Автоматика и Телемеханика. 2000. № 8. С. 115 – 125

В.Н. Бурков, д-р техн. наук
А.Б. Гуреев
Д.А. Новиков, д-р техн. наук
А.В. Цветков, канд техн. наук

(Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН, Москва)

ЭФФЕКТИВНОСТЬ РАНГОВЫХ СИСТЕМ СТИМУЛИРОВАНИЯ

Рассматриваются унифицированные нормативные и соревновательные ранговые системы стимулирования в многоэлементных детерминированных статических активных системах. Приводятся оценки сравнительной эффективности этих систем стимулирования.

1. ВВЕДЕНИЕ

В большинстве рассматриваемых в теории активных систем (АС) [1-4] и в теории контрактов [5-8] моделей стимулирования вознаграждения управляемых субъектов - активных элементов (АЭ) - со стороны управляющего органа - центра - зависят от абсолютных значений их стратегий - действий. В то же время на практике достаточно распространены ранговые системы стимулирования (РСС), в которых величина индивидуального вознаграждения АЭ определяется либо принадлежностью его действия некоторому наперед заданному множеству - так называемые нормативные РСС, либо местом, занимаемым АЭ в упорядочении действий всех элементов - так называемые соревновательные РСС [9,10]. Преимущества ранговых систем стимулирования достаточно очевидны - при их использовании центру иногда не обязательно знать достоверно значения всех действий, выбранных элементами; при использовании соревновательных РСС в АС, функционирующих в условиях неопределенности, в ряде случаев оказывается возможным снижение неопределенности за счет параллельного функционирования элементов [1,3,9].

Достаточно полный обзор результатов отечественных и зарубежных авторов по исследованию РСС приведен в [11]. В настоящей работе нас будет интересовать следующий аспект: так как РСС являются специфическим подклассом систем стимулирования, то возникает вопрос - какова их эффективность в сравнении с другими системами стимулирования. Другими словами, в каких случаях использование РСС не приводит к потерям эффективности управления (стимулирования), а если приводит, то какова величина этих потерь?

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СТИМУЛИРОВАНИЯ

Рассмотрим следующую теоретико-игровую модель стимулирования в АС, состоящей из центра и n АЭ. Стратегией i-го *АЭ* является выбор действия $y_i \in A_i$, где A_i – множество допустимых действий, $i \in I = \{1, 2, ..., n\}$ – множество АЭ. Стратегией центра является выбор системы стимулирования - набора функций стимулирования $\sigma_i(y)$, $i \in I$, где $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in A' = \prod_{i=1}^{n} A_i$, $i \in I$. Целевая функция i-го *АЭ* $f_i(y)$ представляет собой разность между стимулированием и его индивидуальными затратами $c_i(y_i)$, т.е. $f_i(y) = \sigma_i(y) - c_i(y_i)$.

Множество действий $P(\sigma) \subseteq A'$, выбираемых АЭ при данной системе стимулирования (то, какие действия будут выбирать АЭ, зависит от используемой в той или иной модели концепции равновесия игры [2,3] - см. конкретизации ниже), называется множеством реализуемых действий (множеством решений игры). Для действия $y^* \in P(\sigma)$, реализуемого системой стимулирования σ, величина $J_\sigma(y^*) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(y^*)$ называется затратами центра на стимулирование. Если при заданных ограничениях на стимулирование некоторое действие не реализуемо, то соответствующие затраты на стимулирование считаются равными бесконечности.

Целевая функция центра зависит от стратегий всех участников АС: $F(\sigma, y) = H(y) - J_\sigma(y)$, где $H(y)$ - функция дохода центра. Эффективностью системы стимулирования $K(\sigma)$ в рамках гипотезы благожелательности [2] является максимальное значение целевой функции центра на множестве решений игры АЭ: $K(\sigma) = \max_{y \in P(\sigma)} F(\sigma, y)$. Общие методы решения задач стимулирования в многоэлементных АС описаны в [3,11]. Для последующего изложения существен следующий достаточно очевидный факт [4]: система стимулирования, реализующая действия с меньшими для центра затратами, имеет более высокую эффективность. Следовательно, для сравнения эффективностей различных систем стимулирования достаточно сравнить соответствующие затраты на стимулирование.

Введем следующие предположения, которые, если не оговорено особо, будут считаться выполненными в ходе дальнейшего изложения.

А.1. Множества возможных действий АЭ одинаковы: $A_i = A = \Re^1_+$, $i \in I$.

А.2. Функции затрат АЭ положительнозначны и монотонны.

А.3. Затраты АЭ от выбора нулевого действия равны нулю.

3. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ НОРМАТИВНЫЕ РАНГОВЫЕ СИСТЕМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ

Нормативные РСС (НРСС) характеризуются наличием процедур присвоения рангов АЭ в зависимости от выбираемых действий и одинаковым поощрением АЭ, имеющих один и тот же ранг. Пусть $Á$ = $\{1,2,...m\}$ - множество возможных рангов, где m - размерность НРСС, $\{q_j\}$, $j = \overline{1,m}$ - совокупность m неотрицательных чисел, соответствующих вознаграждениям за "попадание" в различные ранги; d_i: A ® $Á$, i Î I - процедуры классификации (присвоения рангов). НРСС называется кортеж $\{m, Á, \{d_i\}, \{q_j\}\}$.

В [9] доказано, что для любой системы стимулирования существует НРСС не меньшей эффективности. Идея доказательства этого факта заключается в следующем. Пусть имеется произвольная допустимая система стимулирования, которая реализует некоторый вектор действий АЭ с некоторыми суммарными затратами на стимулирование. Легко показать, что можно подобрать: число m, вектор вознаграждений $q=(q_1, q_2, ..., q_m)$ и совокупность процедур классификации $\{d_i\}$ - в общем случае различных для различных АЭ, таких, что соответствующая НРСС будет реализовывать тот же вектор действий с теми же затратами на стимулирование, что и исходная система стимулирования (см. детали в [9]). Ключевым при этом является то, что процедуры классификаций $d_i(\cdot)$, i Î I, действий разных АЭ могут быть различны.

То, что центр использует различные процедуры присвоения рангов, может показаться «не справедливым» с точки зрения АЭ. Действительно, например, выбирая одинаковые действия, два АЭ могут иметь различные ранги и, следовательно, получать различные вознаграждения. Более «справедливой» представляется анонимная НРСС, в которой процедура классификации одинакова для всех АЭ, т.е. так называемая универсальная НРСС (УНРСС), при использовании которой элементы, выбравшие одинаковые действия, имеют один и тот же ранг и, следовательно, получают одинаковые вознаграждения.

Введем вектор $Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_m)$ такой, что 0 £ Y_1 £ Y_2 £ ... £ Y_m < +¥, который определяет некоторое разбиение множества A. УНРСС задается кортежем $\{m, \{Y_j\}, \{q_j\}\}$, причем вознаграждение i-го АЭ s_i определяется следующим образом: $s_i(y_i) = \sum_{j=0}^{m} q_j\ I(y_i$ Î $[Y_j,Y_{j+1}))$, где $I(\cdot)$ - функция-индикатор, $Y_0 = 0$, $q_0 = 0$. Универсальная НРСС называется прогрессивной [9], если q_0 £ q_1 £ q_2 £ ... £ q_m. Исследуем эффективность УНРСС.

Так как УНРСС кусочно-постоянна, то из монотонности функций затрат АЭ следует, что АЭ будут выбирать действия с минимальными затратами на соответствующих отрезках. Иначе говоря, условно можно считать, что при фиксированной системе стимулирования множество допустимых действий равно $Y = \{Y_1, Y_2, ..., Y_m\}$, причем так как в силу А.3 $c_i(0) = 0$, то следует положить $q_0 = 0$. Действие y_i^*, выбираемое i-м АЭ, определяется парой (Y, q), т.е. имеет место $y_i^*(Y,q) = Y_{k_i}$, где $k = 0$ соответствует нулевому действию и

(1) $k_i = arg \max\limits_{k=\overline{0,m}} \{q_k - c_i(Y_k)\}, i \in I.$

Обозначим $y^*(Y,q) = (y_1^*(Y,q)\ y_2^*(Y,q), ..., y_n^*(Y,q))$. Задача синтеза оптимальной УНРСС заключается в выборе размерности УНРСС m и векторов $q \geq 0$ и Y, удовлетворяющих заданным ограничениям, которые максимизировали бы целевую функцию центра:

(2) $F(q, y^*(Y,q)) \to \max\limits_{Y,q}$.

Фиксируем некоторый вектор действий $y^* \in A'$, который мы хотели бы реализовать УНРСС. Известно, что минимально возможные (среди всех систем стимулирования) затраты на стимулирование по реализации этого вектора соответствуют использованию компенсаторной системы стимулирования [3,4] (т.е. системы стимулирования, компенсирующей затраты и являющейся "абсолютно оптимальной", для которой используется индекс "K") и равны:

(3) $J_K(y^*) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i(y_i^*)$.

Из того, что при использовании УНРСС АЭ выбирают действия только из множества Y, следует, что минимальная размерность системы стимулирования должна быть равна числу попарно различных компонент вектора действий, который требуется реализовать. Следовательно, использование УНРСС размерности, большей, чем n, нецелесообразно. Поэтому ограничимся системами стимулирования, размерность которых в точности равна числу АЭ, т.е. положим $m = n$.

Для фиксированного $y^* \in A'$ положим $Y_i = y_i^*$, $i \in I$, и обозначим $c_{ij}=c_i(Y_j)$, $i, j \in I$. Из определения реализуемого действия следует, что для того, чтобы УНРСС реализовывала вектор $y^* \in A'$, $y^* > 0$, необходимо и достаточно выполнение следующей системы неравенств, обеспечивающей совпадение множества реализуемых действий и множества равновесий Нэша ($j = 0$ соответствует нулевому действию):

(4) $q_i - c_{ii} \geq q_j - c_{ij}, q_i \geq 0, i \in I, j = \overline{0,n}$.

Запишем (4) в виде

(5) $q_j - q_i \leq a_{ij}, q_i \geq 0, i \in I, j = \overline{0,n}$,

где $a_{ij} = c_{ij} - c_{ii}$. Обозначим через $\{q_i(y^*)\}$ решение системы неравенств (5). Тогда суммарные затраты на стимулирование по реализации действия y^* УНРСС равны

(6) $J_{УНРСС}(y^*) = \sum_{i=1}^{n} q_i(y^*)$.

Задача синтеза оптимальной (минимальной) УНРСС заключается в минимизации (6) при условии (5).

Из того, что $q_i \geq c_{ii}$, немедленно следует, что $\forall\ y^* \in A'$ выполнено: $J_{УНРСС}(y^*) \geq J_K(y^*)$, т.е. минимальные затраты на стимулирование по реализации любого вектора действий АЭ при использовании универсальных нормативных систем стимулирования не ниже, чем при использовании компенсаторных систем стимулирования. Следовательно, для эффективностей стимулирования справедлива следующая достаточно "грубая" оценка: $K_{УНРСС} \leq K_{QK}$. Потери от использования УНРСС обозначим

$$\Delta(УНРСС, QK, y^*) = J_{УНРСС}(y^*) - J_{QK}(y^*) \geq 0.$$

Таким образом, исследование УНРСС свелось к необходимости ответа на следующие вопросы - какие векторы действий АЭ могут быть реализованы в этом классе систем стимулирования (иначе говоря, для каких действий система неравенств (5) имеет решение) и в каких случаях УНРСС являются оптимальными во всем классе допустимых систем стимулирования, т.е. при каких условиях $\Delta(УНРСС,QK) = 0$.

Введем в рассмотрение n-вершинный граф $G_a(y^*)$, веса дуг в котором определяются $\|a_{ij}(y^*)\|$. Задача минимизации (6) при условии (5) является задачей о минимальных неотрицательных потенциалах вершин графа G_a, для существования решения которой необходимо и достаточно отсутствие контуров отрицательной длины [12]. Таким образом, справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Для того чтобы вектор $y^* \in A'$ был реализуем в классе УНРСС необходимо и достаточно, чтобы граф $G_a(y^*)$ не имел контуров отрицательной длины.

Рассмотрим следующую задачу о назначении: определить $x_{ij} \in \{0; 1\}$, $i, j, \in I$;

(7) $\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \to \min_{\{x_{ij}\}}$

(8) $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j \in I;$

(9) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i \in I.$

Лемма 2. Для того чтобы $x_{ii} = 1,\ i \in I,\ x_{ij} = 0,\ j \neq i$, необходимо и достаточно, чтобы граф $G_a(y^*)$ не имел контуров отрицательной длины.

Доказательство леммы 2 приведено в Приложении. Следствием лемм 1 и 2 является следующая теорема, характеризующая множество всех действий, реализуемых УНРСС (отметим, что при отказе от предположения А.3 результат теоремы 1 остается в силе).

<u>Теорема 1.</u> Для того чтобы вектор y^* Î A' был реализуем в классе УНРСС, необходимо и достаточно, чтобы он являлся решением задачи о назначении (7)-(9).

Из теории графов известно, что в оптимальном решении задачи (5)-(6) минимальна не только сумма потенциалов вершин графа G_a (суммарные затраты на стимулирование), но и минимальны все потенциалы вершин (индивидуальные вознаграждения). То есть решение задачи о назначении (7)-(9) задачи (5)-(6) минимизирует не только суммарные выплаты АЭ со стороны центра, но и обеспечивает минимально возможные значения всех индивидуальных вознаграждений.

Приведенные выше результаты характеризуют множество действий, реализуемых УНРСС. Исследуем теперь эффективность этого класса систем стимулирования. Имея результат теоремы 1, мы имеем возможность предложить алгоритм вычисления минимальных потенциалов и, следовательно, количественно оценить потери в эффективности.

Рассмотрим задачу (7)-(9). Перенумеруем АЭ таким образом, чтобы оптимальным было диагональное назначение " j Î I $i_j = j$ ($x_{ii} = 1$, i Î I). Поставим в соответствие ограничению (8) двойственную переменную u_j, j Î I, а ограничению (9) - двойственную переменную v_i, i Î I. Ограничения двойственной к (7)-(9) задачи имеют вид $u_j - v_i$ £ a_{ij}, i, j Î I. Заметим, что так как $x_{ii} = 1$, i Î I, то $u_i - n_i = a_{ii} = 0$, а значит $u_i - n_i = q_i$. Используя этот факт, определим следующий <u>алгоритм</u>.

Шаг 0. $u_j = c_{jj}$, j Î I.

Шаг 1. $v_i := \max\limits_{j \in I} \{u_j - a_{ij}\}$, i Î I.

Шаг 2. $u_j := \min\limits_{i \in I} \{v_i + a_{ij}\}$, j Î I.

Последовательное повторение шагов 1 и 2 алгоритма конечное число (очевидно, не превышающее n) раз даст оптимальное решение задачи (5)-(6).

Приведенный выше алгоритм позволяет решать задачу поиска минимальных неотрицательных потенциалов вершин графа G_a, удовлетворяющих условию (5), т.е. реализующих заданный вектор действий АЭ. С одной стороны, доказанный выше критерий реализуемости заданных действий (теорема 1) и алгоритм синтеза оптимальной УНРСС применимы в широком классе активных систем, так как при их доказательстве вводились чрезвычайно слабые предположения о свойствах элементов АС (см. предположения А.1 и А.2). С другой стороны, для ряда более узких классов АС, рассматриваемых ниже, существуют более простые алгоритмы синтеза оптимальных УНРСС.

Обозначим

(10) $c'_i(y_i) = \frac{dc_i(y_i)}{dy_i}$, *i* Î *I*,

и введем следующее предположение:

А.4. Существует упорядочение АЭ такое, что

(11) " *y* Î *A* $c'_1(y)$ ³ $c'_2(y)$ ³ … ³ $c'_n(y)$.

Предположениям А.2-А.4 удовлетворяют, например, такие распространенные в экономико-математическом моделировании функции затрат АЭ, как: $c_i(y_i) = k_i\, c(y_i)$, $c_i(y_i) = k_i\, c(y_i/k_i)$, где $c(\cdot)$ - строго монотонная дифференцируемая функция (иногда добавляется требование выпуклости), а коэффициенты упорядочены: k_1 ³ k_2 ³ … ³ k_n (частными случаями являются линейные функции затрат, функции затрат типа Кобба-Дугласа и др.).

Фиксируем некоторый вектор y^* Î *A'*, удовлетворяющий следующему условию:

(12) y_1^* £ y_2^* £ … £ y_n^*.

Лемма 3. Если выполнены предположения А.1, А.2 и А.4, то в задаче (7)-(9) оптимально диагональное назначение.

Справедливость утверждения леммы следует из того, что любая перестановка диагонального назначения в силу предположения А.4 увеличивает суммарные затраты (отметим, что при этом предположения А3 не требуется).

Лемма 3 дает простое решение задачи о назначении (7)-(9): в случае? когда выполнено предположение А.4 АЭ, имеющим большие удельные затраты, должны назначаться меньшие действия. Теорема 1 и лемма 3 позволяют охарактеризовать множество действий, реализуемых УНРСС в рамках предположения А.4.

Следствие. Если выполнены предположения А.1, А.2 и А.4, то УНРСС реализуемы такие и только такие действия, которые удовлетворяют (12).

В АС, удовлетворяющих предположениям А.1-А.4 (включая А.3!), для определения оптимальных потенциалов может быть использована следующая рекуррентная процедура, являющаяся частным случаем (соответствующим А.3-А.4) общего приведенного выше алгоритма: $q_1 = c_{11}$, $q_i = c_{ii} + \max_{j<i} \{q_j - c_{ij}\}$, $i = \overline{2,n}$.

Лемма 4. Если выполнены предположения А.1-А.4, то для решения задачи синтеза оптимальной УНРСС имеет место:

" $i = \overline{2,n}$ $\max_{j<i} \{q_j - c_{ij}\} = q_{i-1} - c_{ii-1}$.

Справедливость леммы 4 обосновывается следующим образом. Из предположений А.3-А.4 следует, что " *y* Î *A* $c_1(y)$ ³ $c_2(y)$ ³ … ³ $c_n(y)$, а из (11) следует, что максимум в выражении для q_i достигается при $j = i - 1$.

Следствием леммы 4 является следующее простое выражение для индивидуальных вознаграждений для УНРСС, реализующей вектор y^* Î A' в АС, удовлетворяющей предположениям А.1-А.4:

(13) $q_i = \sum_{j=1}^{i} c_j(y_j^*) - c_j(y_{j-1}^*)$.

Подставляя (13) в (6), получаем, что потери от использования УНРСС (по сравнению с компенсаторными) равны:

(14) $D(УНРСС, QK, y^*) = \sum_{i=1}^{n} \{ \sum_{j=1}^{i} (c_j(y_j^*) - c_j(y_{j-1}^*)) - c_i(y_{i-1}^*)\}$.

Совокупность полученных выше результатов сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 2. Если выполнены предположения А.1 - А.4, то:

а) в классе УНРСС реализуемы такие и только такие действия, которые удовлетворяют условию (12);

б) оптимальное решение задачи стимулирования при этом определяется выражением (13);

в) превышение затратами на стимулирование минимально необходимых определяется выражением (14);

г) оптимальная УНРСС является прогрессивной.

Утверждение пункта г) теоремы 2 обосновывается следующим образом: из (13) следует, что q_{i+1} ³ $c_{i+1,i+1} + (q_i - c_{i+1,i})$. В силу монотонности затрат и (12): $c_{i+1,i+1} - c_{i+1,i}$ ³ 0, следовательно, ″ $i = \overline{1,n-1}$ q_{i+1} ³ q_i, т.е. система стимулирования также монотонна (прогрессивна).

Отметим, что выше исследовались УНРСС размерности n. Частным случаем УНРСС являются унифицированные системы стимулирования С-типа (скачкообразные, т.е. - УНРСС размерности 1) [4]. Поэтому рассмотрим задачу синтеза унифицированной системы стимулирования, в которой центр назначает общий для всех АЭ план x Î A (единый норматив) и использует следующую унифицированную систему стимулирования С-типа:

(15) $s(x,y_i) = \begin{cases} C, & y_i \geq x \\ 0, & y_i < x \end{cases}$,

где C - некоторая неотрицательная величина.

Введем следующее предположение:

А.5. Существует упорядочение АЭ такое, что

(16) ″ y Î A $c_1(y)$ ³ $c_2(y)$ ³ ... ³ $c_n(y)$.

Отметим, что, если выполнены предположения А.1-А.4, то, очевидно, выполнено и А.5. Под совместным выполнением А.4. и А.5 будем подразумевать, что существует упорядочение АЭ, удовлетворяющее одновременно (11) и (16).

Обозначим через $P(x,C)$ множество тех АЭ, у которых затраты в точке x не превышают C, т.е. таких элементов, которым выгодно выполнение плана

x: $P(x,C) = \{i \in I \mid c_i(x) \le C\}$. Из А.5 следует, что $P(x,C) = \{k(x,C), ..., n\}$, где $k(x,C) = min \{i \in I \mid c_i(x) \le C\}$. АЭ из множества $Q(x,C) = \{1, 2, ..., k(x,C)-1\}$ выполнение плана x при вознаграждении C невыгодно (естественно, $\forall x \in A$, $\forall C \ge 0$ $P(x,C) \cap Q(x,C) = \emptyset$, $P(x,C) \cup Q(x,C) = I$), и они выберут действия, минимизирующие затраты (в рамках А.3 - действия, равные нулю).

Тогда действия $\{y_i^*\}$, реализуемые системой стимулирования (17), удовлетворяют: $y_i^*(x,C) = \begin{cases} x, & i \ge k(x,C) \\ 0, & i < k(x,C) \end{cases}$. Суммарные затраты на стимулирование при использовании центром системы стимулирования (17) равны $J(x,C) = C\,(N-k(x,C)+1)$.

Как показано в [13], зависимость $y_i^*(x,C)$ не является непрерывной, т.е. для каждого $x \in A$ существует конечное число минимальных затрат на стимулирование, при которых изменяется число АЭ, выполняющих план x: $\{c_1(x), c_2(x), ..., c_N(x)\}$. Аналогично, для фиксированного C при непрерывных и строго монотонных функциях затрат АЭ существует конечное число планов $\{c_i^{-1}(C)\}$, где "$^{-1}$" обозначает обратную функцию, при которых изменяется число АЭ, выполняющих их. Общий (для случая, соответствующего А.5) алгоритм решения задачи синтеза оптимальной унифицированной системы стимулирования приведен в [13]. Ниже мы сравним минимальные затраты на стимулирование.

Фиксируем произвольный план $x \in A$. Для того чтобы все АЭ выбрали действия, совпадающие с планом необходимо, чтобы $k(x,C) = 1$, т.е. $C = c_1(x)$. Тогда минимальные затраты на стимулирование равны $N\,c_1(x)$. Следовательно, если выполнено предположение А.5, то потери в эффективности (по сравнению с компенсацией затрат) составляют $(N-1)\,c_1(x) - \sum_{i=2}^{n} c_i(x)$.

3. СОРЕВНОВАТЕЛЬНЫЕ РАНГОВЫЕ СИСТЕМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ

В НРСС центр фиксировал процедуру классификации, определяя множества действий, при попадании в которые АЭ получал заданное вознаграждение. В отличие от НРСС, в соревновательных ранговых системах стимулирования (СРСС) центр фиксирует процедуру сравнительной оценки действий АЭ, задает число классов и число мест в каждом из классов, а также величины поощрений АЭ, попавшим в тот или иной класс [1,2,9,10]. Таким образом, в СРСС индивидуальное поощрение АЭ не зависит непосредственно от абсолютной величины выбранного им действия, а определяется тем местом, которое он занял в упорядочении действий всех АЭ.

Соревновательные системы стимулирования исследовались как в теории активных систем (см. обзор [11], а также монографии [1,9]), так и в теории контрактов [5-8]. Зарубежные исследователи акцентировали внимание в основном на АС, функционирующих в условиях внешней вероятностной неопределенности (см. классификацию в [4]), ограничиваясь в большинстве случаев либо двухэлементными системами [8], либо случаем идентичных АЭ [6]. В работах российских авторов построены оптимальные СРСС для ряда практически важных частных случаев, в том числе линейных функций затрат АЭ и функций затрат вида $c_i(y_i) = k_i\, c(y_i)$, $k_i > 0$, причем $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$ [1,9]. В [1] также показано, что в случае интервальной неопределенности (незнании центром истинных значений параметров $\{k_i\}$) СРСС могут быть более эффективны, чем системы стимулирования вида $\sigma_i(y) = R\, y_i / \sum_{j=1}^{n} y_j$, где R – фонд стимулирования. Сравнительная эффективность СРСС и других систем стимулирования практически не исследовалась.

Следует отметить, что теоретико-игровой анализ СРСС (или соревновательных механизмов стимулирования, как их иногда называют [1,2]) гораздо более сложен и трудоемок, чем "обычных" или нормативных ранговых систем стимулирования. Основная сложность заключается в том, что при использовании СРСС у АЭ не существует равновесных по Нэшу стратегий, следовательно, возникает необходимость введения гипотез о поведении элементов [14] и "искусственного" построения равновесия, т.е. множества реализуемых действий. Как отмечалось выше, в настоящей работе нас в основном интересует сравнительная эффективность тех или иных систем стимулирования в многоэлементных АС. Поэтому, не вдаваясь в подробности теоретико-игрового анализа, оценим эффективность СРСС в сравнении с "абсолютно оптимальными" компенсаторными системами стимулирования.

Предположим, что в АС, состоящей из n АЭ, выполнены предположения А.1-А.4, а центр использует следующую систему стимулирования: действия, выбранные АЭ, упорядочиваются в порядке возрастания, после чего каждый из АЭ получает вознаграждение $q_i \geq 0$, соответствующее его номеру i в упорядочении действий.

Перенумеруем АЭ в порядке убывания затрат. Приведенные выше результаты анализа УНРСС существенно упрощают изучение СРСС - решение задачи синтеза оптимальной СРСС, множество реализуемых в классе СРСС действий, а также сравнительная эффективность этого класса систем стимулирования определяются следующей теоремой.

Теорема 3. Если выполнены предположения А.1-А.4, то:

а) необходимым и достаточным условием реализуемости вектора действий АЭ $y^* \in A'$ в классе СРСС является выполнение

(17) $y_1^* = 0 \leq y_2^* \leq y_3^* \leq \dots \leq y_n^*$;

б) вектор (17) реализуем следующей системой стимулирования:

$$(18)\ q_i(y^*) = \sum_{j=2}^{i} \{c_{j-1}(y_j^*) - c_{j-1}(y_{j-1}^*)\},\ i = \overline{1,n};$$

в) оценки сравнительной эффективности СРСС и УНРСС, а также СРСС и компенсаторных систем стимулирования удовлетворяют: $\forall\ y^* \in A'$

$$(19)\ \Delta(СРСС,\ УНРСС,\ y^*) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=2}^{i} [c_{j-1}(y_j^*) - c_j(y_j^*) + c_j(y_{j-1}^*) - c_{j-1}(y_{j-1}^*)] \geq 0,$$

$$(20)\ \Delta(СРСС,\ K,\ y^*) = \sum_{i=2}^{n} \{ \sum_{j=2}^{i} \{c_{j-1}(y_j^*) - c_{j-1}(y_{j-1}^*)\} - c_i(y_i^*)\} \geq 0;$$

г) оптимальная СРСС является прогрессивной.

Доказательство теоремы 3 приведено в Приложении.

Гораздо более важную методологическую роль, чем ее формальное доказательство, играют содержательные интерпретации утверждения теоремы 3. Из леммы 2 следует, что унифицированными РСС реализуемы только такие действия, которые являются решением соответствующей задачи о назначении. Из леммы 3 следует, что в рамках предположений А.2-А.4 оптимально диагональное назначение. Следовательно, условие (17) является необходимым условием реализуемости.

Для того, чтобы доказать, что СРСС (18) реализует вектор действий (17) (тогда (17) будет и достаточным условием реализуемости) необходимо и достаточно показать, что выполнены два условия. Первое - условие реализуемости "обычной" системой стимулирования, т.е. условие того, что каждому АЭ невыгодно изменять свою стратегию при фиксированной обстановке игры (условия равновесия Нэша). Второе условие характерно для соревновательных систем стимулирования, так как для них условий "обычной" реализуемости недостаточно - следует проверить условие "угроз", в соответствии с которым каждый АЭ может уменьшать свое действие до тех пор, пока АЭ с номером, меньшим на единицу, не угрожает ему выбором большего действия (см. доказательство теоремы 3).

Утверждение "некоторый АЭ не может быть спокоен до тех пор, пока другой АЭ может угрожать ему изменением своей стратегии" (см. [1,9,14]), выражающее условие "угроз", отражает, фактически, предположения АЭ о поведении других АЭ. Следовательно, при использовании СРСС необходимо, но недостаточно накладывать условия реализуемости (в смысле Нэша), а следует использовать доопределение равновесия (в данном случае - аналог равновесия Штакельберга). Поэтому разность (19) может также интерпретироваться как доплата за условие "угроз" по сравнению с равновесием Нэша.

Имея выражения (17)-(20), можно решать задачи синтеза СРСС, удовлетворяющих тем или иным свойствам, по аналогии с тем, как, например, в [9] решалась задача синтеза СРСС, удовлетворяющей ограничению фонда стимулирования R: $\sum_{i=1}^{n} q_i$ £ R (см. также [4]).

Из теорем 1 и 2 (ср. (12) и (17)) следует, что множество действий, реализуемых СРСС, не шире, чем множество действий, реализуемых УНРСС. Более того, из (19)-(20) следует, что минимальные суммарные затраты на стимулирование по реализации произвольного вектора действий выше при использовании соревновательных ранговых систем стимулирования (по сравнению с универсальными нормативными и, тем более, компенсаторными). Значит в рамках рассматриваемой модели СРСС менее эффективны, чем УНРСС.

4. Заключение

В настоящей работе получены решения задач синтеза оптимальных унифицированных нормативных (теоремы 1-2) и соревновательных (теорема 3) ранговых систем стимулирования, для которых получены характеризация множеств реализуемых действий и оценки сравнительной эффективности (см. (14), (19), (20)).

Приведено общее решение задачи синтеза оптимальной УНРСС (леммы 2-4, теорема 1 и алгоритм). Для СРСС решение и оценки сравнительной эффективности получены лишь в рамках дополнительных предположений А.3-А.4 о свойствах функций затрат АЭ. Поэтому перспективным направлением дальнейших исследований является получение решения задачи синтеза оптимальной СРСС в общих случаях, для которых можно утверждать, что необходимые условия реализуемости (см. теоремы 1-3) останутся в силе, а изменятся лишь достаточные условия, обеспечивающие невыгодность "угроз".

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 2. Пусть (i_1, i_2, ..., i_n) - решение задачи (7)-(9), т.е. назначение $y_{i_1} = y_1^*$, $y_{i_2} = y_2^*$, ..., $y_{i_n} = y_n^*$ минимизирует (7).

Предположим, что " j Î I $i_j = j$ и в графе $G_a(y^*)$ имеется контур отрицательной длины. Тогда существует такое переназначение (перестановка вершин графа, входящих в этот контур), которое уменьшит суммарные затраты (7), следовательно, исходное назначение не является решением задачи (7)-(9) - противоречие.

Пусть граф $G_a(y^*)$ не имеет контуров отрицательной длины. Предположим, что решение (i_1, i_2, ..., i_n) не является оптимальным решением задачи (7)-(9). Пусть (j_1, j_2, ..., j_n) – оптимальное решение. Тогда решение (j_1,

$j_2, ..., j_n$) можно получить из решения путем переназначений, которым в графе $G_a(y^*)$ соответствуют один или несколько контуров отрицательной длины. Однако при этом суммарные затраты могут только увеличиться. Таким образом, ($i_1, i_2, ..., i_n$) – оптимальное решение.

Доказательство теоремы 3. Первый АЭ (имеющий максимальные затраты при любом допустимом действии) будет всегда выбирать нулевое действие, т.е. $y_1^* = 0$, поэтому положим вознаграждение q_1 за первое место в упорядочении действий равным нулю: $q_1 = 0$. Упорядочение (17) совпадает с оптимальным назначением АЭ в соответствующей задаче о назначении (см. лемму 3), поэтому (17) является необходимым условием реализуемости.

Рассматривая последовательно АЭ в порядке возрастания их номеров, из условия того, что предыдущий АЭ может угрожать последующему АЭ увеличением своего действия и занятием более высокого места до тех пор, пока его полезность неотрицательна (это условие назовем условием "угроз"), получаем, что при заданной соревновательной системе стимулирования $\{q_i\}$ действия, выбираемые АЭ, удовлетворяют следующим соотношениям: $c_1(y_2^*) = q_2$, $q_3 - c_2(y_3^*) = c_1(y_2^*) - c_2(y_2^*)$, $q_4 - c_3(y_4^*) = [c_1(y_2^*) - c_2(y_2^*)] + [c_2(y_3^*) - c_3(y_3^*)]$ и т.д. Преобразовывая, получаем (18).

Условие (18) по своему построению обеспечивают невыгодность для каждого АЭ выбора действия с номером, превышающим его номер в упорядочении затрат. Однако условие реализуемости некоторого действия подразумевает, что выбор этого действия выгоден АЭ по сравнению с выбором любого другого допустимого действия. Докажем невыгодность выбора элементом действий, номер которых строго меньше его номера в упорядочении затрат. Для этого фиксируем произвольное $i \hat{I} I$ и предположим, что i-му АЭ выгодно занять l-е место, где $l < i$, т.е., что существует действие $y_l^* < y_i^*$ такое, что имеет место: $f_i(y_l^*, y_{-i}^*) > f_i(y_i^*, y_{-i}^*)$, где y_{-i}^* - обстановка для i-го *АЭ*. Тогда (примем соглашение, что если верхний индекс суммирования меньше нижнего, то вся сумма равна нулю) выполнено: $\sum_{j=2}^{l} \{c_{j-1}(y_j^*) - c_{j-1}(y_{j-1}^*)\} - c_i(y_l^*) > \sum_{j=2}^{i} \{c_{j-1}(y_j^*) - c_{j-1}(y_{j-1}^*)\} - c_i(y_i^*)$.

Преобразовывая это неравенство к: $\sum_{j=l+1}^{i} \{c_{j-1}(y_j^*) - c_{j-1}(y_{j-1}^*)\} < c_i(y_i^*) - c_i(y_l^*)$ и пользуясь упорядочением и свойствами функций затрат АЭ, накладываемым предположениями А.3-А.4, приходим к противоречию. Утверждения пунктов а) и б) теоремы 3 доказаны.

Для сравнения эффективности соревновательных и нормативных ранговых (соревновательных и компенсаторных) систем стимулирования достаточно вычесть из выражения (18) выражение (13) (соответственно $c_i(y_i^*)$ - см. (3)) и просуммировать по всем АЭ. Неравенства в (19)-(20) при этом выполняются в силу предположений А.3. и А.4.

Из выражения (18) и предположений А.3. и А.4 непосредственно следует, что вознаграждение АЭ возрастает с ростом занимаемого места, т.е. рассматриваемая СРСС является прогрессивной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977.
2. Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981.
3. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Введение в теорию активных систем. М.: ИПУ РАН, 1996.
4. Новиков Д.А. Стимулирование в социально-экономических системах (базовые математические модели). М.: ИПУ РАН, 1998.
5. Green J., Stockey N. A comparison of tournaments and contracts // Journal of Political Economy. 1983. Vol. 91. N 3. P. 349 - 364.
6. Lasear E., Rosen S. Rank-order tournaments as optimal labor contracts // Journal of Political Economy. 1981. Vol. 89. N 5. P. 841 - 864.
7. Malcomson J.M. Rank-order contracts for a principal with many agents // Review of Economic Studies. 1986. Vol. 53. N 5. P. 803 - 817.
8. Mookherjee D. Optimal incentive schemes with many agents // Review of Economic Studies. 1984. Vol. 51. № 2. P. 433 - 446.
9. Цыганов В.В. Адаптивные механизмы в отраслевом управлении М.: Наука, 1991.
10. Цыганов В.В. Ранговые системы стимулирования // Автоматика и Телемеханика. 1986. № 3. С. 124 - 130.
11. Новиков Д.А. Механизмы стимулирования в динамических и многоэлементных социально-экономических системах // Автоматика и Телемеханика. 1997. № 6. С. 3 - 26.
12. Бурков В.Н., Горгидзе И.А., Ловецкий С.Е. Прикладные задачи теории графов. Тбилиси: Мецниереба, 1974.
13. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Механизмы критериального управления активными системами в задачах стимулирования / Сборник трудов ИПУ РАН. 2000.
14. Сандак Н.Н. Некоторые общесистемные и математические аспекты теории систем с соревнующимися элементами / Управление техническими и организационными системами с применением вычислительной техники. Труды XXIII конференции молодых ученых. М.: Наука, 1979. С. 160 - 171.