ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЙ МОДЕЛИ ФОНДОВОГО РЫНКА

Зинченко В.И., Новиков Д.А., Старостенко В.В.

(*Институт проблем управления РАН, Москва, 3349051, novikov@ipu.ru*)

Ключевые слова: теория игр, равновесие Нэша, фондовый рынок

↵

Абстракт

В докладе рассматривается статическая теоретико-игровая модель поведения участников фондового рынка, для которой строится и анализируется равновесие Нэша.

Пусть имеются два актива и множество $N = \{1, 2, ..., n\}$ агентов, денежное выражение стоимости активов которых есть:

$$w_i^t = u_i^t + n_i^t p^t, \ t = 0, 1, 2, \dots, i \in N, \tag{1}$$

где u_i^t – количество первого актива (денег) у i-го агента в момент времени t, n_i^t – количество второго произвольно делимого актива (далее – просто "актив"), p^t – его стоимость в денежном выражении.

Наложим ограничения на переменные модели (содержательные интерпретации ограничений очевидны):

$$u_i^t \geq 0, \ n_i^t \geq 0, \ t = 0, 1, 2, \dots, i \in N. \tag{2}$$

Пусть заданы начальные условия: $\{u_i^0\}_{i \in N}$, $\{n_i^0\}_{i \in N}$, p^0. Действием i-го агента в момент времени t является объем y_i^t продаваемого или покупаемого актива: если $y_i^t \geq 0$, то актив покупается, если $y_i^t \leq 0$, то актив продается. Обозначим $y^t = (y_1^t, y_2^t, \dots, y_n^t)$ – вектор действий агентов в момент времени t.

Предположим, что цена, по которой осуществляется покупка и продажа (будем считать, что эти цены совпадают и осуществление любой сделки любого объема всегда возможно), складывается в результате поведения агентов в предыдущем периоде (соотношения спроса и предложения), а также от фактора $\theta \in \Re^1$, отражающего тренд цены актива относительно изменения во времени "ценности" денег, то есть

$$p^t = F(p^{t-1}, \theta, y^{t-1}), \ t = 1, 2, \dots . \tag{3}$$

Обозначим $y^{1,t} = (y^1, y^2, \dots, y^t)$. В общем случае цена, сложившаяся в периоде t, зависит от "истории игры" $(y^{1,t-1}, p^{1,t-1})$. Однако исследование таких сложных зависимостей выходит за рамки настоящей работы. Запишем балансовые ограничения:

$$n_i^t = n_i^{t-1} + y_i^{t-1}, \ t = 1, 2, \dots, i \in N, \ u_i^t = u_i^{t-1} - y_i^{t-1} p^{t-1}, \ t = 1, 2, \dots, i \in N.$$

Подставляя в них начальные условия, получим:

$$n_i^t = n_i^0 + \sum_{\tau=1}^{t-1} y_i^\tau,\ t = 1, 2, \dots,\quad u_i^t = u_i^0 - \sum_{\tau=1}^{t-1} y_i^\tau p^\tau,\ t = 1, 2, \dots,$$

Подставляя в (1), получим:

$$w_i^t(y^{1,t-1}) = u_i^0 - \sum_{\tau=1}^{t-1} y_i^\tau F(p^{\tau-1}, \theta, y^{\tau-1}) + [n_i^0 + \sum_{\tau=1}^{t-1} y_i^\tau]\, F(p^{t-1}, \theta, y^{t-1}), \quad t = 0, 1, 2, \dots, i \in N, \tag{4}$$

Рекуррентные уравнения (3) и (4) отражают динамику цен и стоимостей активов, которыми обладают агенты.

Введем предположение относительно свойств динамики цен, а именно будем считать, что (3) имеет вид: $p^t = p^{t-1} + \theta + \gamma \sum_{i \in N} y_i^{t-1}$, $t = 1, 2, \dots$, где $\gamma > 0$ – константа. Содержательно цена в периоде t отличается от цены в предыдущем периоде на константу $\theta \in \Re^1$, отражающую относительный тренд, и показатель $\gamma \sum_{i \in N} y_i^{t-1}$, который свидетельствует о соотношении спроса и предложения в предыдущем периоде – если спрос превышает предложение, то цена растет, если предложение превышает спрос, то падает, то есть

$$p^t = p^0 + \theta\, t + \gamma \sum_{\tau=1}^{t-1} \sum_{i \in N} y_i^{\tau-1},\ t = 1, 2, \dots .$$

Подставляя в (1), получим, что выигрыш i-го агента в периоде t, то есть $\Delta w_i^t = w_i^t - w_i^{t-1}$, равен

$$\Delta w_i^t(y^{1,t-1}) = n_i^t\,(p^t - p^{t-1}) = (\theta + \gamma \sum_{i \in N} y_i^{t-1})\,(n_i^0 + \sum_{\tau=1}^{t-1} y_i^\tau),\ t = 1, 2, \dots, i \in N. \tag{5}$$

Выпишем теперь с учетом (3)-(5) ограничения (2):

$$\begin{gathered} n_i^0 + \sum_{\tau=1}^{t-1} y_i^\tau \ge 0,\ t = 0, 1, 2, \dots, i \in N, \\ \sum_{\tau=1}^{t-1} y_i^\tau\, [p^0 - \theta\,\tau + \gamma \sum_{j=1}^{\tau-1} \sum_{i \in N} y_i^{j-1}] \le u_i^0,\ t = 0, 1, 2, \dots, i \in N. \end{gathered} \tag{6}$$

Итак, взаимодействие агентов можно рассматривать как игру в развернутой форме (комбинация выражений (5), например – их сумма, позволяет описать выигрыши агентов, а (6) – множества их допустимых действий), вычисляя для нее совершенное равновесие Нэша (subgame perfect equilibrium) и проводя традиционный для этого класса игр анализ [1, 3, 4]. Однако анализ этот будет достаточно трудоемок в силу того, что стратегией каждого агента является выбор траектории (в суперигре стратегией агента на каждом шаге является отображение истории игры во множество допустимых на этом шаге действий), а допустимые множества и выигрыши на каждом шаге зависят от всей предыстории. Поэтому ограничимся частным случаем, считая, что агенты действуют локально-оптимально, стремясь выбором действия в каждом периоде максимизировать выигрыш именно в этом периоде, без учета влияния на выигрыши и ограничения будущих периодов.

Тогда целевые функции (5) примут вид:

$$f_i^t(y^{t-1}) = (\theta + \gamma \sum_{i \in N} y_i^{t-1})\,(n_i^0 + \sum_{\tau=1}^{t-2} y_i^\tau + y_i^{t-1}),\ t = 1, 2, \dots, i \in N, \tag{7}$$

а ограничения (6):

$$y_i^{t-1} \geq -\sum_{\tau=1}^{t-2} y_i^{\tau} - n_i^0,\ t = 1, 2, \ldots,\ i \in N,$$

$$[\sum_{\tau=1}^{t-2} y_i^{\tau} + y_i^{t-1}]\ \{\sum_{\tau=1}^{t-2} y_i^{\tau}\,[p^0 - \theta\,\tau + \gamma \sum_{j=1}^{\tau-1} \sum_{i \in N} y_i^{j-1}\,] + \tag{8}$$

$$+\, y_i^{t-1}[p^0 - \theta\,\tau + \gamma \sum_{j=1}^{\tau-1} \sum_{i \in N} y_i^{j-1}\,]\} \leq u_i^0,\ t = 1, 2, \ldots,\ i \in N.$$

Для каждого фиксированного момента времени $t = 1, 2, \ldots$ выражения (7) и (8) описывают игру n лиц в нормальной форме. Предполагая, что все параметры игры (множество игроков, все целевые функции и допустимые множества – как текущие, так и предыдущих периодов (включая все ранее выбранные агентами действия, в том числе – начальные значения)) являются общим знанием, исследуем равновесие Нэша однопериодной игры.

Содержательно ограничения (8) означают, что каждый агент может продать актива не больше, чем имеет, и может его купить не более чем на сумму, которой располагает (по цене, которая сложилась с учетом действий его самого и его оппонентов). Отметим, что возможны и более сложные ограничения – когда агент может продать в каждом периоде не более чем фиксированную часть имеющегося у него актива или затратить на приобретение актива не более фиксированной части имеющейся у него денежной суммы.

С учетом анализа ограничений (8), опуская индекс t, соответствующий рассматриваемому моменту времени, получим следующую игру в нормальной форме:

$$f_i(y) = (\theta + \gamma \sum_{i \in N} y_i)\ (a_i + y_i),\quad y_i \in [-\,a_i;\, b_i],\ i \in N,$$

где $a_i = n_i^0 + \sum_{\tau=1}^{t-2} y_i^{\tau} \geq 0$, а $b_i \geq 0$ – действительная константа, соответствующая ограничению (8), $i \in N$. Равновесие Нэша y^* этой игры имеет следующий вид:

$$y_i^* = \begin{cases} b_i, & \text{если } \theta + \gamma \sum_{j \in N} b_j \geq 0 \\ -a_i, & \text{если } \theta + \gamma \sum_{j \in N} b_j < 0 \end{cases},\ i \in N. \tag{9}$$

С содержательной точки зрения структура равновесия Нэша такова: либо все агенты приобретают актив на все имеющиеся у них средства (если они тем самым "увеличивают" относительную цену актива), либо все агенты продают все имеющиеся у них активы (если они тем самым "уменьшают" относительную цену актива).

Понятно, что такие ситуации редко встречаются на практике (если все продают, то кто же покупает, и наоборот). Поэтому вспомним, что равновесие (9) вычислено в предположении, что все параметры игры являются общим знанием. Можно отказаться от этого предположения и исследовать (сначала однопериодную) рефлексивную игру [2], описываемую иерархией представлений агентов о тренде $\theta \in \Re^1$ и/или о параметрах друг друга: имеющихся в распоряжении оппонентов количествах денег и актива, то есть о векторах $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Однако такой анализ выходит за рамки настоящей работы и является перспективным направлением дальнейших исследований.

Важный качественный вывод, который можно сделать на основании рассмотрения модели (9), заключается в том, что в силу "линейности" модели и "однородности" (одинаковости) агентов, число последних не существенно – всех агентов, придерживающихся правила принятия решений (9) можно представить как одного агента, распоряжающегося суммарными активами рассматриваемых агентов. Это замечание упрощает модель и дает возможность рассматривать отдельно лишь агентов, различающихся рангами рефлексии или представлениями о существенных параметрах.

Поэтому рассмотрим следующую модель. Пусть имеется один агент, обладающий в начальный момент времени суммой $u_0 \geq 0$ и активом $n_0 \geq 0$. Цена в начальный момент времени p_0, а также тренд θ, ограничения и параметры $\gamma \geq 0$ и $\rho \in [0; 1]$ (доля активов, которой в каждом периоде может распоряжаться агент – до сих пор рассматривался случай $\rho = 1$) агенту известны.

В соответствии с результатами анализа модели (9) в начальный момент времени у агента имеются две альтернативы: либо приобрести актив на сумму $\rho\, u_0$, либо продать $\rho\, n_0$ единиц актива.

В зависимости от действий агента y сложится цена $p = p_0 + \theta + \gamma\, y$. Если агент приобретает актив, то сложится цена $p^+ = p_0 + \theta + \gamma\, \rho\, u_0 / p_0$. Если агент продает актив, то сложится цена $p^- = p_0 + \theta - \gamma\, \rho\, n_0$.

Начальное значение целевой функции агента равно $u_0 + n_0\, p_0$, конечное:

- $(1 - \rho)\, u_0 + (n_0 + \rho\, u_0 / p_0)\, p^+$, если актив приобретается;
- $u_0 + \rho\, n_0\, p_0 + (1 - \rho)\, n_0\, p^-$, если актив продается;
- $u_0 + n_0\, (p_0 + \theta)$, если агент не предпринимает никаких действий.

Следовательно, для того, чтобы выяснить, какое из трех действий (покупать, продавать или ничего не делать) предпримет агент, необходимо сравнить три полученные величины. Получаем, что, если имеет место положительный тренд ($\theta \geq 0$) или если тренд отсутствует ($\theta = 0$), то актив следует приобретать. При отрицательном тренде ($\theta < 0$) дело обстоит сложнее, а именно актив следует приобретать при

$$\theta + \gamma\, [n_0\, (1 - \rho) + \rho\, u_0 / p_0] \geq 0. \tag{10}$$

Отметим, что (10) при $\rho = 1$ совпадает с условиями выбора стратегий в (9).

Если подходить более корректно и исследовать все соотношения между параметрами, то есть для каждого из трех действий найти условия, при которых данное действие оптимально, то получим, что рациональный агент должен придерживаться следующего алгоритма: приобретать актив, если выполнено условие (10), и продавать его, если верно обратное соотношение. Интересно, что пассивное поведение – не предпринимать никаких действий – не выгодно ни при одной комбинации параметров модели.

Качественный вывод из проведенного анализа следующий. Существование постоянного тренда цены актива относительно "стоимости" денег, приводит к тому, что, если этот тренд положительный, то дальновидно вкладывать все деньги в приобретение актива. Если тренд отрицательный, то наоборот – целесообразно избавляться от актива. Возможность влияния агентами на цену актива за счет своих активных действий (покупки или продажи) приводит к тому, что в случае положительного тренда чем раньше будет приобретен актив, тем быстрее вырастет его цена. Приобретать актив в случае отрицательного тренда имеет смысл только в том случае, если этими действиями можно "преодолеть" тренд, повысив временно цену с тем, чтобы продать актив по этой – максимальной – цене.

Таким образом, ограниченность рассматриваемой модели, порождаемая наличием знакопостоянного тренда, заключается в том, что поведение агентов является "односторонним" и определяемым, в основном, трендом. Введение переменных трендов позволит наблюдать более сложное поведение агентов, но может лишить возможности идентификации точек "перелома трендов" при использовании модели на реальных данных.

Библиографический список

1. Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2002.
2. Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Рефлексивные игры. М.: Синтег, 2003.
3. Fudenberg D., Tirole J. Game theory. Cambridge: MIT Press, 1995.
4. Myerson R.B. Game theory: analysis of conflict. London: Harvard Univ. Press, 1991.