

Бурков В.Н., д-р техн. наук, Заложнев А.Ю., канд.ф.-м. наук,  
Новиков Д.А., д-р техн. наук

(Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН, Москва)

## УПРАВЛЕНИЕ РИСКОМ: МЕХАНИЗМЫ ВЗАИМНОГО И СМЕШАННОГО СТРАХОВАНИЯ

В работе рассматриваются теоретико-игровые модели механизмов взаимного и смешанного страхования, в которых страховщик не обладает полной информацией о вероятностях наступления страховых случаев и использует информацию, сообщаемую страхователями.

### 1. Введение

В формальных моделях управления риском, в том числе - страхования [1-3], как правило, не учитываются свойства активности страхователей и страховщиков, проявляющиеся, в частности, в способности исказить информацию (исключение составляет работа [4]). Поэтому ниже рассматриваются модели взаимного и смешанного страхования, в которых страховщик использует информацию, сообщаемую страхователями, для определения параметров страховых контрактов. Предлагается «механизм скидок», в котором каждому страхователю выгодно сообщение достоверной информации.

### 2. Механизмы взаимного страхования

Рассмотрим объединение из  $n$  страхователей (которое в модели взаимного страхования [2] будем считать страховщиком), имеющих целевые функции (определяемые ожидаемыми полезностями)

$$(1) E f_i = g_i - r_i + p_i [h_i - Q_i], \quad i \in \hat{I} \subset I,$$

где  $g_i$  отражает доход от хозяйственной деятельности  $i$ -го страхователя, включая его затраты на эту деятельность и затраты на проведение предупредительных мероприятий;  $r_i$  – страховой взнос;  $h_i$  – страховое возмещение;  $p_i$  – вероятность наступления страхового случая;  $Q_i$  – потери при наступлении страхового случая,  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  – множество страхователей. Для простоты ограничимся описанием взаимодействия страхователей в течение одного промежутка времени, на протяжении которого однократно производится сбор взносов и компенсация ущербов. При этом будем считать, что остатки резервов (разность между собранными взносами и произведенными выплатами), если они положительны, используются в качестве резерва в следующем периоде времени (учет альтернативных способов использования остатков, например, инвестиция их в те или иные проекты, может быть

«автоматически» учтен в рамках описываемой ниже модели, поэтому акцентов на задачах управления инвестициями не делается).

Предположим, что все страхователи одинаково относятся к риску, но различаются вероятностями наступления страхового случая и соответствующими потерями. В [1-4] обосновано, что перераспределение риска взаимовыгодно только для агентов, отличающихся отношением к риску. Поэтому, с одной стороны, можно считать, что все страхователи нейтральны к риску, а, с другой стороны, что основным эффектом, требующим исследования во взаимном страховании, является манипулирование информацией [5] – так как все страхователи одинаково относятся к риску, то допустимо произвольное его перераспределение между ними при условии, что все страхователи обладают полной информацией друг о друге; если же информированность неполная, то есть асимметричная [5], то возможно нарушение требования сбалансированности взносов и ожидаемых выплат.

В условиях полной информированности суммарный страховой взнос равен  $R = \sum_{i \in I} r_i$ , а ожидаемое страховое возмещение равно  $H = \sum_{i \in I} p_i h_i$ . Так как рассматривается взаимное (некоммерческое) страхование, то в силу принципа эквивалентности [1] должно иметь место  $R = H$ , то есть

$$(2) \sum_{i \in I} r_i = \sum_{i \in I} p_i h_i.$$

Если осуществляется полное возмещение ущерба (предположение о полном возмещении ущерба, то есть априорная фиксация предполагаемого уровня страхового возмещения, не изменит качественно основных результатов анализа механизмов взаимного страхования) при наступлении страхового случая ( $h_i = Q_i, i \in I, H = \sum_{i \in I} p_i Q_i$ ), то в условиях полной информированности

можно было бы использовать следующий механизм взаимного страхования:

$$(3) r_i = p_i Q_i, i \in I,$$

в рамках которого страховой взнос каждого страхователя в точности равен его ожидаемому ущербу (страховая сумма совпадает с потерями, а страховой тариф (равный нетто-ставке [1]) равен соответствующей вероятности наступления страхового случая).

Однако, если индивидуальные параметры страхователей известны только им самим (и не наблюдаются другими страхователями), то использование механизма (3) невозможно. Предположим, что потери от страховых случаев  $\{Q_i\}$  наблюдаемы, а вероятности наступления страховых случаев  $\{p_i\}$  ненаблюдаемы, но их оценки  $\{s_i\}$  могут сообщаться страхователями друг другу. Тогда в общем случае все страхователи будут стремиться занизить вероятности наступления страхового случая, следовательно, одним из равновесий будет сообщение минимальных оценок. Поэтому рассмотрим несколько альтернативных механизмов взаимного страхования.

Пусть в страховом договоре оговаривается, что страховой взнос каждого страхователя определятся сообщенными оценками вероятностей наступления страхового случая, то есть  $r_i(s) = s_i Q_i$ , а после наступления страховых случа-

ев возмещение осуществляется пропорционально собранному страховому фонду  $R(s) = \sum_{i \in I} r_i(s)$ , то есть

$$(4) h_i(s) = a(s) Q_i, \quad i \in I,$$

где  $a(s)$  – единая доля страхового возмещения (отношение страхового возмещения  $h_i(s)$  к страховой сумме  $Q_i$ ), определяемая исходя из соотношения между страховым фондом  $R(s)$  и необходимым объемом страхового возмещения  $H$ . Выбор зависимости  $a(s)$  является стратегией управления.

Подставляя (4) в (1), получаем, что условие выгоды участия во взаимном страховании для  $i$ -го страхователя можно записать в виде:

$$(5) s_i \leq a(s) p_i, \quad i \in I.$$

Если используется следующая стратегия управления:

$$(6) a(s) = \min \{R(s) / H, 1\},$$

то получаем, что балансовое условие (2) выполнено всегда, а из (5) следует, что сообщение страхователя не превышает истинного значения вероятности наступления страхового случая:  $s_i \leq a(s) p_i, \quad i \in I$ .

Подставляя (4) и (6) в (1) и вычисляя производную по  $s_i$ , получим, что механизм (6) является манипулируемым, то есть сообщение достоверной информации невыгодно страхователям. Содержательно, каждый из страхователей стремится занижить вероятность наступления страхового случая, так как данное занижение сильнее уменьшает размер страхового взноса, чем долю страхового возмещения.

Альтернативой для (5) является использование следующего механизма взаимного страхования. Пусть страхователи заключают договор, в котором оговаривается, что в начале рассматриваемого периода они должны сообщить оценки вероятностей наступления страхового случая (страховые взносы в начале периода не собираются!), а затем в конце рассматриваемого периода (когда реализовались страховые случаи) они полностью компенсируют «пострадавшим» ущерб, а размер взноса каждого из страхователей определяется на основании сообщенных в начале периода оценок. Ожидаемое возмещение при этом равно  $H = \sum_{i \in I} p_i Q_i$ , следовательно, сумма взносов должна равняться

$H$ , то есть

$$(7) \sum_{i \in I} r_i(s) = H,$$

где зависимости  $r_i(s)$  являются механизмом управления. Ожидаемое значение целевой функции страхователя имеет вид:

$$(8) Ef_i = g_i - r_i(s), \quad i \in I,$$

а условие выгоды участия во взаимном страховании:

$$(9) r_i(s) \leq p_i Q_i, \quad i \in I.$$

Если выбрать следующий механизм управления, при котором взнос каждого страхователя пропорционален сообщенному им ожидаемому ущербу:

$$(10) r_i(s) = \frac{s_i Q_i}{\sum_{i \in I} s_i Q_i} H, \quad i \in I,$$

то максимум (8) достигается при минимальных сообщениях, то есть механизм (10) также является манипулируемым.

Анализ условий (9)-(10) подсказывает, что для того, чтобы уменьшить искажение информации следует выбрать такой механизм управления, в котором размер страхового взноса убывал бы с ростом заявки страхователя. Примером может служить механизм

$$(11) r_i(s) = \frac{1/s_i}{\sum_{i \in I} (1/s_i)} H, \quad i \in I.$$

Подставляя (11) в (8), получаем, что механизм (11) не побуждает страхователей занижать заявки, но он и не обеспечивает сообщения достоверной информации.

Таким образом, каждый из механизмов (10) и (11) обладает своими преимуществами: механизм (10) сбалансирован и обеспечивает выполнение условия (7), но при его использовании страхователи занижают заявки; а механизм (11) побуждает страхователей завышать заявки, но не обеспечивает «сбалансированности» в смысле (7). Для того чтобы построить механизм, который одновременно обладал бы всеми этими привлекательными свойствами, наверное, следует пытаться добиться рационального баланса между возрастанием и убыванием целевой функции страхователя по его сообщению. Однако для взаимного страхования такой баланс невозможен по следующим причинам. Взаимное страхование, в силу своей некоммерческой направленности, является с точки зрения страхователей «игрой с нулевой суммой» (из условия (2) следует, что суммарные взносы должны быть равны ожидаемому суммарному возмещению), поэтому занижение страхового взноса одним из страхователей приводит к тому, что это занижение компенсируется всеми страхователями (в том числе и искажившим информацию, но в меньшей пропорции – см. (10) или (11)). Поэтому для «борьбы» с искажением информации необходимо привлечение дополнительных ресурсов, зависимость объема которых от сообщений страхователей должна побуждать их к сообщению достоверной информации. Примером таких ресурсов могут служить ресурсы третьих (по отношению к рассматриваемым выше участникам страхового контракта) лиц, используемые в смешанном страховании, анализ которого проводится в следующем разделе.

### 3. Механизмы смешанного страхования

В [4] был введен класс механизмов смешанного финансирования и кредитования проектов, которые основываются на следующей идее. Если некоторая группа проектов является экономически невыгодной с точки зрения реализации их коммерческими фирмами, но осуществление этой группы проектов необходимо для общества (примерами таких проектов являются: соци-

альная защита, охрана окружающей среды и др.), интересы которого представляет государство или какой-либо другой социальный и/или экономический институт (далее в настоящем разделе для его обозначения будем использовать термин «центр»), обладающий соответствующими ресурсами, то возможно совместное (смешанное) финансирование проектов за счет средств фирм и бюджета центра. Механизмом смешанного финансирования называется правило определения взносов каждого из инвесторов на основании имеющейся (и, зачастую, сообщаемой самими инвесторами) информации. Это правило должно быть гибким, так как при фиксации доли каждого из инвесторов может сложиться ситуация, в которой либо желающих вложить собственные средства будет слишком мало (если доля коммерческих инвестиций велика), либо эффективность использования средств центра будет низка (если доля коммерческих инвестиций мала).

Используем идею смешанного финансирования в страховании следующим образом. Выше отмечалось, что манипулируемость механизмов взаимного экологического страхования во многом объясняется «замкнутостью» сообщества страхователей в смысле привлекаемых и используемых ресурсов. Поэтому рассмотрим модель страхования, в которой возможно привлечение ресурсов центра.

Задача заключается в определении механизма смешанного страхования (то есть принципа взаимодействия страхователей, использующего как их ресурсы, так и ресурсы центра), который обладал бы определенными свойствами, такими как, например, неманипулируемость, и приводил к эффективному (в смысле управления агрегированным риском) распределению собираемых страховых взносов и выплачиваемых возмещений. Содержательной интерпретацией смешанного страхования является экологическое страхование [3], например, взаимодействие администрации региона (центра), заинтересованной в минимизации потерь от чрезвычайных ситуаций и загрязнения окружающей среды, и предприятий-источников загрязнения (страхователей). Предприятия могут создать фонд взаимного страхования, а администрация региона может гарантировать определенное возмещение потерь (из своих фондов) страхователю при наступлении у него страхового случая (например, компенсировать ему часть затрат на природоохранные и природовосстановительные мероприятия, компенсацию ущерба третьим лицам и т.д.).

Непосредственное использование в смешанном страховании механизмов, описанных в разделе 2, представляется нецелесообразным по причине манипулируемости последних. Выходом может служить установление зависимости между долей фонда центра, получаемой страхователем (в том или ином виде), и сообщениями последнего. В идеале хотелось бы сделать эту долю монотонной по сообщениям страхователей, что, быть может, побуждало бы их к некоторому увеличению заявок в процессе конкуренции за ресурс центра. Однако легко убедиться, что так как вероятности наступления страхового случая априори неизвестны, а механизм должен быть таков, чтобы при любых сообщениях страхователей имело место балансовое ограничение

(сумма взносов страхователей и фонда центра должна равняться сумме ожидаемых возмещений), то, например, установить «надбавку», выплачиваемую страхователю из фонда центра, пропорциональной сообщенным им ожидаемым потерям, невозможно. Поэтому рассмотрим механизм, в котором центр из своего фонда компенсирует страхователям часть их страховых взносов, причем компенсируемая доля зависит от сообщений страхователей о вероятностях наступления страхового случая. Компенсируемая центром часть страхового взноса может интерпретироваться как установленная им скидка, поэтому соответствующий механизм условно назовем «механизмом скидок».

Пусть центр из своего страхового фонда  $R_0$  компенсирует  $i$ -му страхователю часть  $x_i(s)$  его страхового взноса  $s_i Q_i$ , то есть

$$(12) r_i(s) = s_i Q_i - x_i(s), \quad i \in I,$$

где размер компенсации определяется на основании принципа прямых приоритетов [5], то есть

$$(13) x_i(s) = \frac{s_i Q_i}{W(s)} R_0, \quad i \in I,$$

где  $W(s) = \sum_{i \in I} s_i Q_i$ .

Легко видеть, что, если  $h_i(s) = W(s) Q_i / W$ ,  $i \in I$ , то балансовые условия имеют вид (отметим, что данное выражение определяет зависимость страхового возмещения страхователя, в том числе, от ожидаемых суммарных потерь, которые «наблюдаемы» после наступления страховых случаев):

$$(14) \sum_{i \in I} s_i x_i(s) = R_0, \quad R(s) = W(s), \quad \sum_{i \in I} p_i h_i(s) = R(s).$$

Ожидаемое значение целевой функции  $i$ -го страхователя имеет вид:

$$(15) Ef_i(s) = g_i - s_i Q_i + \frac{s_i Q_i}{W(s)} R_0 + p_i Q_i [W(s) / W - 1], \quad i \in I.$$

Найдем равновесие Нэша  $s^*$  игры страхователей. Для этого, обозначив

$$(16) b_i = 1 - \frac{p_i Q_i}{W}, \quad i \in I,$$

определим сообщения, доставляющие максимумы ожидаемым полезностям страхователей. Для этого рассмотрим систему уравнений:

$$(17) R_0 \frac{W(s) - s_i Q_i}{W^2(s)} = b_i, \quad i \in I.$$

Складывая  $n$  уравнений (17), получим  $W(s) = (n - 1) R_0 / b$ , где  $b = \sum_{i \in I} b_i$ .

Подставляя (16), имеем:

$$(18) W(s) = R_0.$$

Подставляя (18) в (17), окончательно получаем:

$$(19) s_i^* = p_i R_0 / W, \quad i \in I.$$

Итак, решение (19) является равновесием Нэша. Более того, оно является допустимым равновесием, так как все равновесные сообщения страхователей неотрицательны и обеспечивают страхователям не меньшее значение ожидаемой полезности, чем при неучастии в смешанном страховании (по-

следнее утверждение легко проверяется сравнением  $s_i Q_i - \frac{s_i Q_i}{W(s)} R_0 - p_i Q_i [W(s) / W - 1]$  и  $p_i Q_i$ .

Подставляя (19) в (12) и (13), получаем:

$$(20) r_i(s^*) = 0, \quad i \in I,$$

$$(21) x_i(s^*) = \frac{p_i Q_i}{W} R_0, \quad i \in I.$$

Утверждение 1. Механизм скидок обладает следующими свойствами:

- а) Суммарный страховой взнос равен страховому фонду центра;
- б) Компенсация осуществляется пропорционально истинным ожидаемым потерям страхователей;
- в) При страховом фонде центра, равном суммарным ожидаемым потерям страхователей, равновесие Нэша соответствует сообщению достоверной информации;
- г) Для любого механизма скидок существует эквивалентный прямой механизм.

Доказательство утверждения 1. Справедливость пункта а) следует из (18), б) – из (21), в) – из (19). Поэтому остановимся на доказательстве пункта г).

Напомним, что если задан некоторый непрямо́й механизм планирования, в котором равновесные сообщения агентов зависят от их типов, то механизм, в котором агенты сообщают свои типы, а центр определяет планы, подставляя сообщения в равновесие непрямо́го механизма, называется соответствующим исходному прямым механизмом [5]. Соответствующий прямой механизм, который неманипулируем (то есть является механизмом, в котором сообщение достоверной информации является доминантной стратегией каждого агента), называется эквивалентным прямым механизмом.

В соответствии с приведенными определениями исходным является механизм (13), а соответствующий ему прямой механизм  $x'(s)$ , где  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$  – вектор сообщений страхователей о вероятностях наступления страхового случая, определяется подстановкой (19) в (13), то есть:

$$(22) s_i^*(s) = \frac{s_i R_0}{\sum_{i \in I} s_i Q_i}, \quad i \in I,$$

$$(23) x_i^*(s) = \frac{s_i^*(s) Q_i}{\sum_{j \in I} s_j^*(s) Q_j} R_0 = \frac{s_i Q_i}{\sum_{i \in I} s_i Q_i} R_0, \quad i \in I,$$

причем  $\sum_{i \in I} s W(s^*(s)) = \sum_{i \in I} s_i^*(s) Q_i = R_0$ .

Подставляя (22)-(23) в (15), получаем следующую зависимость ожидаемого выигрыша  $i$ -го страхователя от сообщений страхователей в прямом механизме:

$$(24) \quad E f_i(s) = g_i + p_i Q_i [R_0 / W - 1], \quad i \in I.$$

Из (24) следует, что ожидаемые выигрыши страхователей в соответствующем механизму (13) прямом механизме не зависят от их сообщений, следовательно, прямой механизм является неманипулируемым.

### Заключение

В настоящей работе рассмотрены теоретико-игровые модели механизмов взаимного и смешанного страхования. Для механизмов взаимного страхования показано, что они манипулируемы. Для механизмов смешанного страхования показано (см. утверждение 1), что они обладают следующими свойствами:

- сбалансированность (см. условия (14) и (18));
- обеспечение «справедливого» возмещения для страхователей – в силу (21) каждый страхователь получает компенсацию, пропорциональную своим истинным ожидаемым потерям, и, в силу этого, механизм скидок может рассматриваться как кандидат на эффективный механизм распределения ограниченных централизованных средств, выделенных на страхование;
- существование эквивалентного прямого механизма, в котором все страхователи сообщают центру достоверную информацию;
- в соответствии с (19) для любого размера страхового фонда центра отношение равновесного сообщения страхователя к истинному значению вероятности наступления страхового случая одинаково для всех страхователей, что позволяет использовать механизмы косвенного оценивания этих параметров;
- так как ожидаемые взносы страхователей равны нулю, то центр имеет возможность распоряжаться ресурсом  $R_0$  по своему усмотрению до конца рассматриваемого периода.

Перспективным направлением дальнейших исследований представляется изучение теоретико-игровых моделей механизмов страхования, и, в первую очередь, изучение манипулируемости этих механизмов, для случая страхователей, отличающихся отношением к риску.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сербиновский Б.Ю., Гарькуша В.Н. Страхование дело. Ростов на Дону: Феникс, 2000. – 375 с.
2. Ивашкин Е.И. Взаимное страхование. М.: Российская экономическая академия, 2000. – 87 с.
3. Моткин Г.А. Основы экологического страхования. М.: Наука, 1996.–191 с.
4. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять проектами. М.: Синтег, 1997. - 188 с.
5. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Теория активных систем: состояние и перспективы. М.: Синтег, 1999. – 128 с.