Системы управления и информационные технологии. 2004. № 5.

УДК 519

ОБ УСЛОВИЯХ СТАЦИОНАРНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ РЕФЛЕКСИВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Казанцев С.Б., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.
(*Институт проблем управления РАН, Москва,*
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва)
novikov@ipu.ru

В работе рассматриваются свойства линейных рефлексивных отображений игр двух лиц. Получено условие стационарности рефлексивных отображений.

The paper considers the properties of linear reflexive mappings for two-person games. Condition of the reflexive mappings stationarity is presented.

1. Понятия рефлексивной игры и информационного равновесия

Предположим, что информированность агентов описывается информационной структурой $I = (I_1, I_2, ..., I_n)$, где $I_i = (\theta_i, \theta_{ij}, \theta_{ijk}, ...)$, $i, j, k \in N$, – структура информированности i-го агента, $i \in N = \{1,2,...,n\}$ – множество агентов, $\theta_i \in \Omega$ – его представления о состоянии природы, $\theta_{ij} \in \Omega$ – его представления о представлениях j-го агента, $\theta_{ijk} \in \Omega$ – представления i-го агента о том, что j-ый агент думает о представлениях k-го агента и т.д. в общем случае до бесконечности [1]. Если задана структура информированности I, то тем самым задана и структура информированности каждого из агентов (как реальных, так и фантомных – то есть существующих в сознании других реальных и фантомных агентов). Выбор τ-агентом, где τ – некоторая последовательность индексов из множества N, своего действия x_τ в рамках гипотезы рационального поведения определяется его структурой информированности I_τ, поэтому, имея эту структуру, можно смоделировать его рассуждения и определить его действие. Выбирая свое действие, агент моделирует действия других агентов (осуществляет рефлексию). Поэтому при определении исхода игры необходимо учитывать действия как реальных, так и фантомных агентов.

Обозначим Σ_+ – множество всевозможных конечных последовательностей индексов из N, Σ – объединение Σ_+ с пустой последовательностью, |σ| – количество индексов в последовательности σ (для пустой последовательности принимается равным нулю).

Рефлексивная игра в нормальной форме задается кортежем $\{N, (X_i)_{i\in N}, (f_i(\cdot))_{i\in N}, I\}$, где N – множество игроков (агентов), X_i – множество допустимых действий i-го игрока, $f_i(\cdot): \Omega \times X' \to \Re^1$ – его целевая функция, $X' = \prod_{i \in N} X_i$, $i \in N$, I – структура информированности. Определим равновесие этой игры. Набор действий x_τ^*, $\tau \in \Sigma_+$, называется информационным равновесием [1], если выполнены следующие условия:

1. структура информированности I имеет конечную сложность ν, то есть, дерево I содержит конечный набор попарно различных поддеревьев [1];
2. $\forall \lambda, \mu \in \Sigma_+ \; I_\lambda = I_\mu \Rightarrow x_\lambda^* = x_\mu^*$;
3. $\forall\, i \in N$, $\forall\, \sigma \in \Sigma$

$$x_{\sigma i}^* \in \operatorname{Arg}\max_{y_i \in X_i} f_i(\theta_{\sigma i}, x_{\sigma i1}^*, \dots, x_{\sigma i,i-1}^*, y_i, x_{\sigma i,i+1}^*, \dots, x_{\sigma in}^*).$$

Будем рассматривать регулярные структуры информированности [1], для задания которых введем вспомогательное понятие регулярного конечного дерева (РКД), которое определим рекуррентно. Пусть в игре участвуют n агентов. Если (в простейшем случае) все агенты одинаково информированы [1] , то структура информированности имеет сложность n и единичную глубину. Будем представлять эту ситуацию в виде дерева, состоящего из корневой вершины, n ребер и n висячих вершин. Далее РКД может «расти» следующим образом: к каждой висячей вершине τi, $\tau \in \Sigma$, присоединяется ровно (n – 1) ребро, при этом возникает (n – 1) висячая вершина τij, j = 1, …, i – 1, i + 1, …, n. Построенное РКД будем интерпретировать так: если имеется висячая вершина τi, $\tau \in \Sigma$, то τi-агент одинаково информирован с τ-агентом (если τ – пустая последовательность, то τi-агент является реальным, и его субъективные представления совпадают с объективными).

Напомним, что, во-первых, максимальная глубина k_i РКД i-го реального агента в [1] названа рангом его рефлексии. Во-вторых, любая конечная регулярная информационная структура однозначно (с учетом аксиомы автоинформированности [1] – $\forall\, i \in N \;\; \forall\, \tau, \sigma \in \Sigma \;\; \theta_{\tau i i \sigma} = \theta_{\tau i \sigma}$) задается перечислением своих висячих вершин.

2. Рефлексивные отображения

Обозначим множество параметрических (параметр – вектор $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \in \Omega^n$) равновесий Нэша

$$E_N(\boldsymbol{\theta}) = \{\{x_i(\boldsymbol{\theta})\}_{i \in N} \in X' \mid \forall\, i \in N,\; \forall\, y_i \in X_i,\; f_i(\theta_i, x_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, x_n(\boldsymbol{\theta})) \geq f_i(\theta_i, x_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, x_{i-1}(\boldsymbol{\theta}), y_i, x_{i+1}(\boldsymbol{\theta}), \dots, x_n(\boldsymbol{\theta}))\}. \quad (1)$$

Предположим, что на нижнем уровне $\{\theta_{\tau ij}\}_{j \in N}$ конечной регулярной структуры информированности имеет место субъективное общее знание [1] фантомных агентов. Тогда с точки зрения τi-агента возможными являются равновесия их игры из множества $E_N(\{\theta_{\tau ij}\}_{j \in N})$. Введем множество наилучших ответов i-го агента на выбор оппонентами действий из множества X_{-i} при множестве Ω возможных состояний природы:

$$BR_i(\Omega, X_{-i}) = \bigcup_{x_{-i} \in X_{-i},\, \theta \in \Omega} \operatorname{Arg} \max_{x_i \in X_i} f_i(\theta, x_i, x_{-i}),\ i \in N, \quad (2)$$

а также следующие величины и множества

$$E_N = \bigcup_{(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) \in \Omega^n} E_N(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n), \quad (3)$$

$$X_i^0 = \mathrm{Proj}_i\, E_N,\ i \in N, \quad (4)$$

$$X_{-i}^k = \prod_{j \neq i} X_j^k,\ i \in N,\ k = 0, 1, 2, \ldots, \quad (5)$$

где

$$X_i^k = BR_i(\Omega, X_{-i}^{k-1}),\ k = 1, 2, \ldots,\ i \in N. \quad (6)$$

Отображение $BR_i(\cdot, \cdot)$: $\Omega \times X_{-i} \to X_i$ называется рефлексивным отображением i-го агента, $i \in N$ [1].

Утверждение 1. $X_i^k \subseteq X_i^{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots$, $i \in N$, то есть с ростом ранга рефлексии множества (6) возможных наилучших ответов агентов не сужаются.

Доказательство утверждения 1 повторяет доказательство утверждения 14 в [1] с учетом независимости структур информированности реальных агентов.

3. Проблема максимального ранга рефлексии

Таким образом, информационное равновесие может быть вычислено следующим образом. Если на нижнем уровне конечной регулярной структуры информированности имеет место субъективное общее знание, то исходом игры соответствующих фантомных агентов будет параметрическое равновесие Нэша (1). Обозначим это равновесие g, $g = (g_1, \ldots g_n) \in X'$. Тогда агенты следующего (более высокого) уровня выберут действия, являющиеся в рамках их информированности наилучшими ответами на обстановку, соответствующую этому равновесию. Аналогичным образом поступят агенты следующего уровня и т.д., вплоть до реальных агентов. Поясним описанную конструкцию на примере двух агентов. Если на нижнем уровне РКД имеется равновесие g, то с точки зрения, например, первого – реального – агента он должен выбрать действие $x_1 = BR_1(\theta_1, BR_2(\theta_{12}, \ldots BR_i(\theta_{1\tau i}, g_{-i})))$ (i = 1 или 2 в зависимости от четности глубины РКД). В общем же случае действия реальных и фантомных агентов будут описываться системой итерированных отображений (6), начальной точкой для которых будет параметрическое равновесие Нэша *g*, «сложившееся» на нижнем уровне РКД.

Рассуждения о свойствах рефлексивных отображений оказываются существенными при рассмотрении задачи о *максимальном целесообразном ранге рефлексии*, в рамках которой для каждого реального агента требуется определить минимальный ранг рефлексии, при котором множество его равновесных действий охватывает все многообразие равновесных действий своих в рефлексивной игре (при различных вариантах структуры информированности). Данная задача является математической формулировкой вопроса о том, насколько сложную структуру информированности требуется сформировать управляющему органу – центру – при осуществлении информационного управления [1].

Рефлексивное отображение *i*-го агента называется *стационарным*, если $X_i^k = X_i^{k+1}$, k = 0, 1, … .

<u>Утверждение 2.</u> Если рефлексивные отображения агентов стационарны, то максимальный целесообразный ранг рефлексии равен двум и множество действий *i*-го агента, которые могут быть реализованы как компоненты информационного равновесия, составляет X_i^0, $i \in N$. При этом множество информационных равновесий составляет $E = \prod_{i \in N} X_i^0$.

Доказательство утверждения 1 повторяет доказательство утверждения 16 в [1] с учетом независимости структур информированности реальных агентов.

Таким образом, если рефлексивные отображения стационарны, то при осуществлении информационного управления увеличивать ранг рефлексии, свыше второго, не имеет смысла. Исследуем условия стационарности рефлексивных отображений для игр двух лиц.

4. Линейные рефлексивные отображения в играх двух лиц

Рассмотрим целевые функции агентов, являющиеся многочленами второй степени по действиям агентов:

$$f_i(\theta, x_1, x_2) = \varphi_i(\theta) x_i^2 + \psi_i(\theta) x_i x_j + \eta_i(\theta) x_i, (7)$$

$$\theta \in \Omega = [\alpha, \beta] \subset R^1, \ (8)$$

функции φ_i, ψ_i, η_i непрерывны, причем потребуем, чтобы:

$$\varphi_i(\theta) < 0, \theta \in \Omega \ (9)$$

– условие наличия максимума у целевых функций,

$$4\varphi_2(\theta_2)\varphi_1(\theta_1) - \psi_2(\theta_2)\psi_1(\theta_1) \neq 0,$$

$$\forall \theta_1, \theta_2 \in \Omega \ (10)$$

– это условие, как мы увидим в дальнейшем, гарантирует конечность множества субъективных равновесий.

Множества допустимых действий агентов:

$$X_i = [L_i, R_i] \subset R^1, \ (11)$$

Вычислим производные целевых функций (7):

$$f'_{i\,x_i}(\theta, x_1, x_2) = 2\varphi_i(\theta) x_i + \psi_i(\theta) x_j + \eta_i(\theta). \ (12)$$

Функции наилучших ответов в рассматриваемом случае являются линейными:

$$\begin{cases} BR_i(\theta, x_j) = -\dfrac{\psi_i(\theta)x_j + \eta_i(\theta)}{2\varphi_i(\theta)}, \text{ если} \\ -\dfrac{\psi_i(\theta)x_j + \eta_i(\theta)}{2\varphi_i(\theta)} \in X_i > R_i, \qquad (13) \\ BR_i(\theta, x_j) = R, \text{ если} \\ -\dfrac{\psi_i(\theta)x_j + \eta_i(\theta)}{2\varphi_i(\theta)} > R_i, \ (14) \\ BR_i(\theta, x_j) = L, \text{ если} \\ -\dfrac{\psi_i(\theta)x_j + \eta_i(\theta)}{2\varphi_i(\theta)} < L_i. \ (15) \end{cases}$$

Будем считать далее, что выполняется условие (13), то есть, максимумы парабол из семейств f_i лежат в X_i при любом $x_j \in X_j$.

Множество субъективных равновесий Нэша игры на нижнем уровне является решением системы уравнений:

$$\begin{cases} x_2 = BR_2(\theta_2, x_1) = -\dfrac{\psi_2(\theta_2)x_1 + \eta_2(\theta_2)}{2\varphi_2(\theta_2)}, \ (16) \\ x_1 = BR_1(\theta_1, x_2) = -\dfrac{\psi_1(\theta_1)x_2 + \eta_1(\theta_1)}{2\varphi_1(\theta_1)}. \ (17) \end{cases}$$

при различных значениях параметров $\theta_1, \theta_2 \in \Omega$.

Решая систему уравнений (16), (17) получаем множество равновесий:

$$X_i^0(\theta_i, \theta_j) = \frac{\psi_i(\theta_i)\eta_j(\theta_j) - 2\varphi_j(\theta_j)\eta_i(\theta_i)}{4\varphi_j(\theta_j)\varphi_i(\theta_i) - \psi_j(\theta_j)\psi_i(\theta_i)},$$

$$\theta_i, \theta_j \in \Omega. \ (18)$$

Отметим, что, в силу непрерывности функций φ_i, ψ_i, η_i и определения множества Ω, множество X_i^0 является отрезком R^1.

Подставим (18) в (16), (17):

$$X_i^1(\theta_i, \theta_j, \theta_i^1) = -\frac{\psi_i(\theta_i^1)}{2\varphi_i(\theta_i^1)} X_j^0(\theta_i, \theta_j) - \frac{\eta_i(\theta_i^1)}{2\varphi_i(\theta_i^1)},$$

$$\theta_i, \theta_j, \theta_j^1 \in \Omega. \ (19)$$

Подставляя (19) в (16), (17), получаем выражение для преобразования множества X_i^0 в X_i^2:

$$X_i^2(\theta_i, \theta_j, \theta_j^1, \theta_i^2) = -\frac{\psi_i(\theta_i^2)}{2\varphi_i(\theta_i^2)} X_j^1 - \frac{\eta_i(\theta_i^2)}{2\varphi_i(\theta_i^2)} =$$

$$= -\frac{\psi_i(\theta_i^2)}{2\varphi_i(\theta_i^2)}\left(-\frac{\psi_j(\theta_j^1)}{2\varphi_j(\theta_j^1)}X_i^{\,0} - \frac{\eta_j(\theta_j^1)}{2\varphi_j(\theta_j^1)}\right) - \frac{\eta_i(\theta_i^2)}{2\varphi_i(\theta_i^2)} =$$

$$= \frac{\psi_i(\theta_i^2)}{2\varphi_i(\theta_i^2)}\frac{\psi_j(\theta_j^1)}{2\varphi_j(\theta_j^1)}X_i^{\,0}(\theta_i, \theta_j) +$$

$$X_i^{\,0}(\theta_i^{\,2}, \theta_j^{\,1})\left(1 - \frac{\psi_i(\theta_i^2)}{2\varphi_i(\theta_i^2)}\frac{\psi_j(\theta_j^1)}{2\varphi_j(\theta_j^1)}\right), \quad (20)$$

$\theta_i, \theta_j, \theta_j^{\,1}, \theta_i^{\,2} \in \Omega.$

Утверждение 3. Рефлексивное отображение игры (7), (8), (9), (10), (11), (13) стационарно тогда и только тогда, если выполняется вложение:

$$0 \le \frac{\psi_i(\theta_i)}{2\varphi_i(\theta_i)}\frac{\psi_j(\theta_j)}{2\varphi_j(\theta_j)} \le 1. \quad (21)$$

для всех $\theta_i, \theta_j \in \Omega$.

Доказательство. Достаточно показать, что преобразование (20) множества $X_i^{\,0}$ в $X_i^{\,2}$ оставляет его неизменным. Учитывая, что множества $X_i^{\,k}$ являются отрезками R^1, а, следовательно, выпуклы, это утверждение следует непосредственно из (20).

Пример

Пусть целевые функции имеют вид (7) где $\varphi_i(\theta) = -1$, $\psi_i(\theta) = 1$, $\eta_i(\theta) = \theta$, $i = 1, 2$, $\Omega = [-1, 1]$, $X_1 = X_2 = [-10, 10]$. Нетрудно проверить, что все условия утверждения 3 выполнены, то есть рефлексивные отображения являются стационарными.

Заключение

Получены необходимые и достаточные условия стационарности линейных рефлексивных отображений (утверждение 3) для игр двух лиц, что, в силу утверждения 2 позволяет ограничиться при исследовании задачи информационного управления рассмотрением моделей, в которых ранг рефлексии не превышает двух. Перспективным направлением дальнейших исследований представляется получение условий стационарности нелинейных рефлексивных отображений для игр многих лиц.

Список литературы

1. Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Рефлексивные игры. М.: СИНТЕГ, 2003. – 160 с.