СБАЛАНСИРОВАННЫЕ ДЕРЕВЬЯ

Губко М.В., к.т.н.
(*Институт проблем управления РАН, Москва*)
mgoubko@mail.ru

Введение

В настоящей статье рассматривается задача построения оптимальной иерархической структуры над заданным множеством конечных исполнителей. Подобные задачи возникают при построении оптимальной организационной структуры, а также при разработке схем организации параллельных вычислений.

В статье вводится понятие сбалансированного дерева и показывается, что оптимальная иерархия представляет собой сбалансированное дерево одного из двух типов.

1. Постановка задачи и общие закономерности

Рассмотрим задачу построения оптимальной иерархии над некоторым конечным множеством исполнителей $N = \{1,...,n\}$.

Иерархия состоит из множества менеджеров $M = \{v_1,...,v_q\}$, каждый из которых контролирует некоторое множество исполнителей и/или других менеджеров.

Группой исполнителей $s \subseteq N$ назовем любое непустое подмножество множества исполнителей. Множество исполнителей, которыми непосредственно или через цепочку своих подчиненных управляет менеджер *v* из иерархии *H*, назовем *подчиненной группой исполнителей и обозначим* $s_H(v) \subseteq N$.

В иерархии должен присутствовать топ-менеджер, который контролирует группу *N* из всех исполнителей.

Более формально определение иерархии выглядит так:

Определение 1 [1]. Ориентированный граф $H = (N \cup M, E)$ с множеством ребер подчиненности $E \subseteq (N \cup M) \times M$ назовем *иерархией, управляющей множеством исполнителей N*, если граф *H* ацикличен, любой менеджер имеет подчиненных и найдется менеджер, которому подчинены все исполнители. Через $\Omega(N)$ обозначим множество всех иерархий.

Если множество исполнителей считается заданным, то количество менеджеров в разных иерархиях может отличаться.

Далее будем считать, что каждый исполнитель характеризуется своей *мерой* – положительным числом μ_i, $i \in N$. Содержательно, мера исполнителя означает сложность управления им, которая может зависеть от сложности работы, выполняемой данным исполнителем или от его индивидуальных качеств.

Содержание менеджеров иерархии требует затрат. Таким образом, каждой иерархии $H \in \Omega(N)$ можно поставить в соответствие неотрицательное число – *стоимость иерархии*. *Оптимальной иерархией*, управляющий множеством исполнителей *N*, называется иерархия из $\Omega(N)$, имеющая минимальную стоимость.

Далее предполагается, что стоимость иерархии $C(H)$ складывается из стоимостей менеджеров этой иерархии, то есть $C(H) = \sum_{i=1}^{m} c(v_i)$, а стоимость произвольного менеджера $v \in M$ можно записать в виде $c(v) = c_1(\mu(v)) + c_2(r(v))$, где $\mu(v)$ – суммарная мера исполнителей группы $s_H(v)$, подчиненной менеджеру *v*, $r(v)$ – количество непосредственных подчиненных менеджера *v*, а $c_1(.)$ и $c_2(.)$ – неотрицательные монотонные функции.

Приведенная функция стоимости иерархии является частным случаем определяемой в [1] *секционной функции* стоимости иерархии, в которой стоимость менеджера может зависеть только от состава групп, которыми управляют его непосредственные подчиненные. Задача, таким образом, состоит в поиске оптимальной иерархии над множеством исполнителей *N*.

В [1] формулируются условия, при которых в оптимальной иерархии отсутствует двойное подчинение – каждый менеджер имеет ровно одного начальника (кроме топ-менеджера, у которого начальников нет), то есть оптимальная иерархия является деревом. В частности, это верно, если функция стоимости является *группо-монотонной* [1]. Для рассматриваемой функции затрат это означает, что затраты менеджера v возрастают при увеличении меры $\mu(v)$ контролируемой им группы и при увеличении количества его непосредственных подчиненных $r(v)$. Легко видеть, что так как функции $c_1(.)$ и $c_2(.)$ монотонны, функция затрат менеджера группо-монотонна и оптимальная иерархия является деревом.

Также в [1] формулируется понятие *расширяющей* функции стоимости и доказывается, что для расширяющей функции оптимальна *веерная иерархия*, состоящая из одного менеджера, который непосредственно контролирует всех исполнителей.

Лемма 1. Если для любых целых $r', r'' \geq 2$ $c_2(r') + c_2(r'') \geq c_2(r'+r''-1)$, то функция стоимости расширяющая и оптимальна веерная иерархия.

Доказательство леммы вынесено в приложение.

В частности, условия леммы выполнены, если функция $c_2(.)$ вогнута. Таким образом, имеет интерес рассматривать только случай, когда функция $c_2(.)$ не вогнута, так как в противном случае по лемме 1 оптимальна веерная иерархия и задача не представляет интереса.

Лемма 2. Если в оптимальном дереве менеджер v_i подчинен менеджеру v_j, то $r(v_i) \leq r(v_j)$.

Доказательство леммы вынесено в приложение.

Лемма 2 говорит о том, что в рассматриваемой модели количество подчиненных у менеджера более высокого уровня не может быть меньше, чем у любого из его подчиненных, то есть количество непосредственных подчиненных не убывает «вверх» по иерархии.

2. Два вида сбалансированных деревьев

Данный раздел посвящен построению оптимального дерева в случае, когда фиксированы количество менеджеров и количество непосредственных подчиненных у каждого менеджера. Показывается, что в оптимальное дерево обладает свойством *сбалансированности*, то есть каждый менеджер стремится разделить контролируемых им исполнителей между своими непосредственными подчиненными на группы примерно одинаковой меры. Тем не менее, в зависимости от того, выпукла функция $c_1(.)$ или вогнута, это стремление проявляется по-разному, в результате чего при выпуклой и вогнутой функции $c_1(.)$ оптимальными оказываются разные деревья.

Зафиксируем количество менеджеров q и количество подчиненных $r(v_i)$ у каждого менеджера $i = 1,...,q$. Легко показать, что в любом дереве величины $r(v_i)$ связаны соотношением $\sum_{i=1}^{q} r(v_i) = n + q - 1$ и для любых $r(v_i)$, удовлетворяющих этому равенству, можно построить дерево.

Вопрос состоит в том, как подчинять таких менеджеров друг другу, чтобы получить дерево минимальной стоимости.

Без ограничения общности будем считать, что менеджеры упорядочены по возрастанию $r(v_i)$, то есть $i > j \Rightarrow r(v_i) \geq r(v_j)$.

Рассмотрим следующий алгоритм построения дерева, являющийся обобщением алгоритма Хаффмана [2] построения оптимального бинарного дерева кодирования.

Шаг 0. Определим множество мер исполнителей $\mathrm{M} := \{\mu_1,...,\mu_n\}$. Возьмем менеджера $j = 1$.

Шаг 1. Назначим *j*-му менеджеру группу $g_j \subseteq \mathrm{M}$ из $r(v_j)$ подчиненных с минимальными мерами. Удалим этих исполнителей из множества M и добавим туда менеджера *j* с мерой $\mu(v_j) = \sum_{i \in g_j} \mu_i$.

Шаг *j* от 2 до *q*. Повторим для *j*-го менеджера шаг 1.

В результате получим дерево, которое будем называть деревом Хаффмана. Очевидно, это дерево минимизирует лексикографически вектор $(\mu(v_1),...,\mu(v_q))$ мер управляемых менеджерами групп.

Пусть функция $c_1(.)$ линейна. Тогда для фиксированных q, $r(v_i)$, $i = 1,...,q$ стоимость дерева линейно зависит от суммы

$\sum_{i=1}^{q} \mu(v_i)$ мер всех групп дерева. Оказывается, что в этом случае дерево Хаффмана оптимально. Докажем сначала вспомогательный результат.

Определение 2. *Цепочкой менеджеров* называется последовательность $v_1,...,v_l$ менеджеров, в которой каждый последующий менеджер является подчиненным предыдущего.

Лемма 3. Если функция $c_1(.)$ линейна, то любое оптимальное дерево можно перестроить так, что в начале самой длинной цепочки менеджеров будет находиться группа из $r(v_1)$ исполнителей минимальной меры.

Доказательство леммы приведено в приложении.

Теорема 1. Пусть функция $c_1(.)$ линейна. Тогда для фиксированных q, $r(v_i)$, $i=1,...,q$ дерево Хаффмана имеет минимальную стоимость.

Доказательство теоремы приведено в приложении.

Этот результат остается верным и для произвольной вогнутой функции $c_1(.)$.

Теорема 2. Пусть функция $c_1(.)$ вогнута. Тогда для фиксированных q, $r(v_i)$, $i=1,...,q$ дерево Хаффмана имеет минимальную стоимость.

Доказательство теоремы приведено в приложении.

Из теории кодирования [2] известно, что в дереве Хаффмана непосредственные подчиненные любого менеджера контролируют группы примерно равных размеров, то есть менеджер делит контролируемую им группу примерно поровну между своими подчиненными, так что дерево Хаффмана можно назвать сбалансированным.

Для вычисления дерева Хаффмана имеются эффективные алгоритмы сложности порядка $n\ln n$. Тогда для фиксированного количества менеджеров q задача поиска оптимального количества непосредственных подчиненных каждого менеджера сводится к задаче дискретной оптимизации функции $c(r_1,...,r_q)$ (вычислимой в

среднем за $n\ln n$ операций) при условиях $\sum_{i=1}^{q} r(v_i) = n+q-1$, $r_1 \geq 2$, $r_{i+1} \geq r_i$ для всех $i=1...q-1$.

Пусть теперь функция $c_1(.)$ не вогнута, а, например, выпукла. Тогда легко подобрать пример, в котором дерево Хаффмана уже не будет оптимальным.

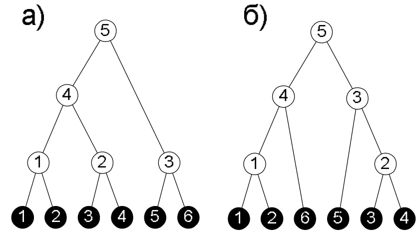

Рисунок 1. Иерархии над множеством из шести исполнителей.

Пример 1. Рассмотрим случай с $n=6$ исполнителями единичной меры и $q=5$ менеджерами, у каждого из которых по два подчиненных. Дерево Хаффмана для такого примера имеет вид, представленный на рисунке 1 а) (конечные исполнители изображены черными кружками, менеджеры – белыми). Менеджеры 1, …, 5 контролируют группы размеров 2, 2, 2, 4, 6 соответственно.

Легко проверить, что в дереве изображенном на рисунке 1 б), менеджеры контролируют группы размеров 2, 2, 3, 3, 6. Поэтому при выпуклой функции $c_1(.)$ это дерево имеет не большую стоимость, чем дерево Хаффмана. •

Для выпуклой функции $c_1(.)$ не удается построить эффективного алгоритма построения оптимального дерева. Тем не менее, оптимальное дерево также должно быть сбалансированным в том смысле, что каждый менеджер делит контролируемую им группу «примерно поровну», насколько это возможно. Ниже этот результат устанавливается более формально.

Лемма 4. Пусть функция $c_1(.)$ строго выпукла, и у некоторого менеджера в оптимальном дереве есть два менеджера-заместителя v

и v', контролирующие группы мер m и m' соответственно. Пусть $m < m'$, тогда $m'' \geq m' - m$, где m'' – разница между мерой любого из непосредственных подчиненных менеджера v' и мерой любого меньшего непосредственного подчиненного менеджера v.

Доказательство леммы вынесено в приложение.

Таким образом, меры групп, контролируемых заместителями одного менеджера, в оптимальном дереве стремятся выровняться.

Лемму 4 можно обобщить на случай, когда v и v' не имеют общего непосредственного начальника. Дадим некоторые определения.

Определение 3. Пусть в дереве выбраны две цепочки менеджеров: $s = (v_1,...,v_l)$ и $s' = (v_1',...,v_{l'}')$, контролирующие группы мер $m_1,...,m_l$ и $m_1',...,m_{l'}'$, причем менеджеры v_1 и v_1' имеют общего непосредственного начальника и $l \leq l'$. *Степень разбалансированности* $\Delta(s,s')$ этих цепочек определим как максимальную меру, которую можно добавить к каждому члену последовательности $m_1,...,m_l$ так, чтобы для всех $i = 1...l$ выполнялись неравенства $m_i + \Delta(s,s') \leq m_i'$, то есть $\Delta(s,s') = \min_{i=1...l}[m_i' - m_i]$.

Для остальных пар цепочек менеджеров степень разбалансированности не определена.

Определение 4. Пусть непосредственные подчиненные менеджеров v и v' контролируют группы мер $m_1,...,m_r$ и $m_1',...,m_{r'}'$ соответственно. *Минимальным скачком* $\delta(v,v')$ называется минимальная **положительная** разница между суммой элементов произвольного подмножества $\{m_1',...,m_{r'}'\}$ и суммы элементов подмножества $\{m_1,...,m_r\}$ такого же размера.

Пример 2. Возьмем некоторых менеджеров v и v', подчиненные которых контролируют группы мер $\{11,7,4\}$, $\{1,18\}$ соответственно. Для них минимальный скачок $\delta(v,v')$ равен 1, так как $1 + 18 - (11 + 7) = 1$, остальные же разницы больше. •

Теорема 3. Пусть функция $c_1(.)$ строго выпукла и в оптимальном дереве степень разбалансированности $\Delta(s,s')$ цепочек $s = (v_1,...,v_l)$ и $s' = (v_1',...,v_{l'}')$ больше нуля. Тогда минимальный скачок $\delta(v_l, v_{l'}')$ не меньше степени разбалансированности $\Delta(s,s')$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству леммы 4.

Утверждение теоремы позволяет преобразовать изображенное на рисунке 1 а) дерево Хаффмана к оптимальному дереву, изображенному на рисунке 1 б). Для этого достаточно передать менеджера 2 из подчинения менеджера 4 менеджеру 3, заменив его конечным исполнителем 6.

Из теоремы видно, что задача построения оптимального дерева является усложненной модификацией известной «задачи о камнях» (в общем случае *NP*-полной), что делает проблематичным поиск эффективных алгоритмов решения задачи об оптимальном дереве для выпуклой функции $c_1(.)$.

3. Заключение

В статье рассмотрена задача построения оптимальной иерархии над заданным множеством конечных исполнителей в случае, когда стоимость узла иерархии (менеджера) зависит от суммарной меры контролируемой группы исполнителей и от количества непосредственных подчиненных менеджера.

Найдены случаи, когда оптимальной является иерархия с единственным менеджером. Показано, что в оптимальной иерархии количество непосредственных подчиненных не убывает «вверх» по иерархии.

Введено понятие сбалансированного дерева и показано, что оптимальная иерархия представляет собой сбалансированное дерево одного из двух типов. Для ряда случаев построен эффективный алгоритм построения оптимальной иерархии с заданным количеством менеджеров и заданным количеством подчиненных у каждого менеджера.

Приложение

Доказательство леммы 1. Пусть в оптимальном дереве менеджер v_i подчинен менеджеру v_j. Удалим менеджера v_i и переподчиним его подчиненных менеджеру v_j. Стоимость дерева уменьшится на $c_1(\mu(v_i)) + c_2(r(v_i)) + c_2(r(v_j))$ и увеличится на $c_2(r(v_j) + r(v_i) - 1)$. Поскольку $c_1(.) \geq 0$, стоимость дерева уменьшится, если $c_2(r(v_i)) + c_2(r(v_j)) \geq c_2(r(v_i) + r(v_j) - 1)$. •

Доказательство леммы 2. Пусть это не так, то есть менеджер v_i подчинен менеджеру v_j и $r(v_i) > r(v_j)$. Возьмем любых $\Delta := r(v_i) - r(v_j) \geq 1$ подчиненных *i*-го менеджера с суммарной мерой μ и переподчиним их *j*-му менеджеру. Стоимость дерева изменится на

$$[c_1(\mu(v_i) - \mu) + c_2(r(v_i) - \Delta) + c_2(r(v_j) + \Delta)]$$
$$-[c_1(\mu(v_i)) + c_2(r(v_i)) + c_2(r(v_j))].$$

Но понятно, что $r(v_i) - \Delta = r(v_j)$, $r(v_i) = r(v_j) + \Delta$, то есть стоимость дерева изменится на $c_1(\mu(v_i) - \mu) - c_1(\mu(v_i))$, и, в силу монотонности функции $c_1(.)$, уменьшится. •

Доказательство леммы 4. Пусть в некотором оптимальном дереве, первым (самым нижним) менеджером в самом длинном пути стоит менеджер v, управляющий группой g из $r(v)$ подчиненных.

Пусть найдутся такие исполнители $i \in g$ и $j \notin g$, что $\mu_i > \mu_j$.

У *i*-го исполнителя есть m_i начальников, отличных от начальников *j*-го исполнителя. Аналогично, у *j*-го исполнителя есть m_j начальников, отличных от начальников *i*-го исполнителя. Так как исполнитель i находится в начале самого длинного пути, понятно, что $m_i \geq m_j$.

Поменяем этих исполнителей местами. Тогда у m_i начальников *i*-го исполнителя меры контролируемых ими групп уменьшатся на $\Delta := \mu_i - \mu_j > 0$, а у m_j начальников *j*-го исполнителя увеличатся на Δ. Так как $m_i \geq m_j$, сумма мер групп всех менеджеров от такой перестановки не увеличится. То есть можно считать, что в

начале самого длинного пути стоит группа из исполнителей с минимальными мерами.

Докажем, что $r(v)$ минимально. Пусть это не так. Тогда по лемме 3 найдется менеджер v', непосредственно контролирующий группу g' из $r(v_1) < r(v)$ исполнителей. По доказанному выше, $\mu(v) \leq \mu(v')$. Тогда поменяем эти группы местами. Аналогично вышеописанному доказывается, что стоимость дерева при этом не увеличится. •

Доказательство теоремы 1. Возьмем дерево Хаффмана *H*. Пусть имеется дерево H' строго меньшей стоимости. По лемме 3 в этом дереве, как и в дереве Хаффмана, имеется менеджер *v*, непосредственно управляющий $r(v_1)$ исполнителями с минимальными мерами. Стоимость этого менеджера одинакова в обоих деревьях. Тогда заменим в обоих деревьях этого менеджера и его подчиненных одним исполнителем с мерой $\mu(v)$. При этом стоимость обоих деревьев уменьшится стоимость этого менеджера, то есть, на одинаковую величину. В получившихся деревьях, аналогично, найдется пара идентичных менеджеров, которых также удалим. Повторяем эти шаги, пока в деревьях не останется один, самый верхний менеджер.

По лемме 2 в корне оптимального дерева находится менеджер с максимальным количеством подчиненных $r(v_q)$. Он же стоит и в корне дерева Хаффмана, то есть стоимость получившихся «свернутых» деревьев одинакова. Значит, и стоимость исходных деревьев одинакова. •

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим некоторое оптимальное дерево *H*. Перенумеруем менеджеров этого дерева так, чтобы меры контролируемых ими групп шли по возрастанию. Получили неубывающую последовательность мер $m_1,...,m_q$. Рассмотрим теперь дерево Хаффмана H'. Также перенумеровав его менеджеров по возрастанию мер контролируемых групп, получим неубывающую последовательность $m_1',...,m_q'$. Предположим, что дерево

Хаффмана не оптимально, а значит, последовательности $m_1,...,m_q$ и $m_1',...,m_q'$ различаются.

Рассмотрим разность стоимостей деревьев H и H' $\Delta C := \sum_{i=1}^{q} c_1(m_i) - \sum_{i=1}^{q} c_1(m_i')$.

Обозначим α_i – наклон некоторой касательной к функции $c_1(.)$ в точке m_i, $i = 1...q$. Так как функция $c_1(.)$ монотонная и вогнутая, последовательность α_i, $i = 1...q$ неотрицательная и не возрастает. Кроме того, в силу вогнутости $c_1(.)$ верно неравенство $c_1(m_i') \le c_1(m_i) + \alpha_i(m_i' - m_i)$ и, значит, $\Delta C \ge \sum_{i=1}^{q} \alpha_i(m_i - m_i')$.

По теореме 1 дерево Хаффмана минимизирует сумму мер групп, то есть $\sum_{i=1}^{q} m_i \ge \sum_{i=1}^{q} m_i'$.

Кроме того, как отмечено выше, дерево Хаффмана минимизирует лексикографически вектор мер групп, то есть если j – минимальный номер менеджера, для которого $m_j \ne m_j'$, то $m_j > m_j'$. Отметим, что $j < q$, так как для любой пары деревьев $m_q = m_q' = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$. Таким образом, получили оценку $\Delta C \ge \sum_{i=j}^{q-1} \alpha_i(m_i - m_i')$.

Если $j = q - 1$, то, очевидно, $\Delta C > 0$. Пусть теперь $j < q - 1$. Зафиксируем m_j и найдем минимум выражения $\sum_{i=j}^{q-1} \alpha_i(m_i - m_i')$ по всем m_i, $i = j+1,...,q-1$ при условиях, что $\sum_{i=j}^{q-1} m_i \ge \sum_{i=j}^{q-1} m_i'$, $m_j > m_j'$ и $m_i \ge m_{i-1}$ при всех $i = j+1,...,q-1$.

Так как α_i не возрастает, минимум достигается при $m_i = m_j$ для всех $i = j+1,...,q-2$, $m_{q-1} = m_{q-1}' + \sum_{i=j}^{q-2}(m_i' - m_j)$ и равен $\sum_{i=j}^{q-2} \alpha_i(m_j - m_i') + \alpha_{q-1} \sum_{i=j}^{q-2}(m_i' - m_j)$.

Так как $m_j > m_j'$ и α_i не возрастает с ростом индекса *i*, этот минимум не превышает $\alpha_{q-1}(\sum_{i=j}^{q-2}(m_j - m_i' + m_i' - m_j) \equiv 0$.

Следовательно, $\Delta C \ge 0$, и стоимость оптимального дерева H не меньше стоимости дерева Хаффмана H', то есть дерево Хаффмана оптимально. •

Доказательство леммы 4. Пусть лемма неверна и найдутся заместитель менеджера v и заместитель менеджера v' с мерами m_1 и m_2 соответственно, что $m_2 > m_1$, $m + m_2 - m_1 < m'$. Тогда поменяем этих заместителей местами. Стоимость менеджеров v и v' изменилась на $c_1(m + (m_2 - m_1)) + c_1(m' - (m_2 - m_1)) - c_1(m) - c_1(m')$, стоимость остальных менеджеров осталась прежней. Если $m + m_2 - m_1 < m'$, то $m < m' - (m_2 - m_1)$, и (в силу строгой выпуклости функции $c_2(.)$) выполнено неравенство $c_1(m + (m_2 - m_1)) + c_1(m' - (m_2 - m_1)) < c_1(m) + c_1(m')$, то есть стоимость дерева строго уменьшилась, что невозможно. •

Литература

1. Мишин С.П. *Оптимальные иерархии управления в экономических системах.* М.: ПМСОФТ, 2004.
2. Huffman D. *A method for the construction of minimum redundancy codes.* Proc. of the IRE 40, 1952, pp. 1098-1101.