

## МЕХАНИЗМЫ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ МОТИВАЦИИ

Н.С. Ермаков<sup>1</sup>

(Самарский государственный аэрокосмический университет,  
Самара)

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Механизмы внутрифирменного налогообложения [2], определяющие распределение прибыли между подразделениями (агентами) и фирмой в целом – центром (например, корпоративным центром [1]), играют стимулирующую роль и побуждают агентов выбирать действия в интересах центра. Ставкой стимулирования называются параметры, определяющие долю дохода или прибыли, которые остаются в распоряжении агентов. Прогрессивным (регрессивным) называется механизм, в котором ставка стимулирования уменьшается (увеличивается) с ростом рентабельности. Дискретные модели противозатратных прогрессивных механизмов исследовались в [1, 2]. Настоящая работа посвящена обобщению и дальнейшему развитию предложенных в [4] моделей экономической мотивации.

### 2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим следующую модель. Пусть в организационной системе (корпорации, фирме и т.д.) помимо одного центра имеются  $n$  агентов, и известны затраты  $c_i(y_i)$   $i$ -го агента, зависящие от его действия  $y_i \in \mathcal{R}_+^1$  (например, от объема выпускаемой агентом продукции),  $i \in \hat{I} N = \{1, 2, \dots, n\}$  – множеству агентов. Будем считать функцию затрат непрерывной, возрастающей, выпуклой и равной нулю в нуле. Целевая функция  $i$ -го агента представляет собой разность между его доходом  $H_i(y_i)$  и затратами  $c_i(y_i)$  [3, 5]:

$$f_i(y_i) = H_i(y_i) - c_i(y_i), \quad i \in \hat{I} N.$$

Рассмотрим пять механизмов экономической мотивации агентов, а именно: механизм отчислений (налога с дохода), централизованный механизм, механизм с нормативом рентабельности, механизм налога с прибыли, механизм участия в прибыли.

### 3. МЕХАНИЗМ ОТЧИСЛЕНИЙ (НАЛОГ НА ДОХОД)

Пусть функции затрат агентов имеют вид:

$$c_i(y_i) = r_i j(y_i / r_i), \quad i \in \hat{I} N,$$

где  $j(x)$  – возрастающая гладкая выпуклая функция, такая, что  $j(0) = 0$ . Обозначим  $x(x) = j^{-1}(x)$  – функцию, обратную производной функции  $j(x)$ .

Пусть задана внутрифирменная (трансфертная) цена  $l$  единицы продукции, производимой агентами, и центр использует норматив<sup>2</sup>  $g \in [0; 1]$  отчислений от дохода агентов. Тогда доход агента  $H_i(y_i) = l y_i$  и целевая функция  $i$ -го агента с учетом отчислений центру имеет вид:

$$(1) f_i(y_i) = (1 - g) l y_i - c_i(y_i), \quad i \in \hat{I} N.$$

Величина  $g$  – норматив отчислений – может интерпретироваться как ставка налога на доход (выручку). Каждый агент выберет действие, максимизирующее его целевую функцию:

$$(2) y_i(g) = r_i x((1 - g) l), \quad i \in \hat{I} N.$$

Целевая функция центра, равная сумме отчислений агентов будет равна

$$(3) F(g) = g l H x((1 - g) l),$$

где  $H = \sum_{i \in \hat{I} N} r_i$ .

Задача центра, стремящегося максимизировать свою целевую функцию заключается в выборе норматива отчислений:

$$(4) F(g) \underset{g \in [0; 1]}{\text{max}}.$$

Если функции затрат агентов являются функциями типа Кобба-Дугласа, то есть  $c_i(y_i) = \frac{1}{a} (y_i)^a (r_i)^{1-a}$ ,  $a \in [1; \infty)$ ,  $i \in \hat{I} N$ , то решение

задачи (4) имеет вид:

$$(5) g^*(a) = 1 - 1/a,$$

то есть оптимальное значение норматива отчислений  $g^*(a)$  возрастает с ростом показателя степени  $a$ . Оптимальное значение целевой функции центра при этом равно:

<sup>1</sup>Статья написана совместно с Д.А. Новиковым.

<sup>2</sup>Легко проверить, что в рамках введенных предположений оптимально использование единого норматива для всех агентов [5].

$$F_g = \frac{a-1}{a} I H x(I/a)$$

то есть  $F_g = (a-1) H \left(\frac{I}{a}\right)^{a/(a-1)}$ , а сумма действий агентов равна

$$Y_g = H x(I/a) = H (I/a)^{1/(a-1)}.$$

Выигрыш  $i$ -го агента равен

$$f_{ig} = r_i (I - I/a) (I/a)^{a/(a-1)}, i \in \hat{I} N,$$

а сумма целевых функций всех участников системы (центра и всех агентов) равна:  $W_g = (a^2 - 1) H (I/a)^{a/(a-1)} / a$ .

#### 4. ЦЕНТРАЛИЗОВАННЫЙ МЕХАНИЗМ

Сравним найденные показатели со значениями, соответствующими другой схеме экономической мотивации агентов, а именно, предположим, что центр использует *централизованную схему* – «забирает» себе весь доход от деятельности агентов, а затем компенсирует им затраты от выбираемых ими действий  $y_i$  в случае выполнения плановых заданий  $x_i$  (компенсаторная система стимулирования).

В этом случае целевая функция центра равна:

$$(6) F(x) = I \sum_{i \in N} x_i - \sum_{i \in N} c_i(x_i).$$

Решая задачу  $F(x) \text{ @ } \max_{\{x_i \geq 0\}}$ , центр находит оптимальные значения планов:

$$(7) x_i = r_i x(I), i \in \hat{I} N.$$

Оптимальное значение целевой функции центра при функциях затрат агентов типа Кобба-Дугласа равно:

$$F_x = I^{a/(a-1)} H (I - I/a),$$

а сумма действий агентов равна

$$Y_x = H x(I) = H I^{1/(a-1)}.$$

Выигрыш  $i$ -го агента тождественно равен нулю, так как центр в точности компенсирует его затраты, а сумма целевых функций всех участников системы  $W_x$  (центра и всех агентов) равна  $F_x$ .

Сравним полученные значения:

$$- F_x / F_g = a^{1/a-1} \text{ } ^3 I \text{ и убывает с ростом } a;$$

$$- Y_x / Y_g = a^{1/a-1} \text{ } ^3 I \text{ и убывает с ростом } a;$$

$$- W_x / W_g = a^{1/a-1} / (a+1) \text{ } ^3 I \text{ и убывает с ростом } a.$$

Таким образом, мы доказали справедливость следующего утверждения.

**Утверждение 1.** Если агенты имеют функции затрат типа Кобба-Дугласа, то централизованный механизм экономической мотивации (с точки зрения организационной системы в целом) выгоднее, чем механизм отчислений, так как обеспечивает больший суммарный выпуск продукции и большее значение суммарной полезности всех элементов системы.

Фраза «с точки зрения организационной системы в целом» в утверждении 1 существенна, так как при использовании централизованного механизма прибыль (значение целевой функции) агентов равна нулю – весь ресурс изымает «метасистема». Такая схема взаимодействия центра с агентами может не устраивать агентов, поэтому исследуем обобщение централизованной схемы, а именно *механизм с нормативом рентабельности*, при котором вознаграждение агента центром не только компенсирует его затраты в случае выполнения плана, но и оставляет в его распоряжении полезность, пропорциональную затратам. Коэффициент этой пропорциональности называется *нормативом рентабельности*. Рассмотренной выше централизованной схеме соответствует нулевое значение норматива рентабельности.

#### 5. МЕХАНИЗМ С НОРМАТИВОМ РЕНТАБЕЛЬНОСТИ

В случае использования норматива рентабельности  $r \text{ } ^3 0$  целевая функция центра равна:

$$(8) F_r(x) = I \sum_{i \in N} x_i - (I+r) \sum_{i \in N} c_i(x_i).$$

Решая задачу  $F_r(x) \text{ @ } \max_{\{x_i \geq 0\}}$  центр находит оптимальные значения планов<sup>3</sup>:

$$(9) x_{ir} = r_i x(I/(I+r)), i \in \hat{I} N.$$

<sup>3</sup> Оптимальное с точки зрения центра значение норматива рентабельности, очевидно, равно нулю.

Оптимальное значение целевой функции центра при функциях затрат агентов типа Кобба-Дугласа равно:

$$F_r = I (I / (I + r))^{1/(a-1)} H (I - I / a),$$

а сумма действий агентов равна

$$Y_r = H x(I / (I + r)) = H (I / (I + r))^{1/(a-1)}.$$

Выигрыш  $i$ -го агента равен

$$f_{ir} = r r_i (I / (I + r))^{a/(a-1)} / a,$$

а сумма целевых функций всех участников системы  $W_r$  (центра и всех агентов) равна

$$W_r = I H (I / (I + r))^{1/(a-1)} (a - I / (I + r)) / a.$$

Сравним полученные значения (отметим, что при  $r = 0$  все выражения для механизма с нормативом рентабельности переходят в соответствующие выражения для централизованного механизма):

$$- F_x / F_r = (1 + r)^{\frac{1}{a-1}} \approx I \text{ и возрастает с ростом } r;$$

$$- Y_x / Y_r = (1 + r)^{\frac{1}{a-1}} \approx I \text{ и возрастает с ростом } r;$$

$$- W_x / W_r = \frac{(1 - \frac{1}{a})(1 + r)^{\frac{1}{a-1}}}{1 - \frac{1}{(1 + r)a}} \approx I \text{ и возрастает с ростом } r.$$

Интересно, что максимум суммы целевых функций участников организационной системы (центра и агентов) достигается при нулевом нормативе рентабельности, то есть в условиях полной централизации!

Сравним теперь механизм с нормативом рентабельности с механизмом отчислений:

$$- F_g / F_r = \left(\frac{1 + r}{a}\right)^{\frac{1}{a-1}} \text{ и возрастает с ростом } r;$$

$$- Y_g / Y_r = \left(\frac{1 + r}{a}\right)^{\frac{1}{a-1}} \text{ и возрастает с ростом } r;$$

$$- W_g / W_r = \frac{(a^2 - 1)}{a^2 - \frac{a}{(1 + r)}} \left(\frac{1 + r}{a}\right)^{\frac{1}{a-1}} \text{ и возрастает с ростом } r.$$

**Утверждение 2.** Если агенты имеют функции затрат типа Кобба-Дугласа, то механизм с нормативом рентабельности  $r = a - 1$  эквивалентен механизму отчислений.

Справедливость утверждения 2 следует из того, что при  $r = a - 1$  все (!) показатели механизма с нормативом рентабельности совпадают с соответствующими показателями механизма отчислений, то есть выполняется  $y_i(g) = x_{ir}$ ,  $i \in \hat{I} N$ ,  $F_g = F_r$ ,  $Y_g = Y_r$ ,  $f_{ig} = f_{ir}$ ,  $i \in \hat{I} N$ ,  $W_g = W_r$ .

Теперь рассмотрим четвертый механизм экономической мотивации – механизм налога на прибыль.

## 6. МЕХАНИЗМ НАЛОГА НА ПРИБЫЛЬ

Если в качестве прибыли агента интерпретировать его целевую функцию – разность между доходом и затратами, то при ставке налога  $b \hat{I} [0; 1]$  на эту прибыль целевая функция  $i$ -го агента примет вид:

$$(10) f_{ib}(y_i) = (I - b) [I y_i - c_i(y_i)], \quad i \in \hat{I} N,$$

а целевая функция центра:

$$(11) F_b(y) = b [I \sum_{i \in N} y_i - \sum_{i \in N} c_i(y_i)].$$

Действия, выбираемые агентами при использовании налога на прибыль, совпадают с действиями, выбираемыми ими при централизованной схеме, следовательно:

$$(12) y_{ib} = r_i x(I), \quad i \in \hat{I} N.$$

Оптимальное значение целевой функции центра при функциях затрат агентов типа Кобба-Дугласа равно<sup>4</sup>:

$$F_b = b I^{a/(a-1)} H (I - I / a),$$

а сумма действий агентов равна

$$Y_b = H x(I) = H I^{1/(a-1)}.$$

Выигрыш  $i$ -го агента равен

<sup>4</sup> Очевидно, что оптимальное с точки зрения центра значение ставки налога на прибыль  $b$  равно единице. При этом механизм с налогом на прибыль превращается в централизованный механизм.

$$f_{ib} = (1 - b) I^{a/(a-1)} r_i (1 - 1/a),$$

а сумма целевых функций всех участников системы (центра и всех агентов) равна:

$$W_b = I^{a/(a-1)} H (1 - 1/a).$$

Сравним полученные значения:

$$- F_x / F_b = 1 / b \approx 1 \text{ и возрастает с ростом } b;$$

$$- Y_x / Y_b = 1;$$

$$- W_x / W_b = 1.$$

Таким образом, механизм налога на прибыль приводит к той же сумме полезностей и к тому же значению суммы равновесных действий агентов, что и централизованный механизм, но в первом случае полезность центра в  $b$  раз ниже, чем во втором. Поэтому механизм налога на прибыль может интерпретироваться как механизм компромисса [5], в котором *точка компромисса* внутри *области компромисса* определяется ставкой налога на прибыль, задающей пропорцию, в которой делится прибыль системы в целом между центром и агентами.

Сравним теперь механизм налога на прибыль с механизмом с нормативом рентабельности:

$$- F_b / F_r = b (1 + r)^{\frac{1}{a-1}};$$

$$- Y_b / Y_r = (1 + r)^{\frac{1}{a-1}} \approx 1;$$

$$- W_b / W_r = \frac{(1 - \frac{1}{a})(1 + r)^{\frac{1}{a-1}}}{1 - \frac{1}{(1 + r)a}} \approx 1.$$

И, наконец, сравним механизм налога на прибыль с механизмом отчислений (механизмом налога с дохода):

$$- F_b / F_g = b a^{\frac{1}{a-1}};$$

$$- Y_b / Y_g = a^{\frac{1}{a-1}};$$

$$- W_b / W_g = a^{\frac{a}{a-1}} / (a + 1).$$

К сожалению, для механизма налога на прибыль не удастся доказать столь общее утверждение, как утверждение 2 для механизма с нормативом рентабельности: а именно, механизмы эквивалентны с точки зрения различных участников при различных соотношениях параметров, которые даются следующим утверждением.

**Утверждение 3.** Если агенты имеют функции затрат типа Кобба-Дугласа, то механизм налога на прибыль:

- при  $b = 1 / a^{\frac{1}{a-1}}$  с точки зрения центра эквивалентен оптимальному механизму отчислений;

- при  $b = 1 - 1 / a^{\frac{a}{a-1}}$  с точки зрения агентов эквивалентен оптимальному механизму отчислений;

- при  $b = 1 / (1 + r)^{\frac{1}{a-1}}$  с точки зрения центра эквивалентен механизму с нормативом рентабельности;

- при  $b = 1 - r / (a - 1) (1 + r)^{\frac{a}{a-1}}$  с точки зрения агентов эквивалентен механизму с нормативом рентабельности.

## 7. МЕХАНИЗМ УЧАСТИЯ В ПРИБЫЛИ

Рассмотрим механизм участия в прибыли, в рамках которого центр получает прибыль  $H(y)$  от деятельности агентов, а затем выплачивает каждому агенту фиксированную (и одинаковую для всех агентов, то есть механизм является унифицированным [5]) долю  $\Psi \hat{I} [0; 1]$  этой прибыли. Целевая функция  $i$ -го агента примет вид:

$$(13) f_{iY}(y) = Y H(y) - c_i(y_i), \quad i \hat{I} N,$$

а целевая функция центра:

$$(14) F_Y(y) = (1 - n Y) H(y).$$

Действия, выбираемые агентами при механизма участия в прибыли равны

$$(15) y_{iY} = r_i x(I Y), \quad i \hat{I} N.$$

Пусть прибыль центра линейна по действиям агентов:  $H(y) = I \sum_{i \in N} y_i$ . Тогда значение целевой функции центра при

функциях затрат агентов типа Кобба-Дугласа равно:

$$F_Y = (1 - n Y) H I x(I Y),$$

а сумма действий агентов равна

$$Y_Y = H x(I Y).$$

Выигрыш  $i$ -го агента равен:

$$f_{iY} = H [n Y I x(I Y) - j(I Y)], i \in N,$$

а сумма целевых функций всех участников системы (центра и всех агентов) равна:

$$W_Y = H [I x(I Y) - j(I Y)].$$

При квадратичных функциях затрат агентов оптимальная с точки зрения центра ставка равна  $Y^* = I / 2 n$ .

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, рассмотрены пять механизмов экономической мотивации. С точки зрения суммы полезностей всех участников системы и суммы действий агентов максимальной эффективностью обладают централизованный механизм и механизм налога на прибыль (с любой ставкой). Использование механизма отчислений или механизма с нормативом рентабельности приводит к меньшей эффективности.

При использовании механизма отчислений, механизма с нормативом рентабельности или механизма налога на прибыль в зависимости от параметров (соответственно – норматива отчислений, норматива рентабельности и ставки налога на прибыль) полезности центра и агентов перераспределяются по-разному по сравнению с централизованным механизмом (см. приведенные выше оценки).

Совместное использование утверждений 1-3 позволяет в каждом конкретном случае получать оценки параметров, при которых различные механизмы эквивалентны. Так, например, при квадратичных функциях затрат ( $a = 2$ ) оптимально следующее значение норматива отчислений (ставки налога с дохода):  $g^* = 0.5$ . При  $r^* = 1$  механизм с нормативом рентабельности полностью эквивалентен механизму отчислений, а при  $b^* = 0.5$  механизм налога на

прибыль эквивалентен им обоим с точки зрения центра, а при  $b^* = 0.75$  – с точки зрения агентов (см. таблицу 1). Отметим низкую эффективность унифицированного механизма участия в прибыли.

Таблица 1

Параметры механизмов экономической мотивации при квадратичных затратах агентов

Механизм	Параметры			
	$F$	$Y$	$W$	$Sf_i$
Налог с дохода	$I^2H/4$	$1H/2$	$3I^2H/8$	$I^2H/8$
Централизованный	$I^2H/2$	$1H$	$I^2H/2$	$0$
Норматив рентабельности	$I^2H/(2(1+r))$	$1H/(1+r)$	$I^2H(1+2r)/(2(1+r)^2)$	$I^2Hr/(2(1+r)^2)$
Налог с прибыли	$bI^2H/2$	$1H$	$I^2H/2$	$(1-b)I^2H/2$
Участие в прибыли	$I^2H/(4n)$	$1H/(2n)$	$I^2H(2n-1)/(4n^2)$	$I^2H(n-1)/(4n^2)$

Перспективным направлением дальнейших исследований представляется обобщение полученных результатов на более общие классы функций затрат, а также исследование механизмов экономической мотивации в моделях организационных систем, учитывающих неопределенные факторы и взаимозависимость агентов (модель сильно связанных агентов [5]).

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Бурков В.Н., Агеев И.А., Баранчикова Е.А., Крюков С.В., Семенов П.И. Механизмы корпоративного управления. М.: ИПУ РАН, 2004. – 109 с.
- 2 Бурков В.Н., Трапезова М.Н. Механизмы внутрифирменного управления. М.: ИПУ РАН, 2000. – 58 с.
- 3 Кочиева Т.Б., Новиков Д.А. Базовые системы стимулирования. М.: Апостроф, 2000. – 108 с.
- 4 Новиков Д.А., Глотова Н.П. Модели и механизмы управления образовательными сетями и комплексами. М.: Институт управления образованием РАО, 2004. – 142 с.
- 5 Новиков Д.А. Стимулирование в организационных системах. М.: Синтег, 2003. – 312 с.