ЛОГИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ И ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Левин В.И.
(Пензенская государственная технологическая академия, г. Пенза)
levin@pti.ac.ru

Рассмотрено применение к моделированию различных объектов непрерывной логики, нечеткой логики, интервальной логики и родственных им логик.

Ключевые слова: логическое моделирование, непрерывная логика, нечеткая логика, интервальная логика

Введение

Наука логика первоначально создавалась древнегреческими мыслителями как средство построения правильного мышления. Эта область оставалась единственной, где применялась логика, до конца XIX в. В конце XIX – начале XX вв. выяснилось, что логика имеет прямое отношение к обоснованию математики. После этого области приложений логики стали расти, как снежный ком. Сначала в 1930-е гг. было установлено, что булева алгебра логики позволяет моделировать работу релейно-контактных и других управляющих устройств, что в большой мере способствовало созданию в 1940-е гг. кибернетики – общей науки об управлении. Затем были развиты методы логического вывода и принятия решений, что определило появление в 1950-е гг. новой науки – искусственного интеллекта. Наконец, в 1960-е гг. на основе непрерывной логики (НЛ) [1] была создана теория нечетких множеств [3], имеющая многочисленные применения в области моделирования систем, работающих в условиях неопре-

деленности. В настоящее время приложения логики охватывают почти все области человеческой деятельности:

- математику (аппроксимация функций, геометрия [2], теории множеств и чисел),
- технику (расчет электрических цепей, синтез генераторов функций, расчет аналоговых и цифровых устройств, моделирование формы деталей, надежность, диагностика) [6,9],
- системы (системы обслуживания, распознавание образов, принятие решений, обработка информации) [5,7,8],
- экономику (дискретная оптимизация, теория расписаний, моделирование экономических процессов), биологию (моделирование нейронных структур),
- социологию (моделирование поведения коллектива), историю (моделирование потоков исторических событий) [4],
- политологию (моделирование динамики общества) и т.д.

В статье рассмотрено применение к моделированию различных объектов НЛ, нечеткой логики, интервальной логики (ИЛ) и родственных им логик. В библиографическом списке [1–9] даны источники, описывающие применение, как этих, так и других логик.

1. Моделирование геометрических объектов

Начнем с применения логики к геометрическому моделированию [2]. Основной интерес представляет здесь следующая задача: для заданной кривой (поверхности, объема) дать аналитическое представление в виде соответствующего уравнения. Применение НЛ к решению данной задачи дает возможность аналитического описания сложных изломанных, разрывных и многозначных кривых и поверхностей, областей и их границ, пересечения областей и т.д., требуя меньше исходных данных и приводя к более простому описанию, чем другие методы. Так, изломанную кривую, полученную пересечением двух прямых $y = a_1x + b_1$ и $y = a_2x + b_2$, можно записать аналитически

(1) $y = (a_1 x + b_1) \overset{\vee}{\wedge} (a_2 x + b_2)$,

где операция конъюнкции НЛ $\wedge$ берется для выпуклой кривой, а операция дизъюнкции НЛ $\vee$ – для вогнутой. Выражения типа (1) верны также для изломанных кривых, полученных пересечением двух или нескольких кривых. Для аналитического представления разрывных кривых обозначим через $\underset{a}{\vee}$ операции $\vee$ при $a > 0$ и $\wedge$ при $a < 0$. Тогда, например, простейшую разрывную кривую, описываемую знаковой функцией $sign\ x$, можно записать аналитически

(2) $sign\ x = \left\{ \begin{array}{l} 1,\, x > 0 \\ -1,\, x < 0 \end{array} \right| = 1 \underset{x}{\vee} (-1)$.

Произвольные разрывные кривые можно описывать аналитически с помощью только операций НЛ $\vee$ и $\wedge$, без использования операции $\underset{a}{\vee}$.

Наиболее просто аналитическое представление области и ее границы для области-полосы. Так, горизонтальная полоса $b_1 \le y \le b_2$ имеет границу и область, описываемые уравнениями НЛ

(3) $(y - b_1) \wedge (b_2 - y) = 0$ и $(y - b_1) \wedge (b_2 - y) \wedge 0 = 0$.

Аналогично выглядят уравнения области и границ прямоугольника (пересечение двух полос) и более сложных фигур на плоскости и в пространстве. Общий прием получения уравнений следующий. Если область на плоскости дана неравенством $f(x, y) \le 0$, то в терминах НЛ эту область и ее дополнение $f(x, y) > 0$ можно задать уравнениями

(4) $f(x, y) \vee 0 = 0, \quad f(x, y) \wedge 0 = 0$.

Таким образом, пересечение областей $f(x, y) \le 0$ и $\varphi(x, y) \le 0$ дается уравнением $[f(x, y) \vee 0] + [\varphi(x, y) \vee 0] = 0$.

2. Аппроксимация кривых

Методика логической аппроксимаций кривых проста. Пусть нелинейная функция одной переменной $y = f(x)$ аппроксимируется с заданной точностью кусочно-линейной функцией $F(x)$, состоящей из m отдельных линейных функций-образующих: $f_1(x), \ldots f_m(x)$. Тогда в соответствии с (1) выпуклую (вогнутую) функцию f можно приближенно представить конъюнкцией (дизъюнкцией) НЛ функций-образующих

(5) $f_{\text{вып}}(x) \approx \widehat{F}(x) = \bigwedge_{i=1}^{m} f_i(x), \quad f_{\text{вог}}(x) \approx \breve{F}(x) = \bigvee_{i=1}^{m} f_i(x)$.

В общем случае, когда f имеет и выпуклые, и вогнутые участки, эти участки разделяются с помощью вспомогательной функции $A(x)$, график которой соединяет точки перегиба кривой $f(x)$, и представление $f(x)$ получается логической суперпозицией функций $A(x), \widehat{F}(x)$ и $\breve{F}(x)$. Такой принцип работает и в случае кусочно-нелинейной аппроксимации. Он также переносится на функции двух и нескольких переменных.

3. Принятие приближенных решений

Моделирование принятия приближенных решений в условиях неопределенности основано на теории нечетких множеств и нечеткой логике. Пусть n независимых экспертов дают оценку ситуации в условиях неопределенности в виде нечетких подмножеств $A_i, i = 1, \ldots, n$, множества всех возможных альтернатив. Тогда за коллективную оценку ситуации A можно принять общую часть всех индивидуальных оценок, т.е. пересечение нечетких множеств A_i. Недостаток такого подхода – возможность получения коллективной оценки в виде пустого множества. Для выхода из положения за коллективную оценку ситуации A целесообразно принять индивидуальную оценку некоторого «наиболее представительного» эксперта – своего в каждой точке

x. Этот эксперт должен в любой точке x выбирать в качестве меры $M_A(x)$ ее принадлежности коллективной оценке ситуации A ту из данных экспертами i мер $M_{Ai}(x)$ ее принадлежности индивидуальным оценкам A_i, которая достаточно удалена от крайних оценок и занимает «среднее» положение. Пусть нужно принять приближенное решение о значении одной нечеткой переменной по известному значению другой, связанной с ней. Эта задача – аналог хорошо известной: для обычной функции $y = f(x)$ при известном $x = a$ можно принять решение: $y|_{x=a} = f(a)$. Пусть теперь $y = F(x)$ – нечеткая функция, т.е. нечеткое отношение в $OX \times OY$, где OX и OY – оси абсцисс и ординат. Пусть известно нечеткое подмножество A оси OX и надо определить, исходя из F, соответствующее нечеткое подмножество B оси OY. Образуем цилиндрическое нечеткое множество $\widetilde{A}$ с основанием A, являющееся аналогом вертикали $x = a$ функции f. Его функция принадлежности $M_{\widetilde{A}}(x, y) = M_A(x)$, где M_A – функция принадлежности известного множества A. Далее образуем пересечение множества $\widetilde{A}$ с нечеткой функцией F. Получим нечеткое множество $\widetilde{A} \cap F$ – аналог точки пересечения вертикали $x = a$ с кривой $y = f(x)$. Функция принадлежности этого множества

(6) $M_{\widetilde{A} \cap F}(x, y) = M_{\widetilde{A}}(x, y) \wedge M_F(x, y) = M_A(x) \wedge M_F(x, y)$,

где M_F – функция принадлежности множества F. Теперь спроектируем множество $\widetilde{A} \cap F$ на ось OY. В результате получим искомое нечеткое подмножество B этой оси. Его функция принадлежности

(7) $M_B(y) = \bigvee_x M_{\widetilde{A} \cap F}(x, y) = \bigvee_x [M_A(x) \wedge M_F(x, y)]$.

Согласно (7) функция принадлежности искомого нечеткого множества B выражается через заданные функции принадлежности при помощи дизъюнкции и конъюнкции НЛ (точнее, нечеткой логики – частного случая НЛ с множеством-носителем

$C = [0,1]$). Изложенная процедура позволяет принимать приближенные решения о значении нечеткой функции F по известным значениям ее нечетких аргументов $x, y, \ldots$.

4. Построение функциональных генераторов

НЛ – удобное средство построения функциональных генераторов. Согласно (5) любая нелинейная непрерывная функция одной переменной представима в виде $f(x) = L[f_1(x), \ldots, f_n(x)]$, где $f_i(x)$ – линейные функции-образующие, а L – набор операций НЛ. Так что функцию $f(x)$ можно реализовать функциональным генератором из двух последовательных блоков: функционального блока F образующих (вход x, выходы $f_1, \ldots, f_n$) и логического блока L (входы $f_1, \ldots, f_n$, выход $f(x)$). Это блочное построение генераторов остается при переходе к функциям двух и большего числа переменных. Однако для функций большого числа переменных используют более универсальные методы аппроксимации – интерполяционные полиномы. Для некоторых классов нелинейных функций функциональные генераторы строятся проще, чем описано выше. Таковы кусочно-линейные функции, известные как типовые нелинейности и состоящие из горизонтальных, вертикальных и наклонных линейных участков. Например, функции $|x|$, $c - |x|$, $sign\ x$ и многие другие. Эти функции выражаются через операции НЛ непосредственно (без аппроксимации), так что их реализация особенно проста.

Литература

1. ВОЛГИН Л.И., ЛЕВИН В.И. *Непрерывная логика. Теория и применения*. – Таллинн: АН Эстонии, 1990.
2. ГИНЗБУРГ С.А. *Математическая непрерывная логика и изображение функций*. – М.: Энергия, 1968.
3. КОФФМАН А. *Введение в теорию нечетких множеств*. – М.: Радио и связь, 1982.
4. ЛЕВИН В.И. *Автоматное моделирование исторических процессов на примере войн* // Радиоэлектроника. Информатика. Управление. – 2002. – № 2.
5. ЛЕВИН В.И. *Бесконечнозначная логика в задачах кибернетики*. – М.: Радио и связь, 1982.
6. ЛЕВИН В.И. *Динамика логических устройств и систем*. – М.: Энергия, 1980.
7. ЛЕВИН В.И. *Методы непрерывной логики в задачах управления* // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 3.
8. ЛЕВИН В.И. *Структурно-логические методы исследования сложных систем*. – М.: Наука, 1987.
9. ШИМБИРЕВ П.Н. *Гибридные непрерывно-логические устройства*. – М.: Энергоатомиздат, 1990.