовать, так как во многих государственных организациях используются установленные законом унифицированные тарифные системы оплаты (примеры – единая тарифная сетка, отраслевые системы оплаты труда и др.). Если все же выбор тарифной составляющей является прерогативой организации, то для решения этой задачи (отдельно от задачи выбора премиальной составляющей) могут быть использованы описанные выше методы поиска оптимальных систем стимулирования С-типа или нормативных ранговых систем стимулирования.

Вторым этапом является выбор премиальной составляющей оплаты труда при фиксированной тарифной составляющей и фиксированном размере премиального фонда. Эта задача подробно рассматривается ниже.

И, наконец, третьим этапом является выбор оптимального размера премиального фонда. Эта задача (при известных результатах первых двух этапов) обычно решается достаточно легко.

Иногда размер премиального фонда фиксирован априори, тогда третий этап пропускают. Иногда второй и третий этап совмещают, не акцентируя внимания на размере суммарного премиального фонда, а получая его «автоматически» в процессе решения.

А.7. Относительно функции дохода центра для простоты предположим, что $H(y) = \sum_{i \in N} y_i$.

Если тарифная составляющая фиксирована и фиксирован премиальный фонд R, то в рамках предположения А.7 целевая функция центра имеет вид:

(5) $\Phi(y, \pi(\cdot), t(\cdot), r) = \sum_{i \in N} y_i - R.$

Эффективность премиальной системы стимулирования может быть определена как

(6) $K_\pi(\pi(\cdot), R, r) = \min_{y \in P(r, \pi(\cdot)) \cap U(r, \pi(\cdot))} [\sum_{i \in N} y_i - R],$

а задача (4) примет вид

(7) $K_\pi(\pi(\cdot), R, r) \to \max_{\pi(\cdot) \in S(r, R)}$.

Обозначим $\pi^*(\cdot, r, R)$ – решение задачи (7). Тогда оптимальный размер премиального фонда равен

(8) $R^*(r) = \arg \max_{R \geq 0} \min_{y \in P(r, R, \pi^*(\cdot, r, R)) \cap U(r, R, \pi^*(\cdot, r, R))} [\sum_{i \in N} y_i - R].$

Рассмотрим ряд классов тарифно-премиальных систем стимулирования, для которых решим задачу (4) и/или (7). Так как в большинстве случаев тарифная составляющая будет считаться фиксированной, то основной акцент ниже делается на тех или иных премиальных системах стимулирования. Но сначала попытаемся решить задачу (4) в максимально общем виде.

2.2. Компенсаторная премиальная система стимулирования

Будем искать премиальную составляющую оплаты труда i-го агента в виде «компенсаторной» системы стимулирования (см. также раздел 1.3):

(1) $\pi_{Ki}(y_i) = \begin{cases} a_i, & y_i \geq x_i \\ 0, & y_i < x_i \end{cases}$,

где $x_i \geq 0$ – план i-го агента, за выполнение которого ему выплачивается премия a_i, $i \in N$. Отметим, что система стимулирования (1) может также интерпретироваться и как скачкообразная (см. раздел

1.1), однако ее параметры будут искаться исходя из принципа компенсации затрат [23].

Для того чтобы задать систему стимулирования (1), необходимо для каждого из агентов определить значения двух параметров – плана и вознаграждения за его выполнение.

Обозначим $y_{-i} = (y_1, y_2, ..., y_{i-1}, y_{i+1}, ..., y_n)$ – *обстановку игры* для i-го агента. Запишем условие того, что выбор действий, совпадающих с планами, будет выгоден для агентов (является равновесием в доминантных стратегиях [10] их игры):

(2) $\forall\, i \in N,\ \forall\, y_{-i} \in \Re^{n-1}_+,\ \forall\, y_i \geq 0\ \ f_i(x_i, y_{-i}) \geq f_i(y_i, y_{-i})$.

Распишем с учетом (1) выражение (2) для i-го агента:

$$\forall\, y_{-i} \in \Re^{n-1}_+,\ \forall\, y_i \geq 0\ \ t(r_i) + a_i - c_i(x_i, r_i) \geq t(r_i) - c_i(y_i, r_i).$$

В силу сепарабельности затрат агентов и предположения А.4 получаем:

(3) $a_i \geq c_i(x_i, r_i) - c_i(0, r_i),\ i \in N$.

Так как вознаграждение, выплачиваемое агентам, входит в целевую функцию центра со знаком «минус», то, получаем, что, независимо от обстановки игры и независимо от тарифной составляющей размер премии должен обращать (3) в равенство, то есть:

(4) $a_i = c_i(x_i, r_i) - c_i(0, r_i),\ i \in N$.

Отметим, что сделанный вывод останется в силе даже при отказе от сепарабельности затрат – в соответствии с результатами, полученными в [23, 27], если предположение А.4 выполнено для любой обстановки игры, то для того, чтобы имело место (2), достаточно компенсировать агенту фактические затраты в случае выполнения плана:

$$\pi_{Ki}(y) = \begin{cases} c_i(x_i, y_{-i}, r_i) - c_i(0, y_{-i}, r_i), & y_i = x_i \\ 0, & y_i \neq x_i \end{cases},\ i \in N.$$

Введем следующее предположение:

А.8. $u(\cdot)$ – неубывающая функция.

Содержательно данное предположение означает, что более квалифицированные работники характеризуются более высокой резервной полезностью.

Запишем условия обеспечения агентам резервной полезности в случае выполнения ими планов:

(5) $t(r_i) + a_i - c_i(x_i, r_i) \geq u(r_i),\ i \in N$.

Подставляя (4) в (5), получаем:

(6) $t(r_i) \geq c_i(0, r_i) + u(r_i),\ i \in N$.

Система неравенств (6) не зависит от планов (премиальной составляющей стимулирования), а, так как центр заинтересован в минимизации выплат агентам, получаем, что оптимальная тарифная составляющая имеет вид:

(7) $t(r_i) = c_i(0, r_i) + u(r_i),\ i \in N$.

Отметим, что оптимальное решение (7) в некотором смысле вырожденное – **центр вынужден устанавливать тарифную составляющую оплаты труда каждого агента в зависимости от его резервной полезности и минимальных затрат**. Интересно отметить, что в случае, когда минимальные затраты агентов равны нулю, тарифная составляющая оплаты труда каждого агента в точности равна его резервной полезности.

Осталось найти оптимальные планы. Обозначим $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – вектор планов, $x \in \Re^n_+$.

Целевая функция центра с учетом (4) и (7) имеет вид:

(8) $\Phi(x) = H(x) - \sum_{i \in N} c_i(x, r_i) - \sum_{i \in N} u(r_i)$.

Оптимальным будет план, максимизирующий целевую функцию центра (8). Таким образом, мы обосновали справедливость следующего утверждения.

<u>Утверждение 1.</u> Пусть выполнены предположения А.4-А.6 и А.8. Тогда оптимальная тарифно-премиальная система стимулирования имеет вид:

(9) $w = n,\ v_i = r_i,\ q_i = c_i(0, r_i) + u(r_i),\ i \in N$.

(10) $\pi_{Ki}(y_i) = \begin{cases} c_i(x_i^*, r_i) - c_i(0, r_i), & y_i \geq x_i^* \\ 0, & y_i < x_i^* \end{cases},\ i \in N$,

где

(11) $x^* = \arg\max_{x \in \Re^n_+} [H(x) - \sum_{i \in N} c_i(x, r_i)]$.

Введем следующее предположение.

А.9. $c_i(y_i, r_i) = \frac{1}{\gamma}\ (y_i)^\gamma (r_i)^{1-\gamma},\ \gamma \geq 1,\ i \in N$.

Утверждение 2. Пусть выполнены предположения А.4-А.9. Тогда оптимальная тарифно-премиальная система стимулирования имеет вид: (10),

(12) $w = n,\ v_i = r_i,\ q_i = u_i(r_i),\ i \in N.$

(13) $x_i^* = r_i,\ i \in N,$

а ее эффективность (максимальный выигрыш центра) равна

(14) $K_K = \dfrac{\gamma - 1}{\gamma}\ H - \sum_{i \in N} u(r_i)$,

где $H = \sum_{i \in N} r_i$.

Из (14) следует, что **эффективность тарифно-премиальной системы стимулирования пропорциональна сумме типов агентов** (величина H условно может интерпретироваться как суммарная эффективность деятельности коллектива агентов) **и убывает с увеличением резервной полезности**. Этот общий вывод остается в силе и при использовании центром других премиальных систем стимулирования – см. ниже.

Подчеркнем, что все результаты получены для случая фиксированного набора агентов с вектором типов r и известными функциями затрат.

Во-первых, при достаточно больших значениях резервной полезности может оказаться, что выигрыш центра (14) отрицателен, то есть ему невыгодно нанимать на работу данный коллектив агентов (обычно считается, что в случае отказа от взаимодействия центр получает нулевой выигрыш). Условие выгодности взаимодействия центра с агентами ($K_K \geq 0$) можно записать в виде:

(15) $(\gamma - 1) \sum_{i \in N} r_i \ \geq \gamma \sum_{i \in N} u(r_i)$.

Например, для однородных (одинаковых) агентов с типом r_0 условие (15) примет вид:

(16) $\dfrac{u(r_0)}{r_0} \leq \dfrac{\gamma - 1}{\gamma}$.

Рассмотрим задачу синтеза оптимального состава организационной системы – выбора агентов, которых следует включать в ОС.

Пусть задано множество $N_0 = \{1, 2, ..., n_0\}$ агентов – претендентов на участие в ОС – с типами $r_1 \leq r_2 \leq ... \leq r_{n0}$ соответственно.

В общем случае задача синтеза оптимального состава организационной системы имеет вид: найти подмножество N множества N_0, максимизирующее целевую функцию центра, представляющую собой разность между доходом $h(N)$ от вектора $x_N = \{x_i\}_{i \in N}$ деятельности агентов из множества N и затратами на их стимулирование:

$$\Phi_0(N) = h(N) - \sum_{i \in N} c_i(x_N, r_i) - \sum_{i \in N} u(r_i) \to \max_{x_N \in \Re_+^N,\, N \subseteq N_0},$$

при выполнении условий ограниченности премиального фонда R:

$$\sum_{i \in N} [c_i(x_i^*, r_i) - c_i(0, r_i)] \le R,$$

и, быть может, условий обеспечения агентам, не включаемым в ОС, некоторой резервной полезности $u_0(\cdot)$ при ограниченном резервном фонде R_0:

$$\sum_{i \in N_0 \setminus N} u_0(r_i) \le R_0.$$

Отметим, что ограниченность премиального фонда и затраты на выплаты не включаемым в состав ОС агентам, могут быть учтены в целевой функции центра по аналогии с тем, как это делалось выше.

В рамках предположений А.4-А.9 из (14) следует, что задача синтеза оптимального состава ОС заключается в нахождении подмножества множества N_0, максимизирующего (14), то есть:

$$(17)\quad \frac{\gamma - 1}{\gamma} \sum_{i \in N} r_i - \sum_{i \in N} u(r_i) \to \max_{N \subseteq N_0}.$$

Обозначим N^* – решение задачи (17), которая в общем случае является задачей дискретной оптимизации. В ряде частных случаев, описываемых следующим утверждением, удается получить аналитическое ее решение.

Утверждение 3. Пусть выполнены предположения А.4-А.9. Тогда

а) в случае однородных агентов, если имеет место (16), то $N^* = N_0$, в противном случае $N^* = \varnothing$;

б) если резервная полезность u_0 одинакова для всех агентов, то в ОС следует включать всех агентов, кроме тех, тип которых меньше, чем $\gamma u_0 / (\gamma - 1)$.

Пункт а) утверждения 3 можно усилить: максимальный состав будет оптимален ($N^* = N_0$), если $\forall\, i \in N_0\ \frac{u(r_i)}{r_i} \le \frac{\gamma - 1}{\gamma}$.

Итак, в настоящем разделе получено решение задачи синтеза оптимальной тарифно-премиальной системы стимулирования, которая оказалась принадлежащей классу компенсаторных. В последующих разделах второй главы рассматривается ряд других классов тарифно-премиальных систем стимулирования, эффективность которых сравнивается с эффективностью оптимальной.

2.3. Линейная премиальная система стимулирования

Пусть тарифная составляющая $t(\cdot)$ фиксирована, и центр использует *унифицированную* (одинаковую для всех агентов) линейную (L-типа) систему стимулирования

(1) $\pi_{Li}(y_i) = \alpha\, y_i,\ i \in N.$

Тогда агенты выберут следующие действия, максимизирующие их целевые функции, равные разности между стимулированием и затратами:

(2) $y_i^*(\alpha, r_i) = \xi_i(\alpha, r_i),\ i \in N,$

где $\xi_i(\cdot, r_i)$ – функция, обратная производной по y_i функции $c_i(y_i, r_i)$, $i \in N$.

В рамках предположения А.7 и без учета затрат центра на стимулирование, эффективность системы стимулирования (1) равна

(3) $K'_L(\alpha, r) = \sum_{i \in N} y_i^*(\alpha, r_i)$.

Пусть на систему стимулирования наложено ограничение, что она должна обеспечить i-му агенту резервную полезность $u(r_i)$, $i \in N$, которая может интерпретироваться как полезность, которую агент мог бы получить в другом месте (например, работая в другой организации или получая пособие по безработице) или как полезность, соответствующая прожиточному минимуму.

Решая задачу

$$(4)\quad \begin{cases} \sum_{i \in N} \xi_i(\alpha, r_i) \to \max_{\alpha \geq 0} \\ \alpha\ \xi_i(\alpha, r_i) - c_i(\xi_i(\alpha, r_i), r_i) \geq u(r_i) - t(r_i), i \in N, \\ \alpha \sum_{i \in N} \xi_i(\alpha, r_i) \leq R \end{cases}$$

получим оценку K'_L эффективности деятельности коллектива агентов, характеризуемого вектором типов $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$.

Если выполнено предположение А.9, то $y_i^*(\alpha, r_i) = r_i\ \alpha^{\frac{1}{\gamma - 1}}$, $i \in N$, $K'_L(\alpha, r) = \alpha^{\frac{1}{\gamma-1}}\ H$, где $H = \sum_{i \in N} r_i$, а задача (4) примет вид:

$$(5)\quad \begin{cases} \alpha^{\frac{1}{\gamma-1}} H \to \max_{\alpha \geq 0} \\ \alpha \geq \max_{i \in N} \left[\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{u(r_i) - t(r_i)}{r_i} \right]^{1 - \frac{1}{\gamma}} \\ \alpha \leq \left[\frac{R}{H} \right]^{1 - \frac{1}{\gamma}} \end{cases}.$$

<u>Утверждение 4.</u> Если выполнены предположения А.4, А.7 и А.9, то задача (5) имеет решение, если

$$(6)\quad H \frac{\gamma}{\gamma - 1} \max_{i \in N} \left[\frac{u(r_i) - t(r_i)}{r_i} \right] \leq R;$$

при этом

$$(7)\quad K'_L = H^{1 - \frac{1}{\gamma}} R^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Условие (6) имеет прозрачную содержательную интерпретацию – премиального фонда R, совместно с тарифной оплатой труда, в равновесии должно хватать на обеспечение резервной полезности агентов.

Подчеркнем, что эффективности K_K (см. выражение (14) раздела 2.2) и K'_L несравнимы, так как первая определялась как разность между суммой действий агентов и стимулированием, а вторая – просто как сумма действий агентов. Из выражения (13) раздела 2.2 следует, что при использовании центром оптимальной компенсаторной тарифно-премиальной системы стимулирования сумма действий агентов равна величине H. Если выбор тарифной составляющей оплаты труда является прерогативой центра, то в соответствии с выражением (7) раздела 2.2 получаем, что, когда тарифная составляющая в точности равна резервной полезности, то (6) выполнено всегда.

Оптимальный размер премиального фонда R^* может быть найден из максимизации разности между выражением (7) и R. Получаем:

$$(8)\ R^* = \arg\max_{R \geq 0}\ [H^{1-\frac{1}{\gamma}} R^{\frac{1}{\gamma}} - R] = H\,\gamma^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}.$$

Тогда эффективность линейной премиальной системы стимулирования равна

$$(9)\ K_L = H\,\gamma^{\frac{1}{1-\gamma}}\ \frac{\gamma - 1}{\gamma} - \sum_{i \in N} u(r_i).$$

<u>Утверждение 5.</u> Пусть выполнены предположения А.4-А.9. Тогда

$$K_K - K_L = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\ H\,(1 - \gamma^{\frac{1}{1-\gamma}}) \geq 0.$$

То есть, эффективность оптимальной линейной тарифно-премиальной системы стимулирования не выше эффективности оптимальной компенсаторной тарифно-премиальной системы стимулирования.

<u>Пример 1.</u> Пусть $\gamma = 2,\ t = 0,\ u_i(r_i) = u$ (или $u(\cdot)$ – убывающая функция) и выполнено предположение А.5. Тогда (6) имеет вид $R \geq 2\,H\,u\,/\,r_1$, и $K'_L = \sqrt{RH}$. При этом $R^* = H\,/\,4$, а $K_K - K_L = H$.

Видно, что в рассматриваемом примере с ростом резервной полезности и уменьшением эффективности наименее производительного сотрудника премиальный фонд должен расти. Кроме того, как и в случае компенсаторной тарифно-премиальной системы стимулирования, эффективность K_L линейной тарифно-премиальной системы стимулирования пропорциональна сумме типов агентов и убывает с увеличением резервной полезности. •[1]

---

[1] *Символ «•» здесь и далее обозначает окончание примера или доказательства.*

2.4. Аккордная (соревновательная) премиальная система стимулирования

Пусть система стимулирования такова, что центр устанавливает минимальный «норматив» – план $x \geq 0$ – значение результата деятельности, за достижение (и превышение) которого агент получает фиксированное вознаграждение $g(R, q(x)) = R / q(x)$, где $q(x) \in \overline{1,n}$ – число агентов, выполнивших план x, R – премиальный фонд.

Из предположения А.4 следует, что перевыполнять план агентам не выгодно, поэтому каждый агент должен принять решение, выгодно ли ему выполнение плана при заданной аккордной премиальной системе стимулирования (если выполнение плана невыгодно, то агент выбирает нулевое действие, минимизирующее его затраты).

Введем следующие предположения.

А.10. $\forall\, i \in N \;\; c_i(0, r_i) = 0.$

А.11. $\forall\, i = \overline{1,n-1},\;\; \forall\, y \geq 0 \;\; c_i(y, r_i) > c_{i+1}(y, r_{i+1}).$

А.12. $r_1 < r_2 < \ldots < r_n.$

Отметим, что из А.12 следует А.5, из А.11 следует А.3, из А.9 и А.12 следует А.10 и А.11.

Обозначим $m(x)$ – число агентов выполняющих в равновесии Нэша их игры план x, $M(x) \subseteq N$ – множество таких агентов.

Утверждение 6. Если выполнены предположения А.4, А.8 и А.10-А.12, а тарифная составляющая определяется выражением (9) раздела 2.2, то одно из равновесий Нэша есть:

(1) $M(x) = \{n, n - 1, \ldots, n - m(x) + 1\}$,

где $m(x)$ таково, что

(2) $c_{n-m(x)+1}(x) \leq R / m(x)$,

(3) $c_{n-m(x)}(x) > R / (m(x) + 1)$.

Докажем сначала, что одно из равновесий Нэша игры агентов таково, что план x выполняют первые $m(x)$ агентов в их упорядочении по возрастанию затрат (убыванию типов) – см. выражение (1). Любой агент из множества $M(x)$ в силу (2) и А.10-А.12 получает неотрицательный выигрыш. При одностороннем отклонении от равновесия (невыполнении плана) он получит в силу А.10 нулевой выигрыш. Значит отклонение ему не выгодно. Любой агент из множества $N \setminus M(x)$ получает в силу А.10 нулевой выигрыш. При выполнении плана в силу (3) и А.11-А.12 его выигрыш станет строго отрицательным. Значит и ему отклонение не выгодно.

Исследуем, существуют ли другие равновесия Нэша. Для любого равновесия (характеризуемого множеством $M(x)$ агентов, выполняющих план) должно выполняться

(4) $\max\limits_{i \in M(x)} c_i(x) \le R / |M(x)|$,

(5) $\forall j \in N \setminus M(x) \;\; c_j(x) > R / (|M(x)| + 1)$.

Итак, равновесием Нэша является выполнение плана агентами из любого множества $M(x)$, удовлетворяющего (4) и (5). Множество (1) при этом является частным случаем.

Исследуем теперь множество РБС. Агент $j \in N \setminus M(x)$ угрожает агенту $i \in M(x)$, если

(6) $R / (|M(x)| + 1) < c_i(x) \le R / |M(x)|$

и

(7) $c_j(x) \le R / (|M(x)| + 1)$.

Выражение (6) выполнено всегда, когда имеет место (4). Отрицанием (7) является (5), поэтому в рассматриваемом случае множество равновесий Нэша совпадает со множеством РБС (напомним, что в [14] доказано, что любое строгое равновесие Нэша является РБС). •

Утверждение 7. Если выполнены предположения А.9 и А.12, то равновесие имеет вид:

(8) $$\frac{r_{n-m(x)+1}}{A(x,r)} \le [m(x)]^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

(9) $$\frac{r_{n-m(x)}}{A(x,r)} > [m(x)+1]^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

где $A(x, r) = (\gamma \; R \; x^{-\gamma})^{\frac{1}{\gamma-1}}$, а эффективность унифицированной аккордной тарифно-премиальной системы стимулирования равна

(10) $$K_{UA} = \max_{x \ge 0,\, R \ge 0} \; [m\,(x, R)\, x - R] - \sum_{i \in N} u(r_i).$$

Существенным недостатком аккордной тарифно-премиальной системы стимулирования, рассмотренной выше, является то, что при ее использовании центром существует множество равновесий

Нэша игры агентов (см. (4) и (5)). То есть, априори предсказать исход игры агентов затруднительно. Равновесие (1) является в некотором смысле «фокальным» [10, 44] – в нем планы выполняют, в первую очередь, агенты, характеризуемые минимальными затратами; и можно предположить, что именно в этом равновесии число агентов, выполняющих план, максимально. Содержательно, множественность равновесий Нэша обусловлена тем, что система стимулирования является *унифицированной* [23] – план одинаков для всех агентов, и премиальный фонд распределяется поровну между всеми агентами, выполнившими план.

Поэтому рассмотрим персонифицированную систему стимулирования, в которой i-му агенту назначается план $x_i \geq 0$, за выполнение которого он получает вознаграждение, равное части (одинаковой для всех премируемых агентов) премиального фонда, определяемой числом агентов, выполнивших свои планы. Такая система стимулирования является частным случаем системы стимулирования С-типа (см. раздел 1.3), отличаясь от нее тем, что размер вознаграждения за выполнение плана одинаков для всех агентов. Поэтому она в общем случае имеет эффективность, не превышающую эффективности системы стимулирования С-типа.

Предположим, что центр хочет, чтобы множество агентов, выполняющих план, составляло $M = \{n, n - 1, \dots, n - m + 1\}$, где $m \in N$ фиксировано. Для этого вектор планов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ должен удовлетворять следующим условиям:

(11) $c_i(x_i, r_i) \leq R / m,\ i \in M$,

(12) $c_j(x_j, r_j) > R / (m + 1),\ j \in n \setminus M$.

Для выполнения (12) в рамках предположения А.4 и строгой монотонности функций затрат по действиям агентов достаточно выбрать планы следующим образом:

(13) $x^*_j = c_j^{-1}(R / (m + 1)) + \varepsilon,\ j = \overline{1, n - m}$,

где ε – произвольная сколь угодно малая строго положительная константа.

Максимальный план, который выполнит i-ый агент из множества M, равен

(14) $x^*_i = c_i^{-1}(R / m),\ i = \overline{n - m + 1, n}$.

Получаем, что справедливо следующее утверждение.

Утверждение 8. а) Если выполнены предположения А.4, А.7, А.10 и А.12, то эффективность аккордной тарифно-премиальной системы стимулирования равна

$$(15)\ K_A = \max_{m=\overline{1,n},\ R\ge 0}\ [\sum_{i=n-m+1}^{n} c_i^{-1}(R/m) - R] - \sum_{i\in N} u(r_i)\,.$$

б) Если выполнены предположения А.9 и А.12, то оптимальный размер премиального фонда равен

$$(16)\ R^*(m) = \frac{\left[\sum_{i=n-m+1}^{n} r_i^{1-\frac{1}{\gamma}}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\gamma^{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)^2} m^{\frac{1}{\gamma-1}}},$$

а оптимальное число агентов m^*, выполняющих план, равно

$$(17)\ m^* = \arg\max_{m=\overline{1,n}} \frac{\left[\sum_{i=n-m+1}^{n} r_i^{1-\frac{1}{\gamma}}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{m^{\frac{1}{\gamma-1}}}$$

Пример 2. Пусть $\gamma = 2,\ t = 0,\ u_i(r_i) = u$ (или $u(\cdot)$ – убывающая функция) и выполнено предположение А.5. Тогда (16) и (17) имеют вид: $R^*(m) = \dfrac{\left[\sum_{i=n-m+1}^{n}\sqrt{r_i}\right]^2}{\sqrt[4]{2}\ m}$ и $m^* = \arg\max_{m=\overline{1,n}} \dfrac{\left[\sum_{i=n-m+1}^{n}\sqrt{r_i}\right]^2}{m}$. •

Легко видеть, что имеют место следующие оценки сравнительных эффективностей различных тарифно-премиальных систем стимулирования: $K_K \ge K_A$, $K_A \ge K_{UA}$.

В заключение настоящего раздела отметим, что на практике иногда встречается премиальная система оплаты труда, в которой заданы размеры вознаграждений фиксированного числа победителей в соревновании агентов по достижению максимальных результатов деятельности. Такая система стимулирования является частным случаем соревновательной ранговой системы стимулирования, рассмотренной выше в разделе 1.5, поэтому исследовать ее подробно мы не будем.

2.5. Бригадная премиальная система стимулирования

Пусть выполнены предположения А.4 и А.6-А.9. Рассмотрим случай, когда тарифная составляющая определяется выражением (9) раздела 2.2, и центр использует бригадную премиальную систему стимулирования, в рамках которой премиальный фонд делится пропорционально действиям агентов [13]:

(1) $\sigma_{iB}(y) = R \dfrac{(y_i)^\gamma}{\sum_{j \in N} (y_j)^\gamma}$, $i \in N$.

Целевая функция центра равна

(2) $\Phi_B(R) = \sum_{i \in N} y_i - R - \sum_{i \in N} u(r_i)$.

Найдем равновесие Нэша игры агентов с целевыми функциями

(3) $f_i(y, r_i) = t(r_i) + R \dfrac{(y_i)^\gamma}{\sum_{j \in N} (y_j)^\gamma} - (y_i)^\gamma (r_i)^{1-\gamma} / \gamma$, $i \in N$.

Получим:

(4) $y_i^* = [Q - \dfrac{Q^2}{R\gamma} b_i]^{1/\gamma}$, $i \in N$,

где $Q = \dfrac{R(n-1)\gamma}{\sum_{i \in N} b_i}$, $b_i = \dfrac{1}{(r_i)^{\gamma - 1}}$, $i \in N$.

Утверждение 9. Если выполнены предположения А.4 и А.6-А.9, то оптимальный размер премиального фонда равен

(5) $R^* = \arg \max\limits_{R \geq 0} \; [R^{1/\gamma} (\dfrac{(n-1)\gamma}{\sum_{i \in N} b_i})^{1/\gamma} \sum_{j \in N} \left[1 - \dfrac{(n-1) b_j}{(\sum_{k \in N} b_k)^2} \right] - R]$,

а эффективность (2) бригадной премиальную системы стимулирования (1) равна

$$K_B = \frac{R^*(n-1)\gamma}{\sum_{i \in N} b_i} - R^* - \sum_{i \in N} u(r_i).$$

2.6. Сравнительная эффективность премиальных систем стимулирования

Итак, выше были рассмотрены компенсаторная, линейная, аккордная и бригадная тарифно-премиальные системы стимулирования. Тарифные составляющие в них были одинаковы, отличались лишь премиальные составляющие систем оплаты труда. Результаты проведенного анализа позволяют сравнивать эффективности различных систем стимулирования между собой – см. Табл. 1, в которой на пересечении строки и столбца указано соотношение между эффективностями соответствующих систем стимулирования и приведены номера обосновывающих данное соотношение утверждений. Символ «≥» («≤») в ячейке означает, что эффективность системы стимулирования, соответствующей строке, всегда не ниже (не выше) эффективности системы стимулирования, соответствующей столбцу. Символ «?» означает, что в каждом конкретном случае сравнительная эффективность может быть оценена на основании перечисленных утверждений.

Табл. 1. Сравнительная эффективность тарифно-премиальных систем стимулирования

	Компенсаторная	Линейная	Аккордная	Бригадная
Компенсаторная	= утв. 1,2	≥ утв. 1, 2, 5	≥ утв. 1, 2, 8	≥ утв. 1, 2, 9
Линейная	≤ утв. 5	= утв. 4,5	? утв. 5, 8	? утв. 5, 9
Аккордная	≤ утв. 1, 2, 8	? утв. 5, 8	= утв. 8	? утв. 8, 9
Бригадная	≤ утв. 1, 2, 9	? утв. 5, 9	? утв. 8, 9	= утв. 9

Следует отметить, что сравнительная эффективность четырех описанных в Табл. 1 тарифно-премиальных систем стимулирования такая же, что и у соответствующих базовых систем стимулирования – см. [17, 23].

В заключение настоящего раздела исследуем роль резервной полезности.

Утверждение 10. Сравнительная эффективность тарифно-премиальной системы стимулирования не возрастает с ростом резервной полезности.

Целевая функция центра в общем случае равна разности между его доходом $H(y)$ от деятельности агентов и, во-первых, затратами на премирование агентов $\sigma(y)$, а, во-вторых – затратами на тарифные выплаты, которые, как установлено выше, должны обеспечивать агентам резервную полезность u (для простоты будем считать, что агенты однородны):

(1) $\Phi(y, u) = H(y) - \sigma(y) - u$.

Если сравнительная эффективность Δ премиальной системы стимулирования $\sigma(\cdot)$ вычисляется как отношение выигрыша центра к его выигрышу при использовании оптимальной компенсаторной премиальной системы стимулирования $\sigma_K(\cdot)$, то

(2) $\Delta = \dfrac{H(y) - \sigma(y) - u}{H(y) - \sigma_K(y) - u}$.

Вычислим

$$\frac{\partial \Delta}{\partial u} = \frac{\sigma_K(y) - \sigma(y)}{[H(y) - \sigma_K(y) - u]^2}.$$

Из результатов исследования базовых систем стимулирования [17, 23] известно, что минимальные затраты центра по реализации любого действия агента достигаются при использовании компенсаторной системы стимулирования. Значит $\sigma_K(y) \le \sigma(y)$, то есть $\dfrac{\partial \Delta}{\partial u} \le 0$, что и требовалось доказать. •

3. Индивидуальные различия агентов

Выше при постановке и решении задачи синтеза тарифно-премиальной системы оплаты труда индивидуальной характеристикой агента являлся его тип – параметр, отражающий все существенные свойства агента. Содержательными интерпретациями типа являлись: эффективность деятельности, продуктивность, производительность труда и т.д. Считалось, что агенты упорядочены по возрастанию типов, а их затраты убывают с ростом типа, поэтому упорядочение соответствовало и убыванию затрат.

Решение задачи стимулирования во второй части настоящей работы было получено для произвольных векторов типов агентов. Однако, с одной стороны, на практике часто встречаются ситуации, когда агенты распределены по типам (в статистическом смысле) вполне определенным образом, зависящим от конкретной прикладной задачи (отрасли народного хозяйства, вида деятельности и т.д.). Учет этой специфики может повысить эффективность стимулирования.

С другой стороны, иногда требуется использовать унифицированную систему стимулирования (одинаковую для всех агентов зависимость между результатом деятельности и размером вознаграждения). Эффективность унифицированного стимулирования (как частного случая стимулирования вообще) не выше, чем персонифицированного, в рамках которого для каждого агента может быть установлена собственная зависимость между его результатом и размером вознаграждения. То есть, учет распределения агентов по типам (учет их индивидуальных различий) становится еще более актуальным.

Поэтому третья часть настоящей работы посвящена учету индивидуальных различий агентов. Для описания индивидуальных различий предлагается использовать распределение Парето (см. раздел 3.1). Исследуется связь формальной модели индивидуальных различий с задачей стимулирования (раздел 3.3), ставятся и решаются задачи стимулирования разнородного коллектива агентов в условиях полной информированности (раздел 3.4), а также в условиях внешней (раздел 3.2) и внутренней (раздел 3.5) вероятностной неопределенности. Заключительный раздел (раздел 3.6) содержит постановку и решение задачи оптимизации состава организационной системы, включающей разнородных агентов.

3.1. Распределение Парето

Известен так называемый *закон Парето* (иногда его называют «закон 80 / 20», на жаргоне – «пивной закон», в соответствии с которым 20 % людей выпивают 80 % пива), отражающий неравномерность распределения характеристик экономических и социальных явлений и процессов [18]:

- 20 % населения владеют 80 % капиталов (первоначальная формулировка самого В. Парето [45], см. также обзор современных моделей в [40]);
- 80 % стоимости запасов на складе составляет 20 % номенклатуры этих запасов;
- 80 % прибыли от продаж приносят 20 % покупателей;
- 20 % усилий приносят 80 % результата;
- 80 % проблем обусловлены 20 % причин;
- за 20 % рабочего времени работники выполняют 80 % работы;
- 80 % работы выполняют 20 % работников и т.д.

«Формализацией» закона Парето является *распределение Парето* случайной величины $z \geq z_0 > 0$, характеризуемое двумя параметрами – минимально возможным значением z_0 и показателем степени $\alpha > 0$:

(1) $p(\alpha, z_0, z) = \dfrac{\alpha}{z_0}\left(\dfrac{z_0}{z}\right)^{1+\alpha}$.

Плотности распределения (1) соответствует интегральная функция распределения

(2) $F(\alpha, z_0, z) = 1 - \left(\dfrac{z_0}{z}\right)^{\alpha}$.

Эскиз плотности и интегральной функции распределения для случая $z_0 = 1$, $\alpha = 2$ приведен на Рис. 8.

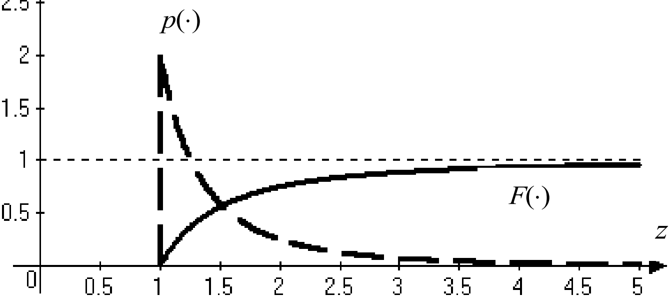

Рис. 8. Распределение Парето

Распределение Парето обладает свойством самоподобия: распределение значений, превышающих величину $z^0 \geq z_0$, также является распределением Парето:

(3) $\forall z^0 \geq z_0 \;\; p(\alpha, z^0, z) = p(\alpha, z_0, z) \,/\, (1 - F(\alpha, z_0, z^0)) = \dfrac{\alpha}{z^0}\left(\dfrac{z^0}{z}\right)^{1+\alpha}$.

Можно вычислить вероятность того, что случайная величина принадлежит заданному диапазону $[z_1; z_2]$, где $z_1 \geq z_0$:

(4) Prob $\{z \in [z_1; z_2]\} = F(\alpha, z_0, z_1) - F(\alpha, z_0, z_2) =$

$= [z_1 \, p(\alpha, z_0, z_1) - z_2 \, p(\alpha, z_0, z_2)] \,/\, \alpha$.

Для распределения Парето существуют только моменты, порядка, меньшего, чем степень α. Например, математическое ожидание случайной величины z с распределением (1) существует при $\alpha > 1$ и равно

(5) $E\,z = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1} \, z_0$,

где «E» – символ математического ожидания. Отметим, что с ростом α распределение «вырождается» и математическое ожидание (5) стремится к z_0. Это свойство распределения Парето используется в следующих разделах для иллюстрации принципа соответствия – при предельном переходе от случая вероятностной неопределенности к детерминированному случаю.

Кроме того, в рамках предположения о том, что случайная величина распределена по Парето, зная математическое ожидание Ez и минимальное значение z_0, можно легко вычислить параметр распределения α (см. (5)): $\alpha = \dfrac{Ez}{Ez - z_0}$.

Приведем формальную интерпретацию «закона 80 / 20». Определим вероятность того, что значение случайной величины, распределенной по Парето, меньше математического ожидания:

(6) Prob $\{z \leq Ez\} = \left(\dfrac{\alpha - 1}{\alpha}\right)^{\alpha}$.

Для того чтобы эта вероятность равнялась 0,8 (80 %) показатель степени α должен быть равен $1{,}545556$. Если $\alpha = 2$, то Prob $\{z \leq Ez\} = 0{,}25$, что соответствует «закону 75 / 25».

3.2. Задача стимулирования в условиях внешней неопределенности

Обзор и общая постановка задачи. Выше рассматривались детерминированные задачи стимулирования, в которых и центр, и агенты принимали решения в условиях полной информированности обо всех существенных параметрах. Сделаем отступление и решим задачу стимулирования, в которой присутствует *внешняя вероятностная неопределенность* – результат деятельности агента является случайной величиной, распределение которой зависит от его действия (термин «внешняя неопределенность» используется потому, что обычно считают, что результат деятельности агента определяется его действием и внешними неопределенными факторами).

Подобные задачи являются предметом исследования в *теории контрактов* [32, 42] – разделе теории управления в социально-экономических системах, изучающем механизмы стимулирования в организационных системах, функционирующих в условиях внешней вероятностной неопределенности (см. монографию [24], посвященную задачам стимулирования в условиях неопределенности).

Базовой моделью теории контрактов является одноэлементная статическая задача стимулирования в организационной системе с внешней вероятностной неопределенностью и симметричной информированностью участников. Будем считать, что агент выбирает действие $y \geq 0$, которое под влиянием внешней среды приводит к реализации *результата деятельности* $z \geq 0$. Пусть задана плотность распределения вероятности $p(z, y)$ – вероятность реализации результата деятельности z при выборе агентом действия y.

Предположим, что на момент принятия решений участники (центр и агент) не знают результата деятельности, а имеют лишь информацию о распределении $p(z, y)$ и используют ожидаемую полезность для устранения неопределенности, то есть целевыми функциями участников являются математические ожидания соответствующих функций полезности: функции полезности центра

$$\tilde{\Phi}(z, y) = H(y) - \tilde{\sigma}(z)$$

и функции полезности агента

$$\tilde{f}(z, y) = \tilde{\sigma}(z) - c(y).$$

Порядок функционирования и информированность участников ОС следующие: центр сообщает агенту систему стимулирования $\tilde{\sigma}(z)$, то есть зависимость вознаграждения агента от результата его деятельности, после чего агент выбирает свое действие, ненаблюдаемое для центра[1]. Принципиально важно, что в рассматриваемой модели ни центр, ни агент на момент выбора своих стратегий не знают будущего значения результата деятельности.

Агент выберет действие из множества $P(\tilde{\sigma}(\cdot))$ действий, доставляющих максимум математическому ожиданию его функции полезности, то есть:

(1) $$P(\tilde{\sigma}(\cdot)) = \operatorname{Arg}\max_{y \geq 0} \left[\int \tilde{\sigma}(z) p(z, y) dz - c(y) \right].$$

Пусть выполнена *гипотеза благожелательности* (при прочих равных агент выбирает наиболее выгодные для центра действия). Тогда задача стимулирования заключается в выборе системы стимулирования $\tilde{\sigma}(\cdot)$, максимизирующей *эффективность стимулирования* – математическое ожидание функции полезности центра на множестве (1):

(2) $$\max_{y \in P(\tilde{\sigma}(\cdot))} \left[H(y) - \int \tilde{\sigma}(z) p(z, y) dz \right] \to \max_{\tilde{\sigma}(\cdot)} .$$

Общего аналитического решения задачи (2) на сегодняшний день не известно (см. достаточные условия оптимальности различных систем стимулирования в [24]).

Простой активный элемент. Хрестоматийной моделью вероятностной ОС, в которой удается получить простое аналитическое решение задачи стимулирования, является модель *простого активного элемента* [4]. Пусть интегральная функция $F(z, y)$ распределения $p(z, y)$ может быть представлена в виде:

(3) $$F(z, y) = \begin{cases} F(z), & z < y \\ 1, & z \geq y \end{cases},$$

где $F(z)$ – некоторая интегральная функция распределения, зави-

[1] *Ненаблюдаемость для центра действий агента объясняет то, что вознаграждение последнего зависит от наблюдаемого результата деятельности. Если бы действия агента были наблюдаемы, то центр мог бы основывать стимулирование на выбираемых действиях и «забыть» о неопределенности, то есть задача свелась бы к детерминированной задаче стимулирования, которая подробно описана выше.*

сящая только от результата деятельности. Очевидно, что вероятность того, что результат деятельности окажется строго больше действия, равна нулю. То есть, наличие неопределенности приводит к тому, что результат деятельности агента оказывается не больше его действия. Организационная система, в которой интегральная функция распределения представима в таком виде, называется системой с простым активным элементом.

В [24] доказано, что в системе с простым активным элементом в рамках гипотезы благожелательности оптимальна компенсаторная система стимулирования. Более того, компенсаторная система стимулирования оптимальна и в случае, если затраты агента также зависят от результата, а не от действия. Для затрат агента $\tilde{c}(z)$, зависящих от действия, в [8] показано, что система стимулирования $\tilde{w}(\mathrm{z}) = \int_0^z \frac{\tilde{c}'(x)}{1-F(x)} dx$ оптимальна, где $\tilde{w}(z) := u(\tilde{\sigma}(z))$, при следующих предположениях: функция стимулирования неотрицательна, резервная полезность равна нулю, агент не склонен к риску (его функция полезности $u(\cdot)$ – вогнутая). То есть $\tilde{w}(z)$ – «компенсаторная в смысле математического ожидания» функция стимулирования.

Парето-агент. Будем называть *Парето-агентом* такого агента, у которого $p(z, y) = p(\alpha, y, z)$, то есть, распределение результатов которого описывается распределением Парето с минимальным значением, равным действию агента: $z_0 = y$ (см. выражение (1) предыдущего раздела). Содержательно, агент выбирает свой уровень усилий (гарантированное значение результата деятельности), и результат будет заведомо не меньше действия, а может оказаться и больше, причем вероятность больших значений результата достаточно высока (распределение Парето принадлежит классу «распределений с тяжелыми хвостами»)

Решим задачу (2) для Парето-агента с $\alpha > 1$, функция затрат которого удовлетворяет предположению А.4, а резервная полезность равна нулю.

Общим принципом, используемым ниже, является выбор такой системы стимулирования, зависящей от результата деятельности агента, что ее математическое ожидание равно затратам агента в точке плана (или равно значению оптимальной детерминированной системы стимулирования), а точка плана при этом является точкой максимума ожидаемой полезности агента. Из детерминированной теории стимулирования (см. обзор в первой части настоящей работы и [23]) известно, во-первых, что минимальные затраты на реализацию любого действия агента (при нулевой резервной полезности) равны затратам агента по выбору этого действия. Во-вторых, известно [24], что ожидаемые затраты центра на стимулирование в случае наличия неопределенности не ниже, чем в детерминированном случае. Следовательно, если в условиях вероятностной неопределенности удается реализовать некоторое действие так, что математическое ожидание затрат центра на стимулирование равно затратам агента по выбору этого действия, то такая система стимулирования оптимальна. Применим этот общий подход для различных классов систем стимулирования.

Линейная система стимулирования. Математическое ожидание функции полезности агента равно:

(4) $E\tilde{f}(z, y) = E\tilde{\sigma}(z) - c(y)$.

Фиксируем план $x \geq 0$. Из результатов решения детерминированной задачи стимулирования (см. выше) известно, что оптимальной линейной системой стимулирования, реализующей план x, является следующая:

(5) $\sigma_L(x, y) = c'(x)\,(y - x) + c(x)$.

Найдем линейную систему стимулирования $\tilde{\sigma}_L(x, z) = a\,z + b$, где a и b – константы, такую, что $E\tilde{\sigma}_L(x, z) = \sigma_L(x, y)$. Легко вычислить, что константы a и b должны быть следующими: $a = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha}\, c'(x)$, $b = c(x) - c'(x)\, x$. Итак, получаем, что линейная система стимулирования

(6) $\tilde{\sigma}_L(x, z) = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha}\, c'(x)\, z + c(x) - c'(x)\, x$

реализует план x (побуждает агента выбрать действие, совпадающее с планом), и ее математическое ожидание в точности равно (для любого $y > 0$) оптимальной детерминированной системе стимулирования (5).

Оптимальный план может быть найден из решения следующей задачи оптимального согласованного планирования:

(7) $x^* = \arg \max_{x \geq 0} [H(x) - c(x)]$.

Отметим, что оптимальный план в рассматриваемой вероятностной модели такой же, что и в соответствующем детерминированном случае. Кроме того, с уменьшением неопределенности (росте α) правая часть выражения (6) стремится к правой части выражения (5).

Таким образом, обоснована справедливость следующего утверждения.

Утверждение 11. Если выполнено предположение А.4, то в модели Парето-агента оптимальна линейная система стимулирования (6), (7).

Отметим, что для случая коллективного стимулирования в условиях внутренней вероятностной неопределенности достижимость максимальной эффективности стимулирования (той же, что и при полной информированности) линейными функциями стимулирования была показана в достаточно общем случае в [43]. В упомянутой работе существенными предположениями являлись нейтральность агента к риску и отсутствие ограничения неотрицательности стимулирования. Оба этих предположения справедливы и для рассмотренной выше модели внешней вероятностной неопределенности.

Компенсаторная система стимулирования. Задача синтеза оптимальной компенсаторной системы стимулирования в организационной системе с Парето-агентом заключается в нахождении такой системы стимулирования $\tilde{\sigma}_K(z)$, математическое ожидание которой равно затратам агента, то есть

(8) $E\tilde{\sigma}_K(z) = c(y),\ y \geq 0$.

Распишем условие (8) более подробно:

(9) $\alpha\ y^{\alpha} \int_{y}^{+\infty} \frac{\tilde{\sigma}_K(z)}{z^{\alpha+1}} dz = c(y),\ y \geq 0$.

Решать уравнение (9) относительно $\tilde{\sigma}_K(z)$ в общем виде – достаточно сложная задача. Исследуем ее для случая, когда выполнено предположение А.9, то есть возьмем функцию затрат $c(y, r) = \frac{1}{\gamma}\ (y)^{\gamma}(r)^{1-\gamma}$, $\gamma \geq 1$, и будем искать решение в классе степенных функций:

(10) $\tilde{\sigma}_K(z) = \dfrac{1}{\beta_0}\ z^{\beta_1}\ r^{1-\beta_2}$.

Подставляя (10) в (9), получаем, что решение $\beta_0 = \dfrac{\alpha\gamma}{\alpha-\gamma}$,
$\beta_1 = \gamma$, $\beta_2 = \gamma$, существует при условии
(11) $1 \leq \gamma < \alpha$.

Таким образом, обоснована справедливость следующего утверждения.

Утверждение 12. Если выполнены предположения А.4, А.9 и условие (11), то в модели Парето-агента в рамках гипотезы благожелательности оптимальна «компенсаторная» система стимулирования

(12) $\tilde{\sigma}_K(z) = \dfrac{\alpha-\gamma}{\alpha\gamma}\ z^{\gamma}\, r^{1-\gamma}$,

а оптимальный план определяется выражением (7).

Отметим, с уменьшением неопределенности (росте α) «компенсаторная» система стимулирования (12) стремится к функции затрат агента, то есть к компенсаторной системе стимулирования, оптимальной в детерминированном случае.

Тарифная (скачкообразная система) стимулирования. Известно (см. выше), что в детерминированном случае оптимальна скачкообразная система стимулирования

(13) $\sigma_C(x, y) = \begin{cases} c(x), & y \geq x \\ 0, & y < x \end{cases}$,

в которой оптимальное значение плана определяется выражением (7).

Рассмотрим следующую скачкообразную систему стимулирования в модели Парето-агента:

(14) $\tilde{\sigma}_C(x, z) = \begin{cases} c(x), & z \geq x \\ 0, & y < x \end{cases}$.

Вычислим математическое ожидание (14):

(15) $E\tilde{\sigma}_C(x, z) = c(x)\begin{cases} 1, & y \geq x \\ \left(\dfrac{y}{x}\right)^{\alpha}, & y \leq x \end{cases}$.

Условие реализуемости действия $x \geq 0$ имеет вид:

(16) $$\forall\, y \in [0;\, x]\quad \frac{c(y)}{y^{\alpha}} \geq \frac{c(x)}{x^{\alpha}}.$$

Таким образом, обоснована справедливость следующего утверждения.

Утверждение 13. Если выполнено предположение А.4 и

(17) $$\forall\, y \in [0;\, x^{*}]\quad \frac{c(y)}{y^{\alpha}} \geq \frac{c(x^{*})}{(x^{*})^{\alpha}},$$

то в модели Парето-агента в рамках гипотезы благожелательности оптимальна скачкообразная система стимулирования (14), где оптимальный план x^{*} определяется выражением (7). Если дополнительно выполнено предположение А.9, то условие (17) переходит в условие (11).

Отметим, с уменьшением неопределенности (росте α) скачкообразная система стимулирования (14) стремится к скачкообразной системе стимулирования (13), которая оптимальна в детерминированном случае.

Таким образом, в настоящем разделе для модели Парето-агента получено решение задачи синтеза оптимальной системы стимулирования. Доказано, что оптимальна линейная система стимулирования, получен ее явный вид. Приведены достаточные условия оптимальности скачкообразной и «компенсаторной» систем стимулирования.

Отдельного обсуждения заслуживает влияние неопределенности на эффективность стимулирования. Во-первых, все полученные в настоящем разделе результаты решения задачи стимулирования в условиях неопределенности удовлетворяют *принципу соответствия*: при предельном переходе («стремлении» неопределенности к «нулю») вероятностная модель переходит в детерминированную, а оптимальные решения задач стимулирования в условиях неопределенности – в оптимальные решения соответствующих детерминированных задач стимулирования. Во-вторых, эффективность стимулирования Парето-агента (функционирующего в условиях неопределенности) тождественно равна эффективности стимулирования в соответствующей детерминированной организационной системе. Данный факт представляется довольно нетривиальным, так как в [24] доказано, что эффективность стимулирования в условиях вероятностной неопределенности не выше, чем в условиях полной информированности.

Кроме того, отметим, что выше, помимо предположения о конкретном параметрическом виде распределения, введено предположение о нейтральности агента к риску (его функция полезности линейна по вознаграждению). В моделях с нейтральным к риску центром и агентом всегда существует много оптимальных систем стимулирования [23, 24, 32, 42].

Линейные системы стимулирования вида $a\,z + b$ всегда оптимальны для функций затрат, удовлетворяющих предположению А.4. Но такие системы стимулирования обладают «неприятным» свойством – они отрицательны для некоторых z. Для Парето-агента можно показать, что при определенных условиях типа (17) неотрицательная функция стимулирования вида $\max\,[0;\, a\,z + b]$ также будет оптимальной.

В общем же случае для безразличного к риску Парето-агента можно использовать приближение квазикомпенсаторной функции стимулирования – функция стимулирования равна нулю везде, кроме некоторой малой окрестности планового результата. Функция подбирается так, чтобы ее математическое ожидание при выборе планового действия компенсировало затраты. Эта функция стимулирования обеспечивает выбор агентом действия, близкого к плану, при наиболее слабых ограничениях на функцию затрат, но будет неоптимальной для несклонного к риску агента. Подобные задачи и подходы к их решению подробно описаны в [24] и выходят за рамки настоящего исследования.

3.3. Модель индивидуальных различий агентов

В задачах стимулирования существенными являются характеристики агентов, отражающие их индивидуальные различия – производительность труда, эффективность деятельности и т.д. Оказывается, что во многих случаях, как индивидуальные характеристики агентов, так и результаты их деятельности, хорошо аппроксимируются распределением Парето.

Распределение способностей. Модели распределения способностей обсуждались в литературе неоднократно. Использовать степенное распределение для описания различий способностей людей предложил первоначально сам В. Парето [46], и его идеи развивали многие другие исследователи [47, 49]. Например, предполагалось, что вероятность дополнительной «единицы способностей» не зависит от текущего уровня способностей [36] – такая модель приводит к тому, что способности подчиняются нормальному распределению. К распределению Парето приводят модели марковских цепей [35], потоковые модели [47] или модели процессов гибели и размножения [48]. Объединяет их то, что все они рассматривают стохастические мультипликативные процессы, в которых на каждом шаге текущее значение умножается на случайную величину, с произвольной нетривиальной функцией распределения (корректно говоря, распределение Парето является предельным распределением такого мультипликативного стохастического процесса). Кроме того, отметим, что распределение Парето хорошо описывает статистические характеристики катастроф и стихийных бедствий, населения городов, потоков информации в телекоммуникационных сетях, употребимости слов и др. [18, 29, 38, 39, 49].

Содержательным объяснением, является, наверное, следующее. Известно, что процессы научения хорошо описываются экспоненциальными кривыми [20], то есть зависимость уровня научения (производительности труда, объема выполняемых работ или перерабатываемой информации и т.д.) от времени носит замедленно-асимптотический характер. Качественно, экспонента «порождается» предположением, что скорость научения (производная уровня научения) пропорциональна уже достигнутому уровню научения. Если допустить, что вероятность прекращения деятельности в течение единицы времени постоянна (продолжительность деятельности описывается распределением Пуассона), то получим, что средний результат распределен по Парето [33].

Связь с задачей стимулирования. Пусть имеется агент, тип которого r является случайной величиной с распределением Парето $p_r(\alpha, r_0, r)$, $\alpha > 1$. Попробуем ответить на вопрос – при каких условиях действия (или результаты деятельности агента) будут распределены по Парето (отметим, что наблюдаемыми являются именно действия или результаты деятельности). Возможны, как минимум, два объяснения.

1. Предположим, что оплата труда агента постоянна и не зависит от типа и действия, а продолжительность рабочего времени фиксирована и равна T часам. Тогда, если интерпретировать тип агента как производительность его труда (продуктивность и т.д.), измеряемую в объеме результатов, получаемых в единицу времени, то действие агента y будет случайной величиной, вычисляемой как $y = r\,T$ и описываемой распределением $p_y(\alpha, y_0, y)$, где $y_0 = r_0\,T$.

2. Предположим, что используется пропорциональная система оплаты результатов деятельности (действий y) агента:

(1) $\sigma_L(y) = \lambda\, y + \lambda_0$,

где $\lambda > 0$, и выполнено следующее предположение.

А.13. Функции затрат агентов имеют вид

(2) $c(y, r) = c_0 + r\,\varphi(y / r)$,

где $\varphi(\cdot)$ – гладкая неубывающая выпуклая функция.

Частным случаем функции затрат (2) являются функции затрат типа Кобба-Дугласа – см. предположение А.9. Тогда действие $y^*(r, \lambda)$, выбираемое агентом (доставляющее максимум его целевой функции при заданной системе стимулирования), равно

(3) $y^*(r, \lambda) = r\,\varphi'^{-1}(\lambda)$,

то есть будет пропорционально типу агента и, следовательно, будет описываться распределением $p_y(\alpha, y_0, y)$, где $y_0 = r_0\,\varphi'^{-1}(\lambda)$.

Пример: продуктивность в науке. Хрестоматийным примером показателя, описываемого распределением Парето, является эффективность научной деятельности [33]. Первым, кто пытался еще в конце XIX века изучить связь числа публикаций с эффективностью научной деятельности, был англичанин Фрэнсис Голтон [1].

Статистические подходы одним из первых в данной области стал использовать Альфред Лотке, который в 1926 году предложил следующую обратную квадратичную зависимость, известную теперь как *закон Лотки*:

$$p(q) = 6 / (\pi^2 q^2),$$

где $p(q)$ – доля авторов, опубликовавших q научных работ (в некоторой фиксированной предметной области).

Более общим является гиперболический закон

$$p(q) = p_1 / q^{1+\alpha},$$

где α – характеристический показатель распределения. Для закона Лотки он равен единице. Непрерывным аналогом закона Лотки является распределение Парето, описывающее плотность распределения числа ученых с $z \geq z_0$ статьями при минимальной продуктивности z_0.

3.4. Детерминированная задача стимулирования коллектива агентов

Пусть имеет место случай полной информированности, то есть центру известны значения индивидуальных типов агентов, причем типы распределены по Парето.

Целевая функция i-го агента имеет вид:

(1) $f_i(y_i, r_i) = \sigma_i(y_i) - c_i(y_i, r_i), i \in N.$

Будем считать, что функции затрат агентов одинаковы, и агенты различаются только своими типами, то есть выполнено следующее предположение:

А.14. $c_i(y_i, r_i) = c(y_i, r_i),\ i \in N$, где функция затрат $c(\cdot)$ удовлетворяет предположению А.4.

Пусть выполнены предположения А.14, А.7 и резервная полезность каждого из агентов равна нулю. Тогда в силу принципа компенсации затрат (см. выше), получаем, что при использовании центром компенсаторной системы стимулирования оптимальный с точки зрения центра план i-го агента равен

(2) $x^*(r_i) = \arg\max\limits_{y_i \geq 0}\ [y_i - c(y_i, r_i)].$

Выигрыш центра при этом равен (жирный шрифт начертания переменной обозначает вектор)

(3) $\Phi(\mathbf{r}) = \sum\limits_{i \in N} [x^*(r_i) - c(x^*(r_i), r_i)]$.

Если типы агентов являются независимыми и одинаково распределены, то ожидаемый выигрыш центра равен

(4) $E\Phi(\mathbf{r}) = n\ [Ex^*(r) - Ec(x^*(r), r)],$

где $n = |N|$.

Получаем, что справедливо следующее утверждение.

Утверждение 14. Если выполнены предположения А.7, А.9, А.14 и типы агентов описываются распределением Парето $p(\alpha, r_0, r)$, где $\alpha > 1$, то

(5) $E\Phi(\mathbf{r}) = n\ r_0\ \dfrac{\alpha}{\gamma}\ \dfrac{\gamma - 1}{\alpha - 1}$.

Отметим, что результат утверждения 14 может быть легко перенесен на более общий случай функций затрат, удовлетворяющих предположению А.13.

В правой части выражения (5) фигурирует, в том числе, размер организационной системы n, что дает возможность в дальнейшем ставить и решать задачи оптимизации ее состава (см. раздел 3.6).

Выше рассмотрены следующие варианты постановки и решения задач стимулирования: детерминированная модель (настоящий раздел), модель с внешней вероятностной неопределенностью (раздел 2.2, в котором предполагается, что имеется неопределенность относительно результатов деятельности агента, причем центр и агент априори информированы симметрично). Для полноты картины остается рассмотреть случай внутренней неопределенности – неполной информированности центра о типах агентов. Именно такая модель исследуется в следующем разделе.

3.5. Задача стимулирования в условиях внутренней неопределенности

Пусть имеет место случай асимметричной информированности – внутренняя неопределенность [24], то есть, центру не известны типы агентов, но известно, что они описываются распределением Парето. Задача центра заключается в том, чтобы предложить агентам меню контрактов – свою зависимость размера вознаграждения от действия агента для каждого из типов агентов. При этом желательно, чтобы агенты различных типов выбирали различные «пункты меню» и выполнялось условие согласованности – агенту любого типа не должно быть выгодно выбирать системы стимулирования, соответствующие другим типам. Данная задача является типовой задачей теории контрактов и ей посвящено множество исследований [15, 16, 42]. Получим ее решение для рассматриваемой в настоящей работе модели.

Рассмотрим двухуровневую организационную систему с одним центром на верхнем уровне и одним агентом[1] на нижнем.

Функция полезности центра: $\Phi(\sigma, y) = H(y) - \sigma$, функция полезности агента: $f(\sigma, y, r) = \sigma - c(y, r)$, где $c(y, r)$ – функция затрат агента, зависящая от выбираемого им действия $y \geq 0$ и типа r.

Введем следующее предположение относительно функции затрат агента: $\forall\, r \in \Omega$, $\forall\, y > 0$:

1) $c(y, r)$ непрерывна по r и y;

2) $\dfrac{\partial c(y,r)}{\partial r} < 0$ – затраты убывают с ростом типа агента;

3) $\dfrac{\partial c(y,r)}{\partial y} > 0$ – затраты увеличиваются с увеличением действия;

4) $\dfrac{\partial^2 c(y,r)}{\partial y \partial r} < 0$ – условие «однократного пересечения» или условие Спенса-Мирлиса [42];

5) $\dfrac{\partial c^2(y,r)}{\partial y^2} > 0$ условие выпуклости функции затрат по действию.

Примером функции затрат, удовлетворяющей всем перечисленным требованиям, является функция Кобба-Дугласа: $c(y, r) = \dfrac{1}{\gamma}\ (y)^{\gamma}(r)^{1-\gamma}$, $\gamma > 1$ (см. предположение А.9).

Задача стимулирования в условиях внутренней вероятностной неопределенности (неполной информированности центра о типе агента) формулируется следующим образом: найти механизм стимулирования с сообщением информации $\pi(s)$ = $(y(s), \sigma(s))$, во-первых, максимизирующий ожидаемую полезность центра:

$$E\Phi(\sigma(s)) \to \max_{\pi(s)},$$

[1] *Систему с одним агентом, тип которого описывается вероятностным распределением, условно можно считать «многоэлементной» – при вычислении математического ожидания, с точностью до мультипликативного множителя (числа агентов), получается тот же результат.*

где s – сообщение агента центру о своем типе, и, во-вторых, обеспечивающий сообщение агентом своего истинного типа: $s = r$.

Предположим, что тип агента распределен по Парето – центру не известен точный тип агента, но известна область его возможных значений $\Omega = [r_0, +\infty)$ и параметры Парето распределения

$$p(r) = \frac{\alpha}{r_0}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1+\alpha}, \ \alpha > 1.$$

Используя приведенный в [16] метод решения подобных задач, получим, что при выполнении следующих трех условий, обеспечивающих неманипулируемость механизма (выгодность для агента сообщения достоверной информации):

(1) $\frac{d\sigma}{dr}(r) - y^{\gamma-1}\sigma^{-\gamma}\frac{dy}{dr}(r) = 0$,

(2) $-y^{\gamma-1}\sigma^{-\gamma}\frac{dy}{dr}(r) \le 0$,

(3) $\forall r \in \Omega, \ \frac{d\sigma}{dr}(r) \ge 0, \frac{dy}{dr}(r) \ge 0$.

механизм, являющийся решением рассматриваемой задачи, будет определяться из следующих соотношений:

$$\int_{r_0}^{\infty} [H(y(r)) - \frac{1}{\gamma}(y(r))^{\gamma} r^{1-\gamma} - \int_{r_0}^{r} \frac{1}{\gamma}(y(r))^{\gamma} r^{\gamma} d\tau] p(r) dr \underset{y(r)}{\to} \max,$$

$$\sigma(r) = \frac{1}{\gamma}(y(r))^{\gamma} r^{1-\gamma} + \int_{r_0}^{r} \frac{1}{\gamma}(y(r))^{\gamma} r^{\gamma} d\tau .$$

Для $H(y) = y$ решение $\hat{\pi}(r) = (\hat{y}(r), \hat{\sigma}(r))$ будет иметь следующий вид: $\forall r \in \Omega$

(4) $\hat{y}(r) = r[1 + \frac{1}{\alpha(\gamma-1)}]^{\frac{1}{1-\gamma}}$,

(5) $\hat{\sigma}(r) = (\gamma-1)^{-1}[1 + \frac{1}{\alpha(\gamma-1)}]^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}(r - r_0\gamma^{-1})$.

Утверждение 15. Если выполнены предположения А.7 и А.9, то решение задачи стимулирования в условиях неполной информированности центра о типе агента, описываемом распределением

Парето, дается выражениями (4) и (5), причем данный механизм стимулирования является announced неманипулируемым.

В частности, для $\gamma = 2$ из (4) и (5) получаем:

(6) $\hat{y}(r) = r \dfrac{\alpha}{\alpha + 1}$, $\forall r \in \Omega$;

(7) $\hat{\sigma}(r) = \dfrac{\alpha^2}{2(\alpha + 1)^2}(2r - r_0)$, $\forall r \in \Omega$.

Для $\gamma = 2$ нетрудно получить в явном виде выражение для ожидаемого выигрыша центра при использовании оптимального механизма: $E\ \Phi\ (\hat{\pi}(r)) = \dfrac{\alpha^2}{2(\alpha^2 - 1)} r_0$.

3.6. Задача оптимизации состава организационной системы

Имея решение задачи стимулирования (см. разделы 3.4 и 3.5), можно ставить и решать задачу синтеза оптимального состава организационной системы (ОС) или задачу оптимизации существующего состава.

Задача синтез оптимального состава. Предположим, что имеется множество N_0 агентов, $|N_0| = n_0$, типы которых описываются распределением Парето $p_r(\alpha, r_0, r)$ – см. содержательные интерпретации в разделе 3.3. Будем считать, что индивидуальные типы агентов достоверно известны центру.

Задача заключается в нахождении множества агентов $N \subseteq N_0$, которых следует включать в состав участников организационной системы. Решение будем искать в виде $n = |N|$, где

(1) $n = n(r_{min}) = \{i \in N_0 \mid r_i \geq r_{min}\}$,

то есть, найдем минимальное значение типа агентов, которых следует включать в состав ОС. Пренебрегая здесь и далее дискретностью, из свойств распределения Парето получаем, что

(2) $n(r_{min}) = n_0 \left(\dfrac{r_0}{r_{\min}} \right)^{\alpha}$.

Подставляя (2) в выражение (5) раздела 3.4, с учетом выражения (2) раздела 3.1 получаем:

(3) $E\Phi(r_{min}) = n_0 \left(\frac{r_0}{r_{\min}}\right)^{\alpha} r_{min} \frac{\alpha}{\gamma} \frac{\gamma-1}{\alpha-1}$.

Утверждение 16. Если выполнены предположения А.7, А.9, А.14 и типы агентов – претендентов на включение в состав ОС – описываются распределением Парето $p_r(\alpha, r_0, r)$, где $\alpha > 1$, то максимум ожидаемого выигрыша центра достигается при максимальном составе ОС:

(4) $n^* = n_0$, $r_{min} = r_0$,

и равен $n_0\, r_0 \frac{\alpha}{\gamma} \frac{\gamma-1}{\alpha-1}$.

Содержательно утверждение 16 означает, что центру выгоден максимальный состав – его выигрыш растет при включении в состав ОС любых агентов, даже с очень маленькими типами. Этот факт обусловлен тем, что в силу введенных предположений предельные затраты агента в нуле равны нулю (см. предположение А.9), а предельная производительность – единице (см. предположение А.9). Аналогичные эффекты имели место ранее и в других моделях формирования состава – см. вторую часть настоящей работы и [22]. Для того чтобы уйти от «тривиального» решения, предлагаемого утверждением 16, необходимо либо изменить критерий эффективности (например, отказавшись от предположения А.7 и допустив нелинейность дохода центра), либо ввести ненулевую резервную полезность агентов, как включаемых, так и не включаемых, в состав ОС. Последний случай описан в завершении настоящего раздела.

Задача оптимизации состава. Если в задаче синтеза оптимального состава производился поиск состава ОС «с нуля», то задача оптимизации состава в общем случае заключается в наиболее эффективном изменении существующего состава – нахождении новых агентов, которых следует включить в состав ОС (задача о найме), и участников ОС, которых следует исключить из ее состава (задача о сокращении или задача о повышении эффективности использования премиального фонда). Рассмотрим последнюю задачу для случая, когда индивидуальные характеристики агентов распределены по Парето.

Пусть наблюдаемое распределение результатов деятельности агентов (выбранных ими действий) есть $p_y(\alpha, y_0, y)$. *Эффектив-*

ность $K(N_0)$ *деятельности коллектива агентов* N_0 определим как отношение ожидаемого результата их деятельности (ожидаемой суммы действий) к затратам центра на стимулирование.

Случай 1. Пусть премиальный фонд делится поровну между агентами. Тогда $K(n_0) = n_0\, Ey / R$. Получаем, что

$$(5)\ K(n_0) = n_0\, y_0\, \frac{\alpha}{\alpha - 1} / R.$$

Пусть теперь используется принцип (1), то есть, в состав ОС включаются только агенты, действия которых не меньше y_{min}. Тогда с учетом (2) имеем:

$$(6)\ K(y_{min}) = n_0\, y_{min}\, \frac{\alpha}{\alpha - 1} / R.$$

Из (6) следует, что эффективность пропорциональна «точке отсечения» y_{min}. Этот вывод вполне очевиден – чем более эффективные работники остаются в составе ОС, тем при «уравнительной» системе оплаты выше эффективность. Но, ожидаемый интегральный результат деятельности всех агентов Y, включенных в состав ОС, при $\alpha > 1$ убывает с ростом «точки отсечения», причем в общем случае нелинейно:

$$(7)\ Y(y_{min}) = n_0 \left(\frac{y_0}{y_{\min}}\right)^{\alpha} y_{min}\, \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

Для достижения рационального баланса между ростом эффективности и уменьшением суммарного результата (при увеличении y_{min}) необходимо привлечение дополнительных критериев. Однако, следует отметить, что предположение о том, что все агенты получают одинаковую оплату и демонстрируют существенно различные результаты представляется не очень реалистичным (использовать «экономию» премиального фонда, полученную за счет сокращения неэффективных агентов, не представляется возможным). Поэтому рассмотрим случай линейной премиальной системы оплаты труда.

Случай 2. Пусть, как описано в разделе 3.3, используется пропорциональная система оплаты: $\sigma_L(y) = \lambda\, y + \lambda_0$, где $\lambda > 0$, и выполнено предположение А.13. Выше было показано, что при этом агент выберет действие $y^*(r, \lambda) = r\, \varphi'^{-1}(\lambda)$. Так как действия распределены по Парето, то и типы распределены по Парето (см.

раздел 3.3), и «точки отсечения» связаны между собой следующим образом: $y_{min} = r_{min}\, \varphi^{'\,-1}(\lambda)$.

Ожидаемая сумма действий агентов равна

(8) $Y_0 = n_0\, r_0\, \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\, \varphi^{'\,-1}(\lambda)$.

Суммарные ожидаемые затраты агентов должны быть компенсированы, то есть суммарные ожидаемые затраты центра на стимулирование равны

(9) $S(n_0, \lambda) = n_0\, [c_0 + r_0\, \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\, \varphi(\varphi^{'\,-1}(\lambda))]$.

Приравнивая $S(n_0, \lambda) = R$ и подставляя результат в (8) и (9), получим:

(10) $Y_0 = n_0\, [c_0 + r_0\, \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\, \varphi^{-1}(\dfrac{(R-n_0c_0)(\alpha-1)}{\alpha\, n_0 r_0})]$.

Деля (10) на R, получаем оценку эффективности

(11) $K(n_0, R) = \dfrac{n_0}{R}\, [c_0 + r_0\, \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\, \varphi^{-1}(\dfrac{(R-n_0c_0)(\alpha-1)}{\alpha\, n_0 r_0})]$.

При использовании принципа (1) ожидаемая сумма действий агентов равна

(12) $Y(r_{min}) = n_0 \left(\dfrac{r_0}{r_{\min}}\right)^{\alpha} r_{min}\, \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\, \varphi^{'\,-1}(\lambda)$.

Суммарные ожидаемые затраты агентов должны быть компенсированы, то есть суммарные ожидаемые затраты центра на стимулирование равны:

(13) $S(r_{min}, \lambda) = n_0 \left(\dfrac{r_0}{r_{\min}}\right)^{\alpha} [c_0 + r_{min}\, \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\, \varphi(\varphi^{'\,-1}(\lambda))]$.

Приравнивая $S(r_{min}, \lambda) = R$ и подставляя результат в (12) и (13), получим:

(14) $Y(r_{min}) = n_0 \left(\dfrac{r_0}{r_{\min}}\right)^{\alpha} r_{min}\, \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\, \varphi^{-1}\left(\dfrac{[R-n_0c_0\left(\dfrac{r_0}{r_{\min}}\right)^{\alpha}](\alpha-1)}{\alpha\, n_0\left(\dfrac{r_0}{r_{\min}}\right)^{\alpha} r_{\min}}\right)$.

Деля (14) на R, получаем оценку эффективности:

$$(15)\ K(r_{min}) = \frac{n_0}{R}\left(\frac{r_0}{r_{\min}}\right)^{\alpha} r_{min}\ \frac{\alpha}{\alpha-1}\ \varphi^{-1}\left(\frac{[R - n_0 c_0\left(\frac{r_0}{r_{\min}}\right)^{\alpha}](\alpha-1)}{\alpha\ n_0\left(\frac{r_0}{r_{\min}}\right)^{\alpha} r_{\min}}\right).$$

Обозначим

$$(16)\ r^*_{\min} = \arg\max_{r_{\min}\geq r_0} Y(r_{min}).$$

Сравнивая (14) и (15), получаем, что справедливо следующее утверждение.

Утверждение 17. Пусть выполнено предположение А.13 и премиальный фонд фиксирован. Тогда при использовании центром унифицированной линейной премиальной системы стимулирования значение «точки отсечения», максимизирующее эффективность стимулирования $K(r_{min})$, совпадает со значением «точки отсечения» $r^*_{\min}$, максимизирующим суммарный ожидаемый результат деятельности агентов.

Отметим, что, если выполнено предположение А.9, где $1 < \gamma < \alpha$, и $c_0 = 0$, то получаем результат, аналогичный утверждению 16, то есть оптимальным будет максимальный состав ($r^*_{\min} = r_0$). Условно можно считать, что в рассматриваемой модели константа c_0 играет роль резервной полезности.

Пример 3. Пусть $\varphi(t) = t^2$, $\alpha = 3$, $r_0 = 1$, $c_0 = 1$. Тогда

$$Y(r_{min}) = \sqrt{\frac{3n_0}{2}}\ \frac{1}{r_{\min}}\ \sqrt{R - \frac{n_0}{(r_{\min})^3}}\ .$$

Вычислим максимум $Y(r_{min})$ по $r_{min} \geq 1$: $r^*_{\min} = \sqrt[3]{\dfrac{5n_0}{2R}}$.

Найдем для рассматриваемого примера оптимальный (с точки зрения значения целевой функции центра) размер премиального фонда. В рамках предположения А.7 целевая функция центра представляет собой разность между $Y(r^*_{\min})$ и премиальным фондом, то есть:

$$\Phi(R) = 3\left(\frac{n_0}{2}\right)^{1/6}\left(\frac{R}{5}\right)^{5/6} - R.$$

Найдем максимум этого выражения по $R \geq 0$: $R^* = 5\, n_0 / 128$, то есть оптимальный размер премиального фонда пропорционален числу агентов, входящих в первоначальный состав ОС. •

Пример 4. Пусть $\varphi(t) = t^2$, $\alpha = 3$, $c_0 = 0{,}04$, $n_0 = 100$, $R = 4$. График зависимости эффективности (15) от величины r_{min} приведен на Рис. 9.

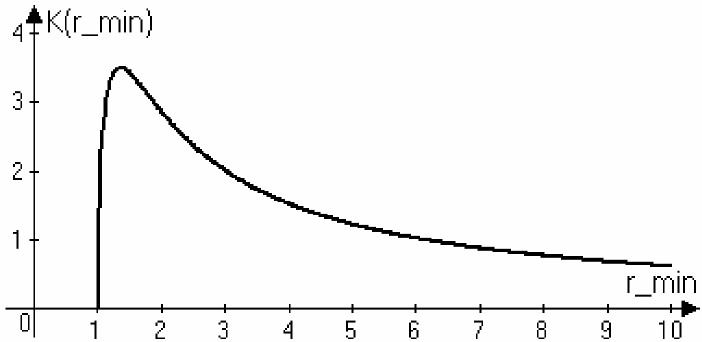

Рис. 9. Зависимость эффективности (15) от величины r_{min}.

Видно, что эффективность резко растет при увольнении малоэффективных агентов, достигая максимума при $r^*_{\min} \cong 1{,}36\, r_0$, а затем начинает убывать. •

Роль резервной полезности. Общий качественный вывод, следующий из результатов рассмотрения задач формирования состава, заключается в том, что при степенных функциях затрат агентов и линейной функции дохода центра, если центр использует линейную систему стимулирования, то максимальный состав оптимален при условии, что затраты агентов от выбора нулевых действий (постоянные издержки) равны нулю и равна нулю резервная полезность. Если хотя бы один из этих двух параметров не равен нулю, то получается нетривиальное решение. Выше был проиллюстрирован случай учета постоянных издержек c_0. Исследуем роль резервной полезности.

Предположим, что центр должен обеспечить для всех агентов, включаемых в состав организационной системы (то есть, агентов, тип которых превышает r_{min}), резервную полезность u. Тогда выражение (3) примет вид:

$$(17)\ E\Phi(r_{min}) = n_0 \left(\frac{r_0}{r_{\min}}\right)^{\alpha} [r_{min} \frac{\alpha}{\gamma} \frac{\gamma - 1}{\alpha - 1} - u].$$

Найдем максимум выражения (17) по $r_{min} \geq r_0$. Он достигается при

$$(18)\ r^*_{\min}(u) = u \frac{\gamma}{\gamma - 1}.$$

Видно, что чем выше резервная полезность, тем жестче требования к квалификации агентов, включаемых в состав ОС. Интересно, что значение «точки отсечения» (18) не зависит от α – показателя степени распределения Парето.

Возможна и другая постановка задачи – предположим, что центр дополнительно обязан обеспечить резервную полезность u_0 тем агентам, которые не вошли в состав организационной системы (например, отправлены в долговременный отпуск). Тогда выражение (17) примет вид:

$$(19)\ E\Phi(r_{min}) = n_0 \left(\frac{r_0}{r_{\min}}\right)^{\alpha} [r_{min} \frac{\alpha}{\gamma} \frac{\gamma - 1}{\alpha - 1} - u] - n_0\, u_0\, (1 - \left(\frac{r_0}{r_{\min}}\right)^{\alpha}).$$

Если $u_0 = 0$, то (19) переходит в (17). Если $u = 0$, а $u_0 > 0$, то оптимален максимальный состав. Рассмотрим промежуточный случай: $u > 0,\ u_0 > 0$. Найдем максимум выражения (19) по $r_{min} \geq r_0$. Он достигается при

$$(20)\ \hat{r}_{\min}(u_0, u) = (u - u_0) \frac{\gamma}{\gamma - 1}.$$

Из (18) и (20) следует, что, оптимизация состава имеет смысл, если

$$(21)\ u - u_0 \geq \frac{\gamma - 1}{\gamma}\, r_0.$$

Другими словами, разность между резервными полезностями агентов, включаемых в состав ОС, и агентов, не включаемых в состав ОС, должна быть достаточно высока – см. выражение (21).

Кроме того, при достаточно больших значениях резервных полезностей целевая функция центра может стать отрицательной – он станет не в силах удовлетворить потребности агентов (отражаемые их резервной полезностью). Это будет означать, что данный коллектив агентов (при любой системе стимулирования и любой оптимизации его состава), в принципе, не может эффективно функционировать при имеющейся результативности его деятельности (отражаемой функцией дохода центра).

Подставляя (20) в (19), получим, что математическое ожидание целевой функции центра при оптимальном составе и оптимальной системе стимулирования агентов будет неотрицательно, если выполнено (21) и:

$$(22)\quad \left(r_0 \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right)^{\alpha} \geq (\alpha - 1)\, u_0\, (u - u_0)^{\alpha - 1}$$

Другими словами, условие (22) является критерием «жизнеспособности» организационной системы, удовлетворяющей предположениям А.7, А.9 и А.14.

Объединим полученные результаты, сформулировав их в виде следующего утверждения.

Утверждение 18. Если выполнены предположения А.7, А.9 и А.14, то оптимальным будет состав, включающий только агентов, тип которых не меньше, чем $\hat{r}_{\min}(u_0, u)$.

Рассмотренная модель может быть обобщена на случай, когда каждая из резервных полезностей зависит от типа агента. Содержательные интерпретации этого прозрачны – например, чем выше квалификация агента, тем выше его резервная полезность (см. также обсуждение предположения А.8 выше). Техника анализа останется прежней – при известной функции $u(r_{min})$ необходимо будет найти максимум выражения (19) по $r_{min} \geq r_0$.

Подчеркнем, что в большинстве моделей, рассмотренных в настоящем разделе, считалось, что премиальный фонд фиксирован. Если при фиксированном премиальном фонде найдено аналитическое решение задачи стимулирования и задачи оптимизации состава, то задача поиска оптимального размера премиального фонда является стандартной задачей оптимизации (максимизации выигрыша центра или эффективности стимулирования по $R \geq 0$), решение которой обычно не вызывает затруднений.

В заключение настоящего раздела отметим, что, формулируя и решая задачу оптимизации состава организационной системы задачу о сокращении), мы ориентировались на экономические показатели и неявно подразумевали, что типы агентов (эффективность их деятельности) не зависят от размера и состава коллектива, в котором они трудятся. В ряде случаев это допущение оправданно. Однако, иногда это не так – из исследований психологов и социологов известно, что результативность и продуктивность деятельности индивидуума может зависеть от наблюдаемых им и/или фактически достигнутых результатов деятельности его коллег. То есть, существенным становится и состав, и размер коллектива – достижение им некоторой «критической массы, особенно в творческих и высококвалифицированных видах деятельности. Наиболее ярким примером могут служить научные коллективы – как отметил Н. Винер: «Вполне вероятно, что 95 % оригинальных научных работ принадлежит меньше, чем 5 % профессиональных ученых, но большая часть из них вообще не была бы написана, если бы остальные 95 % ученых не содействовали созданию общего, достаточно высокого уровня науки» [5, С. 344].

Кроме того, необходимо принимать во внимание, что выше рассматривались статические модели, в которых не нашла отражения динамика типов агентов – например, их рост в процессе научения. Зависимость продуктивности (эффективности, производительности и т.п.) от стажа работы агента должна учитываться дальновидной организацией, так как, действуя локально оптимально, можно уволить сегодня неэффективных (например, имеющих мало опыта) сотрудников, а в недалеком будущем получить «возрастной провал» среди сотрудников среднего возраста.

Построение формальных моделей, описывающих отмеченные эффекты, является перспективным направлением дальнейших исследований и выходит за рамки настоящей работы.

Заключение

Таким образом, в настоящей работе рассмотрен комплекс теоретико-игровых и оптимизационных моделей тарифно-премиальных систем стимулирования (оплаты труда). На основании обзора известных моделей материального стимулирования, приведенного в первой части работы, во второй части сформулирована в общем виде задача синтеза тарифно-премиальной системы оплаты труда (раздел 2.1). Ее решение, полученное в разделе 2.2, основывается на принципе компенсации затрат и обладает следующими свойствами. Во-первых, оптимальный размер тарифной составляющей оплаты труда должен равняться сумме минимальных затрат и резервной полезности агента заданной квалификации. Во-вторых, премиальная составляющая должна компенсировать затраты агента по достижению требуемого центру результата. И, наконец, в третьих, оптимальные планы, назначаемые агентам со стороны центра, должны максимизировать разность между его доходом и затратами на стимулирование агентов. Оказывается, имея результаты решения задачи синтеза оптимальной тарифно-премиальной системы оплаты труда заданного коллектива агентов, можно ставить и решать задачи выбора оптимального состава агентов (см. раздел 2.2). Перечисленные общие подходы позволили разработать модели компенсаторных, линейных, аккордных и бригадных тарифно-премиальных систем стимулирования (см. соответственно разделы 2.3-2.6).

Третья часть настоящей работы посвящена учету индивидуальных различий агентов. Для описания индивидуальных различий предложено использовать распределение Парето (раздел 3.1). Установлена связь формальной модели индивидуальных различий с задачей стимулирования (раздел 3.3), сформулированы и решены задачи тарифно-премиального стимулирования разнородного коллектива агентов в условиях полной информированности (раздел 3.4), а также в условиях внешней (раздел 3.2) и внутренней (раздел 3.5) вероятностной неопределенности. Раздел 3.6 содержит решение задачи оптимизации состава организационных систем, включающих разнородных агентов.

Литература

(работы, отмеченные звездочкой, можно найти в электронной библиотеке на сайте www.mtas.ru)

1 Арутюнов В.С., Стрекова Л.Н. Социологические основы научной деятельности. М.: Наука, 2003. – 299 с.

2 *Баркалов С.А., Новиков Д.А., Попов С.С. Индивидуальные стратегии предложения труда: теория и практика. М.: ИПУ РАН, 2002. – 109 с.

3 *Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А. Теория графов в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2001. – 124 с.

4 Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977. – 255 с.

5 Винер Н. Я – математик. М.: Наука, 1964. – 355 с.

6 *Галинская Е.В., Иващенко А.А., Новиков Д.А. Модели и механизмы управления развитием персонала. М.: ИПУ РАН, 2005. – 68 с.

7 Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976. – 327 с.

8 *Губко М.В. Задача теории контрактов для модели простого активного элемента / Управление в социально-экономических системах. Сборник трудов молодых ученых ИПУ РАН. М.: Фонд «Проблемы управления», 2000. С. 9 – 19.

9 *Губко М.В. Механизмы управления организационными системами с коалиционным взаимодействием участников. М.: ИПУ РАН, 2003. – 118 с.

10 *Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2002. – 148 с.

11 Динова Н.И. Бригадные формы оплаты труда / Механизмы управления социально-экономическими системами. М.: ИПУ РАН, 1988. С. 79 – 82.

12 *Иващенко А.А., Колобов Д.В., Новиков Д.А. Механизмы финансирования инновационного развития фирмы. М.: ИПУ РАН, 2005. – 66 с.

13 *Иващенко А.А., Новиков Д.А., Сапико М.В., Щепкина М.А. Модели и механизмы многокритериального стимулирования в организационных системах. М.: ИПУ РАН, 2006.

14 *Искаков М.Б. Равновесие в безопасных стратегиях // Автоматика и телемеханика. 2005. № 3. С. 139 – 153.

15 *Караваев А.П. Модели и методы управления составом активных систем. М.: ИПУ РАН, 2003. – 151 с.

16 *Коргин Н.А. Механизмы обмена в активных системах. М.: ИПУ РАН, 2003. – 126 с.

17 *Кочиева Т.Б., Новиков Д.А. Базовые системы стимулирования. М.: Апостроф, 2000. – 108 с.

18 Кох Р. Принцип 80/20. Минск: Попурри, 2004. – 352 с.

19 *Новиков Д.А., Глотова Н.П. Модели и механизмы управления образовательными сетями и комплексами. М.: ИУО РАО, 2004. – 142 с.

20 *Новиков Д.А. Закономерности итеративного научения. М.: ИПУ РАН, 1998. – 96 с.

21 *Новиков Д.А. Институциональное управление организационными системами. М.: ИПУ РАН, 2003. – 68 с.

22 *Новиков Д.А. Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. М.: Фонд «Проблемы управления», 1999. – 150 с.

23 Новиков Д.А. Стимулирование в организационных системах. М.: Синтег, 2003. – 312 с.

24 *Новиков Д.А. Стимулирование в социально-экономических системах (базовые математические модели). М.: ИПУ РАН, 1998. – 216 с.

25 *Новиков Д.А., Суханов А.Л. Модели и механизмы управления научными проектами в ВУЗах. М.: Институт управления образованием РАО, 2005. – 80 с.

26 Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. М.: МПСИ, 2005. – 584 с.

27 *Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы стимулирования в многоэлементных организационных системах. М.: Апостроф, 2000 – 184 с.

28 Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Рефлексивные игры. М.: Синтег, 2003. – 160 с.

29 Токарев Д.В. Оценка вероятностей возникновения аварий // Нефтегазовое дело. 2005 (www.ogbus.ru).

30 Цыганов В.В. Адаптивные механизмы в отраслевом управлении М.: Наука, 1991. – 166 с.

31 *Щепкин А.В. Механизмы внутрифирменного управления. М.: ИПУ РАН, 2001. – 80 с.

32 Юдкевич М.М., Подколзина Е.А., Рябинина А.Ю. Основы теории контрактов: модели и задачи. М.: ГУ ВШЭ, 2002. – 352 с.

33 Яблонский А.И. Модели и методы исследования науки. М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 400 с.

34 Armstrong M. Reward management. London, 2000. – 804 p.

35 Champernowne D.G. A model of income distribution // Economic Journal. 1953. Vol. 63. P. 318 – 351.

36 Davis H. The analysis of economic time series. Monograph № 6 of the Cowles Commission for Research in Economics, 1941.

37 Hart O.D., Holmstrom B. Theory of contracts // Advances in economic theory. 5-th World Congress. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987. P. 71 – 155.

38 Juran J. Quality control handbook. NY: McGraw-Hill, 1951. – 750 p.

39 Krugman P. The self-organizing economy. Cambridge: Blackwell, 1996.

40 Levy M. Market efficiency, the Pareto wealth distribution and the Levy distribution of stock returns. Jerusalem: Hebrew University, 2001. – 52 p.

41 Lotka A. The frequency distribution of scientific productivity // Journal of Washington Academy of science. 1926. Vol. 16. P. 317 – 323.

42 Mas-Collel A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic theory. N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995. – 981 p.

43 McAfee R.P., McMillan J. Optimal contracs for teams // International Economic Review. 1991. Vol. 32. № 3. P. 561 – 577.

44 Myerson R.B. Game theory: analysis of conflict. London: Harvard Univ. Press, 1991. – 568 p.

45 Pareto V. Cours d’Economique Politique. Vol. 2. 1897.

46 Pareto V. Manuele d’Economia Politica. 1906.

47 Simon H. On a class of skew distributions / Biometrica. 1957.

48 Wold H., Whittle P. A model, explaining a Pareto distribution of wealth // Econometrica. 1957. Vol. 25. P. 591 – 595.

49 Zipf G. Human behavior and the principle of least effort. Cambridge: Addison-Westley, 1949.