УДК 519.714.3

© 2002 г. С.В. Леонтьев, канд. техн. наук
Д.А. Новиков, д-р техн. наук
С.Н. Петраков

(Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН, Москва)

КРИТЕРИАЛЬНОЕ И МОТИВАЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ В АКТИВНЫХ СИСТЕМАХ

Формулируются и решаются задачи критериального и мотивационного управления в активных системах, заключающиеся в изменении управляющим органом – центром – целевых функций управляемых субъектов – активных элементов – путем добавления к целевой функции каждого элемента, соответственно, взвешенных целевых функций других элементов или сбалансированной системы трансфертов между элементами. В качестве примера рассматриваются линейные активные системы.

1. Введение

Задача управления активной системой (АС), решаемая центром, заключается в выборе таких значений управляющих переменных, которые приведут систему в наиболее благоприятное с точки зрения центра состояние [1, 2]. Состояние АС при заданном управлении определяется совокупностью стратегий, выбираемых активными элементами (АЭ), которые в силу своей активности стремятся максимизировать собственные целевые функции. В многоэлементных АС [3] в качестве состояния системы принимается равновесие Нэша игры АЭ [4] при заданном управлении центра.

В настоящей работе рассматриваются два возможных типа управлений: критериальное управление [5-9], в рамках которого целевая функция каждого из участников АС является композицией (или монотонно связана в смысле [6]) целевых функций других участников, и мотивационное управление [4, 7], в рамках которого центр обладает возможностью аддитивно добавлять в целевые функции АЭ некоторые функции от их стратегий. Приведенное определение мотивационного управления соответствует задаче стимулирования, подробно исследованной в [2, 3, 7, 10], поэтому ограничимся случаем сбалансированного мотивационного управления, при котором система трансфертов между АЭ должна быть сбалансирована (сумма выплат не должна превышать наперед заданной величины). В качестве примеров рассматриваются задачи планирования и стимулирования в линейных АС.

2. Описание модели

Рассмотрим одноуровневую АС, состоящую из n АЭ. Стратегией каждого АЭ является выбор действия $y_i \in A_i$, $i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множеству АЭ. Целевая функ-

-

ция (функция полезности, выигрыша, предпочтения и т.д.) каждого АЭ $h_i(\cdot)$ зависит от действий всех АЭ $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in A' = \prod_{i=1}^{n} A_i$, т.е. $h_i : A' \to \Re_1^+$, $i \in I$. Предположим, что АЭ полностью информированы друг о друге (каждому известны все целевые функции и допустимые множества), но вынуждены действовать независимо, не делая предположений о поведении других АЭ (этим предположением исключаются из рассмотрения кооперативные эффекты – возможности образования коалиций и т.д., а также эффекты рефлексии, используемые при определении Байесовского равновесия, равновесия Штакельберга, П-решения и др. [4]). Тогда, в соответствии с гипотезой рационального поведения [1, 4], каждый АЭ будет выбирать собственную стратегию, максимизирующую его целевую функцию. Так как эта стратегия не единственна и для i-го АЭ зависит от обстановки игры $y_{-i} = (y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n) \in A'_{-i} = \prod_{j \neq i} A_j$ (вектора стратегий остальных АЭ), то необходимо введение понятия равновесия, а иногда и его доопределение для конкретной игры [4].

Если оптимальная стратегия каждого из игроков не зависит от обстановки, то имеет место равновесие в доминантных стратегиях (РДС) [1, 4]: $y^d \in A'$ – РДС тогда и только тогда, когда

(1) $\forall i \in I \ \forall y_{-i} \in A'_{-i} \ \forall y_i \in A_i \ \ h_i(y_i^d, y_{-i}) \geq h_i(y_i, y_{-i})$.

Множество РДС обозначим E_d. К сожалению, РДС существует достаточно редко, поэтому в некооперативных играх чаще используется концепция равновесия Нэша (РН) [1, 4]: $y^N \in A'$ – РН тогда и только тогда, когда

(2) $\forall i \in I \ \forall y_i \in A_i \ \ h_i(y_i^N, y_{-i}^N) \geq h_i(y_i, y_{-i}^N)$.

Множество РН обозначим E_N. Определим множество Парето-оптимальных (эффективных) стратегий:

(3) $E_P = \{y \in A' \mid \forall t \neq y \ \exists i \in I: h_i(t) < h_i(y)\}$.

Достаточные условия непустоты множеств E_d, E_N и E_P приведены в [4]. Обозначим E_{NP} множество равновесий Нэша, которые не доминируются по Парето другими равновесиями Нэша, E_{PN} – множество тех Парето оптимальных стратегий, которые являются равновесиями Нэша.

Вопрос о том, какой вектор стратегий выберут АЭ, производя этот выбор в условиях полной информированности о целевых функциях и допустимых множествах друг друга одновременно, без предварительных договоренностей, в общем случае остается открытым. Если существует РДС, то обычно предполагают [1, 4], что АЭ выберут именно доминантные стратегии. Если РДС не существует, то в качестве состояния системы обычно принимается равновесие Нэша. Если РН несколько и среди них существуют РН, недоминируемые по Парето другими РН, то, как правило, считают [3, 4], что, скорее всего система окажется в E_{NP}. Если же все РН эффективны, то оценить априори однозначно состояние АС нельзя. В общем случае, всегда выполнено: $E_d \subseteq E_N$, $E_{NP} \subseteq E_N$, но может оказаться, что $E_{NP} \cap E_P = \varnothing$ или $E_d \cap E_P = \varnothing$ (см. примеры в [1-4, 7, 10]).

Содержательно, концепции равновесия в доминантных стратегиях и равновесия Нэша отражают индивидуальную рациональность поведения активных элементов. В

-
первом случае – независимо от обстановки существует оптимальная стратегия, во втором – индивидуальное отклонение любого АЭ от РН невыгодно ему, если все остальные АЭ не отклоняются от РН. К сожалению, во многих случаях индивидуальная рациональность входит в противоречие с коллективной рациональностью (условно отражаемой аксиомой Парето). Противоречие следующее – с одной стороны, набор индивидуально рациональных стратегий (например, РДС, РН и т.д.) может доминироваться другим набором стратегий (при котором все АЭ получают не меньшие выигрыши, а кто-то – строго большие). С другой стороны, коллективно рациональных стратегии (множество Парето оптимальных стратегий) может быть несколько, а они могут быть неустойчивы относительно индивидуальных отклонений АЭ (может найтись АЭ, который один, изменяя свою стратегию, еще более увеличивает свой выигрыш за счет других игроков).

Соотношение индивидуальной и коллективной рациональности является одной из ключевых проблем теории игр (см. примеры и ссылки в [3, 4, 7]). Интуитивно ясно, что если существует лучшая для всех АЭ (по сравнению с индивидуально рациональным) линия поведения (при условии, что коалиции, переговоры и т.д. запрещены), то следует выработать процедуру (механизм) наказания тех АЭ, которые будут от нее отклоняться.

Следует отметить, что механизм наказания является "внешним" по отношению к АЭ и зачастую либо навязывается им извне, например, центром, либо является предметом их договоренности (расширение игры [2]). Если последовательно разыгрывается несколько партий игры, то, изменяя свои стратегии, АЭ могут в текущем и будущих периодах наказать участника, отклонившегося в предыдущем периоде. Задачи построения таких стратегий решаются в теории повторяющихся игр (см., например, обзор [11] и ссылки в нем). Сложнее дело обстоит в статике – при разыгрывании одной единственной партии игры, так как в этом случае угроза будущего наказания со стороны партнеров бессмысленна.

Угроза наказания приобретает смысл в статике, если имеется третье (по отношению к АЭ) лицо, наделенное соответствующими властными полномочиями [2, 7, 10], например – центр. Осуществляя управление, т.е. поощряя АЭ, налагая на них штрафы и т.д., центр может сделать невыгодным индивидуальное отклонение от коллективного оптимума, то есть сделать Парето оптимальную стратегию устойчивой по Нэшу. Это – первое, что может предложить центр АЭ, причем ниже будет показана выгодность этого для АЭ с точки зрения значений их функций выигрыша. Второй эффект от введения центра заключается в снижении объема информации, перерабатываемой АЭ. Действительно, для "вычисления", например, РН каждый из АЭ должен знать целевые функции и допустимые множества всех АЭ с тем, чтобы, опять же, каждый из них мог независимо решить систему неравенств (2). При введении центра, последнему достаточно, обладая информацией о каждом из АЭ (информированность АЭ друг о друге уже не нужна), вычислить все равновесия, разработать систему наказания и дать соответствующую информацию АЭ. Перейдем к формальному описанию качественно отмеченных выше эффектов.

Фиксируем два вектора стратегий $y, z \in A'$ и определим "выигрыш" i-го АЭ от "перехода" из точки y в точку z:

-

(4) $\Delta_i(y, z) = h_i(z) - h_i(y),\ i \in I$,

и суммарный выигрыш АЭ от этого перехода:

(5) $\Delta(y, z) = H_0(z) - H_0(y)$,

где $H_0(y) = \sum_{i=1}^{n} h_i(y)$.

Отметим, что $H_0(y)$ является утилитарной функцией коллективной полезности, свойства которой подробно исследуются, например, в [12]. Содержательно, функция $H_0(y)$ может интерпретироваться как целевая функция "системы" из n АЭ. Функция $H_0(y)$ согласована с отношением доминирования по Парето в следующем смысле: если вектор z Парето-доминирует вектор y, то $H_0(z) \geq H_0(y)$ (обратное, вообще говоря, не верно).

Введем в рассматриваемой модели управление, то есть перейдем от описанной выше одноуровневой АС к двухуровневой АС с тем же составом участников на нижнем уровне и одним управляющим органом – центром – на верхнем уровне иерархии.

Под критериальным управлением в настоящей работе будем понимать выбор центром действительнозначных констант $\alpha_{ij},\ i, j, \in I$, с которыми в качестве весов в «новую» (конструируемую центром) целевую функцию АЭ входят «старые» целевые функции АЭ (примером является рассматриваемая в [13] модель):

(6) $f_i(\boldsymbol{\alpha}, y) = \sum_{j \in I} \alpha_{ij} h_j(y),\ i \in I$,

где $\boldsymbol{\alpha} = ||\alpha_{ij}||_{i, j, \in I}$. Равновесия игры АЭ оказываются зависящими от матрицы $\boldsymbol{\alpha}$, то есть $E_d = E_d(\boldsymbol{\alpha}),\ E_N = E_N(\boldsymbol{\alpha}),\ E_P = E_p(\boldsymbol{\alpha})$.

Мотивационному управлению соответствует введение системы стимулирования $\{\sigma_i(y)\}$, с учетом которой целевая функция i-го АЭ примет вид:

(7) $f_i(y) = h_i(y) - \sigma_i(y),\ i \in I$.

Равновесия игры АЭ оказываются зависящими от вектора $\sigma(\cdot) = \{\sigma_1(\cdot),\ \sigma_2(\cdot),\ \ldots,\ \sigma_n(\cdot)\}$, то есть $E_d = E_d(\sigma),\ E_N = E_N(\sigma),\ E_P = E_p(\sigma)$.

Пусть $\Phi(y, \boldsymbol{\alpha})$ – скалярный критерий эффективности управления, определенный на множестве A'. Тогда задача критериального управления может быть сформулирована как (всюду, где используются максимумы или минимумы, предполагается, что они достигаются):

(8) $\min_{y \in E_N(\boldsymbol{\alpha})} \Phi(y, \boldsymbol{\alpha}) \to \max_{\boldsymbol{\alpha}}$.

Предположим, что в задаче мотивационного управления фигурирует бюджетное ограничение C на суммарное стимулирование. Обозначим для фиксированного вектора $\sigma(\cdot)$ $E_C(\sigma) = E_N(\sigma) \cap \{y \in A' \mid \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(y) \leq C\}$ – множество действий, для которых суммарные выплаты центра по их реализации не превышают бюджетного ограничения. Тогда задача мотивационного управления может быть сформулирована как

(9) $\min_{y \in E_C(\sigma)} \Phi(y) \to \max_{\sigma}$.

Перейдем к решению задач (8) и (9).

-

3. Критериальное управление и стимулирование в активных системах с сообщением информации

Пусть в задаче критериального управления (8) функции выигрыша АЭ представлены в виде (6), где $\alpha_{ii} = 1$, $i \in I$, а критерий эффективности (функция выигрыша центра) имеет вид $\Phi(y) = \sum_{i \in I} \beta_i h_i(y)$, $\beta_i \neq 0,\ i \in I$. Положим

(10) $\alpha_{ij} = \dfrac{\beta_j}{\beta_i}$, $i, j \in I$.

Легко показать, что, если точка $y^* \in A'$ является точкой максимума функции $\Phi(y)$, то y^* является равновесием Нэша в АС, в которой применено критериальное управление и функции выигрыша определяются (6), а $\{\alpha_{ij}\}$ определяются (10).

В случае, когда увеличение функций выигрыша АЭ при введении критериального управления $\sum_{\substack{j \in I \\ i \neq j}} \alpha_{ij} h_j(y)$ производится из средств центра, критерий эффективности можно записать следующим образом

(11) $\Phi(y, \alpha) = \sum_{i \in I} \beta_i h_i(y) - \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in I \\ i \neq j}} \alpha_{ij} h_j(y) = \sum_{i \in I} h_i(y) \left(\beta_i - \sum_{\substack{j \in I \\ i \neq j}} \alpha_{ji} \right)$.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Если найдется матрица $\|\alpha_{ij}\|$, элементы которой удовлетворяют уравнениям $\alpha_{ij} = \dfrac{\beta_j - \sum_{\substack{k \in I \\ i \neq k}} \alpha_{kj}}{\beta_i - \sum_{\substack{k \in I \\ i \neq k}} \alpha_{ki}}$, $i, j \in I$, то существует оптимальное критериальное управление, определяемое этой матрицей.

Рассмотрим возможность использования критериального управления в АС с сообщением информации [1, 14] для изменения равновесия Нэша с целью побуждения АЭ к сообщению достоверной информации.

Предположим, что функции полезности АЭ являются однопиковыми [1]: $\varphi_i(x_i, r_i) = -(x_i - r_i)^2$, где $x_i \in R^1$ – план, назначаемый i-му АЭ центром, $r_i \in R^1$ – точка пика функции полезности $\varphi_i(x_i, r_i)$ i-го АЭ, $i \in I$. АЭ сообщают центру сообщения $s_i \in R^1$, $i \in I$, по которым центр назначает планы $x_i = g_i(s)$ в соответствии с процедурой планирования $g(\cdot)$, где $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$.

Рассмотрим произвольный вектор $r^* \in R^n$ точек пика. Функцию полезности i-го АЭ после применения критериального управления с матрицей $\|\alpha_{ij}\|$ в соответствии с (6) запишем следующим образом:

(12) $f_i(g(s)) = -\sum_{j \in I} \alpha_{ij} \left(g_j(s) - r_j \right)^2$, $i \in I$.

-

Поскольку изучается возможность применения критериального управления для побуждения АЭ к сообщению достоверной информации, то запишем условие того, что сообщение $s^* = r^*$ – равновесие Нэша: для всех $i \in I$, для любых $r_i \in R^1$ и для любого $r^* \in R^n$

(13) $- \sum_{j \in I} \alpha_{ij} \left(g_j \left(r_i, r_{-i}^* \right) - r_j^* \right)^2 \le - \sum_{j \in I} \alpha_{ij} \left(g_j \left(r_i^*, r_{-i}^* \right) - r_j^* \right)^2$.

Из (13) следует, что при возможных сообщениях $\hat{r}_i \in R^1$ и применении критериального управления сообщение достоверной информации в равновесии Нэша означает, что сообщение достоверной информации будет и доминантной стратегией.

В случае, если $n = 2$, а процедура планирования линейна, т.е. $g(s) = As$, где $s \in R^2$, а A – квадратная (2×2) матрица, для того, чтобы механизм планирования с процедурой планирования $g(s)$ и множеством возможных сообщений R^n был неманипулируем, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия (см. также [14]):

(14) $(a_{22} - 1)(a_{11} - 1) = a_{21} a_{12}$;

(15) $\alpha_{12} = -\frac{a_{12} a_{11}}{a_{21}(a_{22} - 1)}$, $\alpha_{21} = -\frac{a_{12} a_{22}}{a_{11}(a_{11} - 1)}$, $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 1$.

Таким образом, линейный механизм, удовлетворяющий условиям (14), (15) является неманипулируемым. Следовательно, при построении неманипулируемых механизмов функционирования АС с сообщением информации возможно использование механизмов критериального управления, однако, в силу того, что при критериальном управлении матрица $\left\| \alpha_{ij} \right\|$ одинакова для всех возможных сообщений АЭ, критериальное управления является частным случаем мотивационного и при переходе к мотивационному управлению следует ожидать расширения класса неманипулируемых механизмов планирования в рамках этих моделей.

Описанный в настоящей работе подход к построению неманипулируемых механизмов позволяет наряду с другими подходами [1, 14] строить неманипулируемые механизмы планирования в АС с сообщением информации. Исследование взаимосвязи между подходом критериального управления и методами построения неманипулируемых механизмов, предложенных в [1, 14], а также переход от критериального управления к мотивационному, представляется перспективной темой будущих исследований.

4. Задача мотивационного управления

Рассмотрим задачу (9) в отсутствии бюджетного ограничения ($C = +\infty$). Фиксируем две произвольные точки $v, z \in A'$. В соответствии с результатами, полученными в [2, 3, 7], использование центром системы стимулирования

(16) $\sigma_i(\cdot) = \begin{cases} \Delta_i(v, z) - \delta_i, & y_i = z_i \\ \sigma_i^{\text{Н}}(z_{-i}), & y_i \ne z_i \end{cases}$,

где $\sigma_i^{\text{H}}(z_{-i}) = \max\limits_{y_i \in A_i} h_i(y_i, z_{-i})$ – стратегия наказания АЭ за отклонение от z_i, z_{-i} – обстановка для i-го АЭ в точке z, $\delta_i > 0$ – сколь угодно малая строго положительная константа, превращает z в равновесие Нэша, более выгодное для i-го АЭ, чем точка v, $i \in I$. Заметим, что использованием следующей более "жесткой" системы стимулирования центр может любое действие z_i АЭ сделать его единственной доминантной стратегией:

$$\sigma_i(\cdot) = \begin{cases} -\delta_i, & y_i = z_i \\ \sigma_i^{\text{H}}, & y_i \neq z_i \end{cases}, \quad \sigma_i^H = \max_{y \in A'} h_i(y),\ i \in I.$$

В выражении (16) первый режим соответствует трансферту полезностей (см. также механизм ключевых агентов в [12]), а второй режим – наказанию за индивидуальные отклонения.

Перейдем к анализу балансового (бюджетного) ограничения. Если трансферты полезности соответствуют внутреннему, то есть замкнутому относительно множества АЭ, стимулированию, то сумма трансфертов должна быть неположительна (с точностью до сколь угодно малой строго положительной константы $\delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \delta_i$). Если центр имеет возможность привлечь внешние или использовать собственные средства в размере $C \geq 0$, то балансовое ограничение, то есть условие внутренней сбалансированности, примет вид:

(17) $\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i(v, z) = \Delta(v, z) = H_0(z) - H_0(v) \geq -C$.

Таким образом, с одной стороны, в рамках замкнутого набора АЭ (при $C = 0$) (17) – условие неотрицательности баланса трансфертов, а с другой стороны, как отмечалось выше, это – достаточное условие (с учетом (16)) Парето доминирования точкой z точки v.

Проанализируем роль бюджетного ограничения. Для этого фиксируем произвольную точку $y_0 \in A'$ и определим множество тех действий, в которые АС может быть переведена мотивационным управлением из точки y_0 при заданном балансовом ограничении

(18) $P(y_0, C) = \{y \in A' \mid \Delta(y_0, y) \leq C\}$.

Понятно, что с учетом (18) множество $P(C)$ точек, в которые АС может быть переведена мотивационным управлением из любой точки, есть

(19) $P(C) = \bigcap\limits_{y_0 \in A'} P(y_0, C) = \{y \in A' \mid H(y) \geq \max\limits_{y \in A'} H(y) - C\}$.

Легко показать, что при использовании центром системы стимулирования (16), любая точка множества (19) оптимальна по Парето, то есть $P(C) \subseteq E_{PN}$ (обратное включение в общем случае не верно).

Следовательно, мотивационное управление в ряде случаев позволяет сделать эффективное по Парето коллективное решение устойчивым по Нэшу. Таким образом, справедлив следующий результат.

-

Утверждение 2. При заданном бюджетном ограничении любая точка множества (19) может быть реализована системой стимулирования (16) как эффективное равновесие Нэша.

Имея результаты исследования задачи стимулирования, изучим преимущества и недостатки введения дополнительного уровня иерархии (выделения над множеством АЭ метаигрока – центра).

Введем следующий механизм функционирования АС. Центр предлагает АЭ использовать систему стимулирования (16) с $z \in P(C)$. При этом: вектор z – равновесие Нэша, в котором всем АЭ обеспечивается не меньшая полезность, чем при выборе любого другого индивидуально рационального равновесия; отпадает необходимость получения и обработки АЭ информации о своих партнерах; центр получает во внутренне сбалансированном механизме ненулевую полезность. Итак, выделение над одноуровневой АС дополнительного уровня управления с наделением его правом частично устанавливать правила игры АЭ (в рамках концепции их некооперативного поведения) является взаимовыгодным для центра и для всех АЭ, как с точки зрения снижения на АЭ нагрузки по обработке информации, так и с "экономической" точки зрения – внешнее управление центра делает выгодным и индивидуально рациональным коллективно рациональное (в смысле Парето-эффективности) взаимодействие АЭ.

Рассмотрим вопрос о целесообразности привлечения центром внешних средств. Пусть центру достоверно известно, что в отсутствии управления АЭ выбирают точку y_0 (например, y_0 – РДС). Тогда $[\Delta(y_0, y) - C]$ – косвенный доход центра от побуждения АЭ к выбору точки $y \in P(y_0, C)$. Если $H(y)$ – "собственный" доход (или затраты в случае отрицательного знака) центра от деятельности совокупности АЭ, то оптимальная величина привлеченных средств может быть найдена из решения следующей оптимизационной задачи:

(20) $K(C) = \max\limits_{y \in P(C, y_0)} [H(y) + \Delta(y_0, y) - \delta] - C \to \max\limits_{C \geq 0}$.

Величина

(21) $\gamma(C) = \max\limits_{y \in P(C, y_0)} [H(y) + \Delta(y_0, y) - \delta] / C$

может рассматриваться как рентабельность АС – ее способность "усиливать" привлекаемые средства, причем первое слагаемое отвечает за вклад центра, а второе – за вклад АЭ («налоговые» интерпретации мотивационного управления приведены в [7]).

Следует признать, что в общем случае открытым остается вопрос об идентификации начального состояния АС y_0, так как взятие, например, гарантированного результата по этому параметру может во многих случаях сделать бессмысленным рассмотрение задач типа (20) и величин типа (15).

В качестве иллюстрации использования предложенных выше подходов к описанию и исследованию сбалансированного мотивационного управления рассмотрим частный случай линейных АС.

-

5. Линейные активные системы

Линейными называются АС [7], в которых целевая функция каждого АЭ линейно зависит от стратегий всех АЭ (в терминах третьего раздела $h_i(y) = y_i,\ i \in I$):

$$(22)\ H_i(y) = \alpha_{i0} + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, y_j,$$

причем без потери общности можно считать, что $y_j \in A_j = [0;\ 1]$.

В линейных АС у каждого АЭ существует доминантная стратегия: $y_i^d = Sign(\alpha_{ii})$. Обозначим $\beta_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}$, $\beta_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i0}$. Тогда

$$(23)\ H_0(y) = \beta_0 + \sum_{j=1}^{n} \beta_j\, y_j.$$

Парето оптимальная (доставляющая максимум (8)) стратегия есть:

$$(24)\ y_i^P = Sign\ (\beta_i).$$

Очевидно, что, если $\forall\, i \in I\ \ Sign(\alpha_{ii}) = Sign(\beta_i)$, то РДС является эффективным по Парето. Если $\exists\, i \in I$: $Sign(\alpha_{ii}) \neq Sign(\beta_i)$, то требуется согласование интересов АЭ за счет критериального и/или мотивационного управления. Определим следующие величины:

$$(25)\ \sigma_i(y^d, y^P) = \Delta_i(y^d, y^P) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, [Sign(\beta_j) - Sign(\alpha_{jj})].$$

Легко проверить, что в любых линейных АС выполнено: $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i(y^d, y^P) \leq 0.$

Пусть центр в линейной АС использует следующую систему стимулирования:

$$(26)\ \sigma_i(y_i) = [\Delta_i(y^d, y^P) + \delta_i]\ I(y_i = y_i^P) + \alpha_{ii}\ I(y_i \neq y_i^P),$$

где $I(\cdot)$ – функция индикатор (отметим, что в точке Парето «штрафы» равны нулю).

Система стимулирования (26) обеспечивает каждому АЭ ту же полезность, что и при использовании им доминантной стратегии, причем y^P является равновесием по Нэшу. Более того, центр оставляет в собственном распоряжении ненулевую полезность, равную:

$$(27)\ H_0 = H_0(y^P) - H_0(y^d) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j\, [Sign\ (\beta_j) - Sign\ (\alpha_{jj})] \geq 0,$$

которая может рассматриваться как критерий эффективности управления.

Величина (27) с учетом (22)-(26) может интерпретироваться как мера "системности" набора АЭ: с одной стороны это – доход центра, а с другой – интегральная характеристика рассогласованности предпочтений АЭ. Таким образом, справедлив следующий результат.

У т в е р ж д е н и е 3 . Эффективность мотивационного управления в линейной АС определяется выражением (27). Оптимальным критериальным управлениям является: $Sign(\alpha_{ii}) = Sign(\beta_i)$, $i \in I$.

-

Рассмотрим пример линейной АС [1]: $h_i(y) = y_i + \sum_{j \neq i} (1 - y_j)$, $A_i = [0; 1]$, $n \geq 3$. Очевидно, $y_i^d = 1$, $y_i^P = 0$. При этом $h_i(y^d) = 1$, $h_i(y^P) = n - 1$, то есть $\forall\, i \in I$ $h_i(y^P) > h_i(y^d)$. Вычисляем $H_0(y) = n\,(n - 1) + (2 - n) \sum_{i=1}^{n} y_i$. Воспользовавшись (26), получаем, что $f_i(y) = \sum_{j \neq i} (1 - y_j) - I(y_i \neq y_i^P)$, то есть $E_d \subseteq E_P$. Выигрыш центра равен $H_0 = n\,(n - 1)$.

В рассмотренном примере противоречие между индивидуальными и коллективными интересами было явным (что объясняет значительную величину H_0) и привлечение внешних средств не имело смысла. Приведем пример, в котором рассогласование интересов не столь значительно.

Пусть в линейной АС имеются два АЭ, целевые функции которых равны [7]: $h_1(y) = \alpha\, y_1 - \beta\, y_2$; $h_2(y) = -\gamma\, y_1 + \delta\, y_2$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$; $\alpha < \gamma$, $\delta > \beta$, то есть вклад первого АЭ в свою целевую функцию меньше, чем в целевую функцию второго АЭ, а у второго АЭ – наоборот. Вычисляем: $y^d = (1; 1)$, $y^P = (0; 1)$; $\Delta_1(y^d, y^P) = -\alpha$, $\Delta_2(y^d, y^P) = \gamma$; $H(y) = (\alpha - \gamma)\, y_1 + (\delta - \beta)\, y_2$, $H(y^P) - H(y^d) = \gamma - \alpha > 0$ – эффект организации. Используя систему стимулирования $\sigma_1(y) = -\alpha\, I(y_1 = 0)$, центр добивается того, что Парето оптимальная стратегия каждого АЭ становится доминантной. При этом $f_1(y^P) = f_1(y^d)$, $f_2(y^P) = f_2(y^d)$. Доход центра в равновесии $H_0 = \gamma - \alpha > 0$. Пусть $y^e \in [0; 1]^2$ – желательное с точки зрения внешней среды или центра состояние АС. Например, положим $y^e = (1; 0)$. Тогда $h_1(y^e) = \alpha$, $h_2(y^e) = -\delta$; $\Delta(y^d, y^e) = \delta - \beta > 0$, то есть, используя систему стимулирования $\{\sigma_1(y^d, y^e)$; $\sigma_2(y^d, y^e)\}$, центр побуждает АЭ выбирать состояние y^e.

6. Заключение

Предложенные подходы к постановке и решению задач критериального и сбалансированного мотивационного управления в АС позволяют оценивать их эффективность и условия применимости. Кроме того, в предложенных моделях центр может рассматриваться как еще один АЭ, являющийся метаигроком [2, 10], обладающим правом устанавливать правила игры (в том числе – налагать сбалансированные или несбалансированные штрафы на остальных игроков и т.д.), целевая функция которого есть взвешенная сумма целевых функций АЭ. Такая интерпретация управляющего органа согласована с пониманием коллективной рациональности (объединяющей элементы в организационную систему) как эффективности по Парето.

-

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новиков Д.А., Петраков С.Н.* Курс теории активных систем. М.: Синтег, 1999.
2. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.
3. *Новиков Д.А., Цветков А.В.* Механизмы стимулирования в многоэлементных организационных системах. М.: Апостроф, 2000.
4. *Губко М.В., Новиков Д.А.* Теория игр в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2002.
5. *Бурков В.Н.* Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977.
6. *Бурков В.Н., Новиков Д.А.* Механизмы критериального управления активными системами в задачах стимулирования / Сб. тр. ИПУ РАН, 2000. Т.10. С. 24 – 36.
7. *Новиков Д.А.* Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. М.: Фонд "Проблемы управления", 1999.
8. *Новиков Д.А., Петраков С.Н., Федченко К.А.* Стимулирование в управлении проектами как системообразующий фактор / Тр. Междунар. симпоз. "Совнет' 99". Москва, 8-11 сентября 1999 г.
9. *Абаев Л.Ч.* Учет типологии сторон в играх с непротивоположными интересами / Тр. Международной науч.-практ. конф. «Теория активных систем». М.: ИПУ РАН, 2001. Т. 1. С. 16-18.
10. *Новиков Д.А., Цветков А.В.* Механизмы функционирования организационных систем с распределенным контролем. М.: ИПУ РАН, 2001.
11. *Новиков Д.А.* Механизмы стимулирования в динамических и многоэлементных социально-экономических системах // А. и Т. 1997. № 6. С. 3 – 26.
12. *Мулен Э.* Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. М.: Мир, 1991.
13. *Авдеев В.П.*, *Бурков В.Н., Киселева Т.В.* Многовариантные активные системы // А. и Т. 2001. № 10. С. 118 – 124.
14. *Петраков С.Н.* Достаточные условия существования эквивалентных прямых механизмов планирования в активных системах // А. и Т. 2001. № 10. С. 154 – 162.