Автоматика и Телемеханика. 2005. № 3.

© 2005 г. М.Б. ИСКАКОВ
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

РАВНОВЕСИЕ В БЕЗОПАСНЫХ СТРАТЕГИЯХ

Исследуется взаимодействие многих участников, делящих между собой ресурс, расположенный на некотором множестве. Для формулируемой задачи в большинстве случаев не существует равновесия Нэша, но в то же время имеется интуитивно ощущаемое устойчивое рациональное поведение участников, основанное на рефлексивном учете взаимных угроз. Для описания такого поведения сформулировано определение равновесия в безопасных стратегиях (РБС), совпадающее со строгим равновесием Нэша там, где оно есть, и существующее для тех ситуаций в поставленной задаче, где оно отсутствует. При помощи введенного определения исследуется исходная задача. Введенное равновесие иллюстрируется также на примерах биматричных игр, соревновательной системы стимулирования, игры, в которой РБС не существует.

1. Введение

В статье исследуется взаимодействие многих участников, делящих между собой ресурс, расположенный на некотором множестве. Стратегией игрока является выбор точки на этом множестве, а его выигрышем – количество ресурса, расположенное в ближайшей окрестности выбранной точки. Такого рода задачи возникают в различных прикладных областях: при исследовании раздела рынка между фирмами, электората между партиями во время предвыборных кампаний и т.д. [1, 2, 3]. Часто такие задачи решаются через конструирование механизмов и правил справедливого дележа и достижения компромисса [1, 4]. В статье рассматривается подход к решению проблемы через исследование игры участников, действующих рационально, независимо, без образования коалиций, соглашений и предварительных договоров об общих правилах.

При таком подходе обнаруживаются ситуации, при которых в игре не существует равновесия Нэша, но имеются интуитивно кажущиеся естественными равновесные состояния. Подобные ситуации, связанные с поиском понятия равновесия более широкого, чем равновесие Нэша, исследуются в [5, 6]. Главная особенность предложенного равновесия в безопасных стратегиях применение теории рефлексивности [7] для анализа структуры взаимных угроз, возникающих в играх с большим количеством участников. Данный подход применим к исследованию соревновательных систем стимулирования [5, 8, 9, 10], где стратегии участников также определяются с учетом потенциальных угроз со стороны конкурентов.

2. Постановка задачи

Рассматривается следующая игра, являющаяся вариантом модели Даунса [1, с. 107-121, 2]. На отрезке $[a, b]$ задана ограниченная непрерывная положительная функция $f(x)$. Для игроков $k \in N = \{1, \ldots, n\}$ заданы их действия $x_k \in [a, b]$ и значения выигрышей K_k, определяемые следующим образом. При помощи индексов $i \in L = \{1, ..., l\}$, $l \le n$, перенумеруем все стратегии игроков x_i, причем каждой стратегии i могут соответствовать несколько игроков, если они выбрали одинаковую стратегию. Игроки (индексы k) нумеруются по возрастанию выбранных стратегий, так же как и сами стратегии (индексы i). Такая двойная нумерация стратегий, привязанная к конкретной ситуации игры $x =(x_1, ..., x_n)$, не ограничивая общности дальнейших рассуждений, упростит их. Чтобы не путаться в такой двойной нумерации стратегий, введем для индексов при них различные обозначения: x_i – при рассмотрении просто стратегии i, x_k – при рассмотрении стратегии игрока k, и x_{ik}, когда нам важно выделить игрока k, выбравшего стратегию i. Определим выигрыш стратегии i:

$$I_i = \int_{(x_{i-1}+x_i)/2}^{(x_i+x_{i+1})/2} f(x)dx, \; i \notin \{1, l\},$$

$$I_1 = \int_{a}^{(x_1+x_2)/2} f(x)dx,$$

(1) $I_l = \int_{(x_{l-1}+x_l)/2}^{b} f(x)dx$.

Выигрыш i-го игрока $K_k = I_i / l_i$, где l_i – количество игроков, выбравших стратегию x_i, одновременно с игроком k.

Данная игра, как правило, не имеет равновесия по Нэшу даже в простейших случаях. Например, пусть количество игроков – 3, интегрируемая функция $f(x) \equiv 1$, $a = 0$, $b = 1$. Тогда если стратегии трех игроков совпадают, то любой из них может увеличить свой выигрыш с 1/3 до величины, сколь угодно близкой к ½, или больше, незначительно отклонившись от общей стратегии. В противном случае существует игрок, стратегия которого не совпадает со стратегией любого другого игрока, и является наибольшей или наименьшей. Такой игрок может увеличить свой выигрыш сдвигая свою стратегию от края отрезка и приближая ее к стратегиям других игроков.

Но если мы при тех же самых условиях рассмотрим любое четное количество игроков, то для такой игры равновесия Нэша существуют, например: $x_{2k} = x_{2k-1} = b + (a - b)(2k - 1) / n$, $k = 1, \ldots, n / 2$.

Требуется найти такое определение равновесия, которое удовлетворяло бы трем условиям: оно должно существовать для поставленной задачи в тех ситуациях, когда не существует равновесие Нэша; оно должно совпадать с равновесием Нэша там, где таковое существует; оно должно соответствовать интуитивным представлениям о рациональном поведении независимых, не договаривающихся между собой игроков.

3. Равновесие в безопасных стратегиях: определения

Введем понятие равновесия, более широкое, чем строгое равновесие Нэша, совпадающее с ним там, где оно существует, и позволяющее искать решения поставленной задачи. Сначала дадим общие определения, потом разъясним их на примерах. Пусть задана игра с множеством игроков $i \in N = \{1, \ldots, n\}$, множеством действий $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и значениями выигрышей $K_i(x)$. Зафиксируем игровую ситуацию $x^* = (x^*_1, \ldots, x^*_n)$.

Определение 1. Ситуация x^* содержит угрозу игроку i со стороны игрока j, если $\exists\, x_j$: $K_j(x_j, x^*_{-j}) \geq K_j(x^*)$ и $K_i(x_j, x^*_{-j}) < K_i(x^*)$; при этом ситуация x^* называется угрожаемой, а ситуация (x_j, x^*_{-j}), так же как и стратегия x_j, – угрожающей игроку i со стороны игрока j.

Определение 2. Множеством $W_i(x^*)$ предпочтительных выборов i-го игрока с учетом угроз относительно ситуации x^* называется множество его стратегий x_i таких, что для любого игрока $j \neq i$ и любой его стратегии x_j выполнено $K_i(x_i, x_j, x^*_{-ij}) \geq K_i(x^*)$.

Определение 3. Стратегия x^*_i игрока i называется стратегией безопасной порядка 0 при заданной обстановке x^*_{-i}, если ситуация x^* не содержит угроз игроку i; множеством $Z_i^{(0)}(x^*_{-i})$ обозначается совокупность всех стратегий x_i, безопасных порядка 0 при заданной обстановке x^*_{-i}; множеством $Y_i^{(0)}(x^*)$ называется множество $Z_i^{(0)}(x^*_{-i}) \cup W_i(x^*)$.

Комментарий. Множество Z есть множество стратегий безопасных при заданной обстановке, а множество Y – множество стратегий, безопасных относительно игровой ситуации. Второе множество более широкое, так как включает такие отклонения от x^*, которые сами по себе не являются безопасными, но все содержащиеся в них угрозы предпочтительней исходной ситуации. Различие двух множеств становится существенным, когда ситуация x^* оказывается более проигрышной, чем все возможные угрозы.

Определение 4. Стратегия x^*_i игрока i называется стратегией безопасной порядка m при заданной обстановке x^*_{-i}, если $\forall\, j \neq i$: либо в ситуации x^* игрок j не угрожает игроку i, либо $x^*_j \in Y_j^{(m_j)}(x^*)$, $m_j < m$, и любая угрожающая игроку i стратегия $x_j \notin Y_j^{(m_j)}(x^*)$, причем хотя бы для одного j выполняется вторая часть условия и $m_j = m-1$; множеством $Z_i^{(m)}(x^*_{-i})$ обозначается совокупность всех стратегий x_i, безопасных порядка m при заданной обстановке x^*_{-i}; множеством $Y_i^{(m)}(x^*)$ называется множество $Z_i^{(m)}(x^*_{-i}) \cup W_i(x^*)$.

Комментарий. Это определение означает, что игрок, строящий свою безопасную порядка m стратегию, знает множества безопасности с меньшим порядком своих партнеров, и предполагает, что они не будут из них выходить.

Определение 5. Ситуация x^* называется равновесием в безопасных стратегиях (РБС), если $\forall i$, $\exists\, m_i$: x^*_i – безопасная порядка m_i стратегия, и $x^*_i \in \underset{x_i \in Y_i^{(m_i)}(x^*)}{Arg \max} K_i(x_i, x^*_{-i})$. При этом РБС называется простым, если все составляющие его стратегии имеют порядок безопасности 0, и сложным ($m_1, m_2, ..., m_n$), если среди составляющих его стратегий $\{x_i\}$, $i \in N$, имеющих порядки безопасности m_i, найдется хотя бы одна, для которой $m_i > 0$.

Комментарий. В РБС, сравнительно с равновесием Нэша (строгим), игроки также ищут ситуацию, от которой никому не было бы выгодно отклоняться, но на более узком множестве безопасных стратегий, т.е. участники максимизируют свой выигрыш при соблюдении дополнительного требования «не подставляться» под угрозы со стороны партнеров.

Сформулируем простейшие утверждения, поясняющие введенную систему определений.

Утверждение 1. Строгое равновесие Нэша является РБС.

Доказательство. Если x^* – строгое равновесие Нэша, то для $\forall\, j$, $\forall\, x_j \neq x^*_j$ $K_j(x_j, x^*_{-j}) < K_j(x^*)$. Это значит, что по определению 1 все стратегии являются безопасными порядка 0. ■[1]

Утверждение 2. Если стратегия x^*_i – безопасная порядка m при заданной обстановке x^*_{-i}, то $\exists\, x^*_{i_0}, x^*_{i_1}, ..., x^*_{i_{m-1}} \in x^*_{-i}$ – стратегии, имеющие порядок безопасности соответственно 0, 1,…, $m-1$.

Доказательство. Если имеется x^*_i, безопасная порядка m стратегия, то по определению 2 должно существовать i_{m-1} такое, что $x^*_{i_{m-1}} \in Y_{i_{m-1}}^{(m-1)}(x^*)$. Применив определение 2 к стратегии $x^*_{i_{m-1}}$ и так далее, получаем необходимость существования $x^*_{i_{m-2}}, ..., x^*_{i_1}, x^*_{i_0}$. ■

Замечание. Из последнего утверждения становится ясной структура РБС и способ его построения. Сначала ищутся безопасные стратегии нулевого порядка, существование которых необходимо для безопасных стратегий более высоких порядков, каждая из которых выстраивается на основе уже построенной стратегии предыдущего порядка безопасности.

4. Примеры игр с РБС

4.1. Биматричные игры

Пример 1. Матрицы выигрышей игроков следующие:

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};\ K_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Положение игры $(x_1, x_2) = (1, 1)$ является простым РБС, так как отклонение от него первого игрока увеличивает целевую функцию второго, а отклонение от него второго игрока уменьшает его собственную целевую функцию. Других простых РБС в этой игре нет. При $(x_1, x_2) = (1, 2)$ первому игроку угрожает опасность того, что второй игрок выберет стратегию 1, увеличив свой выигрыш и уменьшив выигрыш второго. При $(x_1, x_2) = (1, 1)$ первому игроку угрожает опасность, что второй выберет 2. При $(x_1, x_2) = (2, 2)$ второму игроку угрожает опасность, что первый выберет 1.

Теперь рассмотрим сложные РБС в этой игре. Множества безопасных стратегий игроков: $Z_1^{(0)}(x_2{=}1) = \{1\}$, $Z_1^{(0)}(x_2{=}2) = \{2\}$, $Z_2^{(0)}(x_1{=}1) = \{1, 2\}$, $Z_2^{(0)}(x_1{=}2) = \{1\}$. Если второй игрок выбрал безопасную стратегию $x_2 = 1$, то первый, предполагая, что второй не выйдет из множества безопасных стратегий порядка 0, может выбрать безопасную стратегию первого порядка $x_1 = 2$. Таким образом, $(x_1, x_2) = (2, 1)$ являются безопасными стратегиями с порядками $^{(1,\,0)}$. Других сложных РБС в этой игре нет. При $(x_1, x_2) = (1, 2)$ угроза второго игрока выбрать стратегию 2 не выводит его из области безопасных стратегий. При $(x_1, x_2) = (2, 2)$ отклонение первого игрока $x_1 = 1$ опасно само по себе, не принадлежит множеству $Z_1^{(0)}(x_2 = 2)$, но угроза для первого перейти из (1, 2) в (1, 1) недейственна относительно (2, 2), так как $K_1(1, 1) = 0 > K_1(2, 2) = -1$, т.е. $\{x_1 = 1\} \in Y_1^{(0)}(2, 2)$.

Пример 2. Добавим к матрицам предыдущей игры строку и столбец:

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix};\ K_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

[1] Здесь и далее символ «■» означает конец примера или доказательства.

В игре появляется новое простое РБС $(x_1, x_2) = (3, 3)$, являющееся равновесием Нэша. Других равновесий при этом не появляется, так как ситуации (1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2) очевидно не выгодны никому. На примере этой игры введем алгоритм исследования биматричной игры на существование РБС.

Шаг 1. Выпишем все угрозы, существующие в этой игре: $(1, 2) \to (1, 1)$, $(2, 1) \to (2, 2)$, $(2, 2) \to (1, 2)$. Множество угроз удобно отображать на направленном графе, вершинами которого являются ситуации игры, а угрозам соответствуют ребра, направленные из угрожаемой ситуации в угрожающую. Для рассматриваемой игры такой граф приведен на рис. 1. Все вершины графа, из которых не выходит ни одного ребра, будут соответствовать игровым ситуациям, безопасным порядка 0 для обоих игроков. Не все такие ситуации будут простыми РБС, но простые РБС следует искать только среди них.

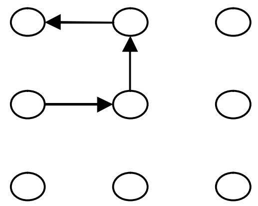

Рис. 1. Граф угроз биматричной игры

Шаг 2. Пользуясь множеством всех угроз (обозначенных на графе), выпишем все множества стратегий безопасных порядка 0: $Z_1^{(0)}(x_2{=}1) = \{1, 3\}$, $Z_1^{(0)}(x_2{=}2) = \{2, 3\}$, $Z_1^{(0)}(x_2{=}3) = \{1, 2, 3\}$, $Z_2^{(0)}(x_1{=}1) = \{1, 2, 3\}$, $Z_2^{(0)}(x_1{=}2) = \{1, 3\}$, $Z_2^{(0)}(x_1{=}3) = \{1, 2, 3\}$.

Шаг 3. Пользуясь множествами безопасных стратегий, выпишем все игровые ситуации, для которых либо стратегии обоих игроков являются безопасными, либо создающее для одного игрока отклонение другого ставит его самого под угрозу. Для данной игры такими ситуациями будут все, кроме (1, 2). Такое широкое множество здесь получается потому, что количество угроз в игре невелико. Выбирать эти ситуации удобно на графе угроз игры.

Шаг 4. Из выделенных ситуаций выберем РБС, исключая два случая. Во-первых, положения, для которых существует угроза отклонения игрока, принадлежащего множеству $Y_i^{(m_i)}(X^*)$, но не принадлежащих более узкому множеству $Z_i^{(m_i)}(X^*_{-i})$. В нашей игре такой ситуацией является (2, 2). Отбрасывая такие наборы стратегий, мы исключаем ситуации, которые «безопасны» только потому, что настолько плохи для игроков, что любое отклонение от них, даже с учетом угроз, может лишь увеличить выигрыш. Во-вторых, ситуации, хотя и являющиеся безопасными, но доминируемые при отклонении стратегии одного из участников ситуациями с такими же порядками безопасности игроков. В данной игре такими являются стратегии (1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2). В результате остаются три РБС: (1, 1) с порядками безопасности $^{(0,\,0)}$, (2, 1) $^{(1,\,0)}$, (3, 3) $^{(0,\,0)}$.

В рассмотренном примере интересно то, что из трех имеющихся РБС два являются простыми и одно сложным, а из простых равновесий – одно является равновесием Нэша. При этом, из всех трех наименее предпочтительным для участников является равновесие Нэша, а наиболее предпочтительным – сложное равновесие.

Пример 3. $K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$; $K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

В этом примере имеются следующие РБС (с порядками безопасности): (1, 1) $^{(0,\,0)}$, (1, 3) $^{(0,\,1)}$, (3, 1) $^{(1,\,0)}$. Здесь в простом РБС выигрыши обоих игроков нулевые. При переходе к сложным равновесиям увеличивает выигрыш тот игрок, который переходит к стратегии первого порядка безопасности, сумев навязать партнеру сохранение им безопасной стратегии нулевого порядка.

Эта иллюстрация показывает, что при множественности РБС появляется неоднозначность исходов игры. В зависимости от того, как сложится структура рефлексии между игроками, существенно могут зависеть их выигрыши.

Пример 4. $K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $K_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

В этой игре есть два равновесия Нэша: (1, 1) и (1, 2) – и одно простое РБС (2, 1). Пример показывает, что возможны нестрогие равновесия Нэша, не являющиеся РБС.

4.2. Соревновательная система стимулирования

Рассмотрим с позиций РБС модель соревновательной системы стимулирования для простейшего случая линейных затрат, описываемую в [5, 8].

Постановка игровой задачи. Имеются n активных элементов (АЭ, игроков). АЭ номер i выбирает действие $x_i \in x = (x_1, ..., x_n)$. Его целевая функция является разностью функций стимулирования и затрат $\eta_i(x_i) = \sigma_i(x_i) - c_i(x_i)$. Функция затрат $c_i(x_i) = k_i x_i$, $k_1 \geq k_2 \geq ... \geq k_n > 0$. Функция стимулирования: $\sigma_i(x_i) = q_{l_i}$, где размеры премий упорядочены по возрастанию $0 = q_1 < q_2 < ... < q_n = 1$, а место l_i определяется по правилу место, занятое участником i, лучше (больше) места, занятого участником j при $x_i > x_j$, или при $x_i = x_j$ если $i > j$.

В [5], первой публикации на данную тему, доказано, что эта игра не имеет равновесных по Нэшу ситуаций, и предложен способ построения С-решений игры, основанный на учете игроками взаимных угроз. Понятие С-решения вводится следующим образом: «Пусть $X_{\pi(x^0)}$ – множество ситуаций x', при которых при всех $i = 1, ..., n$ места $Q_i = Q_i(x^0)$ и ни при каком i участнику i не выгодно бороться на $\{(x' \| x_i)\}$ за места $Q_i \neq Q_i(x^0)$. Тогда назовем x^0 С-решением, если 1) $x^0 \in X_{\pi(x^0)}$ и 2) $\eta_i(x^0) = \max\limits_{x \in X_{\pi(x^0)}} \eta_i(x)$ $(i = 1, 2, ..., n)$» [5, с. 87]. Это определение С-решения эквивалентно для условий поставленной задачи определению простого РБС, причем множеству $X_{\pi(x^0)}$ в терминах определения РБС соответствует совокупность множеств $Y_i^{(0)}(x^*)$, $i \in N$; условию 1) –условие безопасности нулевого порядка стратегий x^*_i; условию 2) – требование $\forall\, x_i \in Y_i^{(0)}(x^*)$: $K_i(x_i, x^*_{-i}) \leq K_i(x^*)$ (см. определения 1, 2 и 3).

В [8, с. 78-85], новейшем и наиболее полном изложении результатов исследования соревновательных систем стимулирования, С-решение данной задачи приводится в следующем виде (с точностью до конкретных буквенных обозначений) [там же, с. 80]:

$$x^*_1 = 0,\ x^*_i = \sum_{j=2}^{i} \frac{q_j - q_{j-1}}{k_{j-1}}.$$

В [8] показано, что никому из игроков невыгодно отклоняться от этих выборов. Если какой-либо игрок отклонится от x^*_i в положительную сторону, то он уменьшит свою целевую функцию, если какой-либо игрок отклонится от x^*_i в отрицательную сторону, то выйдет из множества безопасных стратегий, так как более слабому игроку i–1 станет выгодно конкурировать с ним за занимаемое им место i.

Следует обратить внимание, что если для этой задачи использовать сложные РБС, то среди них окажется много «плохих» ситуаций, например, $x^*_i = 0$, $i \in N$.

4.3. Пример игры без РБС

Приведем пример игры, в которой вообще нет безопасных стратегий. Рассмотрим игру, описанную в разделе 2, изменив значения выигрышей стратегий I_i следующим образом:

$$I_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx,\ i \neq 1,$$

$$I_1 = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_l}^{b} f(x)dx.$$

Покажем, что в такой игре нет безопасных стратегий нулевого порядка (и следовательно, безопасных стратегий вообще). Рассмотрим игрока i. Если $l_i > 1$ (игрок выбрал стратегию, совпадающую с выборами других игроков), то ему выгодней выбрать $x'_i = x_i - \varepsilon$, если $x_i \neq a$, либо $x'_i = b - \varepsilon$ в противном случае, где ε – малая величина. При этом он получает выигрыш $I_i - \delta$, вместо I_i / l_i. Если $l_i = 1$ (игрок i единственный выбрал стратегию x_i), то ему выгодней выбрать $x'_i = b + \varepsilon$, увеличивая свой выигрыш на $\varepsilon f(x_i)$. Таким образом, всем игрокам при выборе стратегии выгодно как можно ближе сдвигаться к своему соседу справа, без совпадения своего x_i с его, и перескакивая при достижении правого конца отрезка $[a, b]$ в левый, образуя «хоровод».

5. Исследование задачи

5.1. Возможные неравновесные ситуации

Теперь вернемся к рассмотрению задачи для разъяснения тех трудностей, которые заставили ввести определение РБС. Смысл игры заключается в том, что имеется некоторый ресурс, распределенный на отрезке в соответствии с $f(x)$, каждый игрок выбирает точку на этом отрезке и функцией его выигрыша будет та доля ресурса, которая окажется в промежутке точек, ближайших к выбору этого игрока.

Рассмотрим возможные изменения стратегии участника игры, т.е. ситуации, которые препятствуют существованию равновесия Нэша в данной игре. Пусть игрок k выбрал стратегию x_k и решает, можно ли ее улучшить, выбрав новую стратегию x'_k. Могут иметь место два случая. Может оказаться так, что новая стратегия получается из старой путем небольшого смещения $x'_k = x_k + \delta$ или $x'_k = x_k - \delta$. При этом она лежит в той же области, что и старая, ее положение относительно выборов других игроков и особых точек функции $f(x)$ (справа или слева) не изменится, границы интеграла целевой функции лишь слегка (на $\delta / 2$) сместятся. Назовем такое изменение стратегии «сдвигом». Новая стратегия также может быть выбрана в совершенно новой области отрезка $[a, b]$ так, что интегрируемая область целевой функции окажется на новом месте, между другими игроками. Назовем такое изменение стратегии «скачком».

Введем обозначения. Пусть x_{ik} перенумерованы так, как указано при постановке задачи в разделе 2, т.е. индекс k и величины K относятся к игрокам, индекс i и величины I – к стратегиям. Двойной индекс ik, обозначает номер стратегии i игрока k. Как k, так и i упорядочены по возрастанию номеров игроков и стратегий. Введем дополнительные обозначения, разделив выигрыши стратегий I_i на две части:

$$I^-_i = \int_{(x_{i-1}+x_i)/2}^{x_i} f(x)dx,\ i \neq 1,\ I^-_1 = \int_a^{x_l} f(x)dx,$$

$$I^+_i = \int_{x_i}^{(x_i+x_{i+1})/2} f(x)dx,\ i \neq l,\ I^+_l = \int_{x_l}^{b} f(x)dx, \qquad (2)$$

$$K_{\min} = \min_{1\le k\le n} K_k,\ K_{\max} = \max_{1\le k\le n} K_k.$$

Рассмотрим для x_i возможные случаи, которые приводят к неравновесности той или иной ситуации.

1. Если $2K_k < K_{\max}$, то для игрока выгодно изменить стратегию скачком $x'_k = x_{\max}$, получив выигрыш ½ $K_{\max}$. Значит, необходимым условием того, что ситуация будет равновесием является $K_k \le K_j$, $\forall k, j$.
2. Если $K_k < I^+_i$ либо $K_k < I^-_i$, то игроку выгодно изменить свою стратегию скачком $x'_k = x_i + \delta$ (или $x'_k = x_i - \delta$), получив выигрыш $K'_k = I^+_i + \varepsilon$ (или $K'_k = I^-_i + \varepsilon$). Необходимое условие равновесия в этом случае $K_k \ge I^+_i$, $K_k \ge I^-_i$, $\forall i, k$.
3. Пусть игрок 1 (или n) – единственный игрок, выбравший стратегию x_{11} (или x_{ln}). Такому игроку выгодно изменить свою стратегию сдвигом $x'_1 = x_1 + \delta$, или $x'_n = x_n - \delta$, увеличив свой выигрыш приблизительно на $(\delta/2) f((x_1 + x_2)/2)$ или $(\delta/2) f((x_{n-1} + x_n)/2)$. Эта ситуация препятствует существованию равновесия Нэша для многих игр (см. пример в разделе 2).
4. Если игрок k – единственный, выбравший стратегию x_{ik}, $ik \neq 1$, $ik \neq l$, и $f((x_{k-1}+x_k)/2) \neq f((x_k+x_{k+1})/2)$, то игроку выгодно изменить стратегию сдвигом $x'_k = x_k - \delta$ или $x'_k = x_k + \delta$ (в зависимости от того, где значение $f(x)$ больше). При этом он увеличивает свой выигрыш приблизительно на $(\delta/2)\, |f((x_{ik-1}+x_{ik})/2) - f((x_{ik}+x_{ik+1})/2)|$. При этом даже если значения $f(x)$ на границах области i-й стратегии равны, то равновесие будет существовать, только если разность производных функции $f(x)$, взятых на левом и правом концах этой области, неотрицательна. Эта ситуация также приведет к отсутствию равновесий Нэша для многих игр (например, для случая строго монотонной функции $f(x)$).
5. Пусть $x_i = x_{ik}$ и эту же стратегию выбрал еще один игрок; тогда если $I^+_i \neq I^-_{ik}$, то игроку выгодно изменить свою стратегию сдвигом, получив вместо $I_i/2$ выигрыш $\max\{I^-_i - \varepsilon, I^+_i - \varepsilon\}$. Необходимое условие равновесия в этом случае $I^+_{ik} = I^-_{ik}$.
6. Пусть при выполнении необходимого условия из предыдущего случая, выполняется дополнительное условие $f((x_{ik-1}+x_{ik})/2) \neq f((x_{ik}+x_{ik+1})/2)$. Тогда игроку выгодно изменить свою

стратегию сдвигом в сторону возрастания $f(x)$: $x_k = x'_k+\delta$ (или $x'_k = x_k-\delta$), увеличив свой выигрыш приблизительно на $\delta \max\{f((x_{ik-1}+x_{ik})/2), f((x_{ik}+x_{ik+1})/2)\}$.

7. Пусть $I^+_{ik} = I^-_{ik}$, $f((x_{ik-1}+x_{ik})/2) \neq f((x_{ik}+x_{ik+1})/2)$, и либо $f'((x_{ik-1}+x_{ik})/2) < 0$, либо $f'((x_{ik}+x_{ik+1})/2) > 0$. Тогда игроку также выгодно сдвигаться в ту сторону, с которой выполняются соответствующие условия для производных.
8. Если $x_i = x_{ik}$ и эту же стратегию выбрало $j > 1$ игроков, то игроку выгодно изменить свою стратегию сдвигом, получив вместо $I_{ik}/_{j+1}$ выигрыш $\max\{I^-_{ik}-\varepsilon, I^+_{ik}-\varepsilon\}$. Значит равновесие невозможно в случае совпадения стратегий более чем двух игроков.

5.2. Построение РБС

Рассмотрим случай, когда функция $f(x)$ строго возрастает в начале отрезка $[a, b]$, достигает максимума, после чего строго убывает. Обозначим через m –номер стратегии i, в окрестности которой $[(x_{m-1}+x_m)/2, (x_m+x_{m+1})/2]$ функция $f(x)$ достигает своего максимума, при этом значение K_m – определяется согласно (1), $k_{\min} \in \mathrm{Argmin}_k K_k$, $K_{\min} = \min\limits_{1\le k\le n} K_k$. Исследуем поведение игрока $k = 1$. Пусть максимум $f(x)$ находится не близко от краев a и b отрезка, т.е. $f(x)$ возрастает на всей области интегрирования I_1 и убывает на всей области интегрирования I_l. Из этого следует, что, во-первых, стратегию x_1 может выбрать только один игрок и, во-вторых, этому игроку будет выгодно сдвигать x'_1 в сторону увеличения. Но если при этом окажется, что $I^-_1 > K_{\min}$, тогда игроку $k_{\min}$ станет выгодно перескочить в область игрока 1, поэтому игрок 1 будет сдвигаться вправо только до тех пор, пока для x'_1 выполняется неравенство $I^-_1 \le K_{\min}$. А это условие означает для первого игрока выполнение определения 1, то есть безопасную стратегию первого порядка. При этом стратегия первого игрока привязана к K_{min}, то есть к размеру самого маленького из выигрышей участников.

Теперь исследуем поведение игрока k со стратегией i, $1 < i < m$. Функция $f(x)$ возрастает на всей области x_{ik}, значит, игроку выгодно сдвигаться вправо, но игроку, находящемуся слева от него тоже

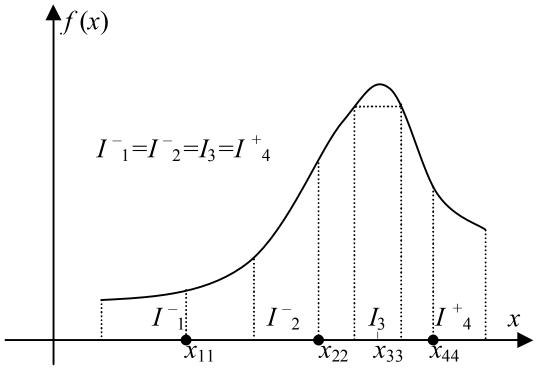

Рис. 2. Пример РБС для условий утверждения 3

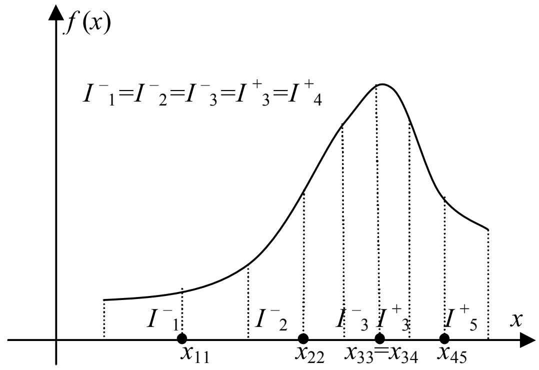

Рис. 3. Пример РБС для условий утверждения 4

выгодно сдвигаться вправо, в силу чего Определение 1 для рассматриваемого игрока не выполняется. Но если игрок, находящийся слева от рассматриваемого, стремящийся сдвигаться вправо, имеет в своем движении некоторый ограничитель (которым является дополнительное условие определения 2), и игрок k знает и учитывает это, то, опираясь на такое знание и на знание величины $K_{\min}$, он может найти наилучшую для себя стратегию (наилучшую при условии, что ни он, ни другие игроки не выходят за пределы ограничения, заданного определением 2). Из этого рассуждения путем рекурсии от игрока k к игроку 1 получается определение безопасной стратегии порядка $k – 1$ (в данном случае).

Для игроков i, $i > m$, выбравших свои стратегии в области убывания $f(x)$, рассуждения аналогичны. Рассмотрим игрока (игроков), выбравшего стратегию m. Если этот игрок один, то, чтобы его стратегия была равновесной, необходимо выполнение условия $f((x_{im-1}+x_{im})/2) = f((x_{im}+x_{im+1})/2)$. Если же их двое, то требуется другое условие: $I^+_{im} = I^-_{im}$, $f(x_{im}) > f((x_{im-1}+x_{im})/2)$, $f(x_{im}) > f((x_{im}+x_{im+1})/2)$. При этом в обоих случаях оказывается, что $K_{im} = K_{\min}$, т.е. игроки, оказавшиеся на вершине, получают наименьший выигрыш из всех. Таким образом, мы доказали два утверждения, определяющие игровые ситуации, являющиеся РБС, для случая однопиковых функций $f(x)$. Построение РБС изображено на рис. 2 и 3. Таким образом, доказаны следующие два утверждения.

Утверждение 3. Пусть $f(x)$ достигает максимума внутри отрезка в точке $x_{\max}$, строго возрастает при $x < x_{\max}$, строго убывает при $x > x_{\max}$. Тогда если

$$x_{\max} \in [(x_{m-1}+x_m)/2,\ (x_m+x_{m+1})/2],$$
$$I^-_1 = I^-_2 = \ldots = I^-_{m-1} = I_m = I^+_{m+1} = \ \ldots\ = I^+_{n+1} = I^+_n,$$
$$f((x_{m-1}+x_m)/2) = f((x_m+x_{m+1})/2),$$

то $x^* = (x_1, \ldots, x_n)$ – РБС.

Утверждение 4. Пусть $f(x)$ – достигает максимума внутри отрезка в точке $x_{\max}$, строго возрастает при $x < x_{\max}$ и строго убывает при $x > x_{\max}$. Тогда если

$$x_{im} = x_{im+1},$$
$$x_{\max} \in [(x_{m-1}+x_m)/2,\ (x_{m+1}+x_{m+2})/2],$$
$$I^-_1 = I^-_2 = \ \ldots\ = I^-_{m-1} = I^-_m = I^+_{m+1} = I^+_{m+2} = \ \ldots\ = I^+_{n+1} = I^+_n\,,$$

то $x^* = (x_1, \ldots, x_n)$ – РБС.

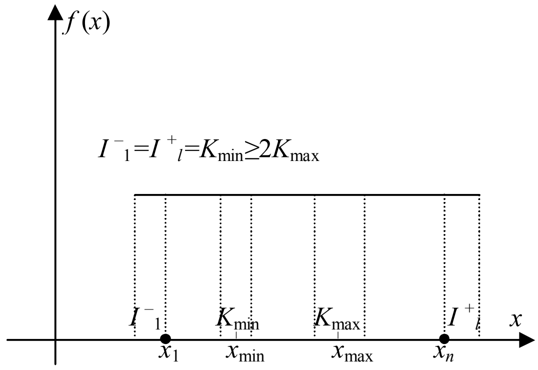

Рис. 4. Пример РБС для условий утверждения 5

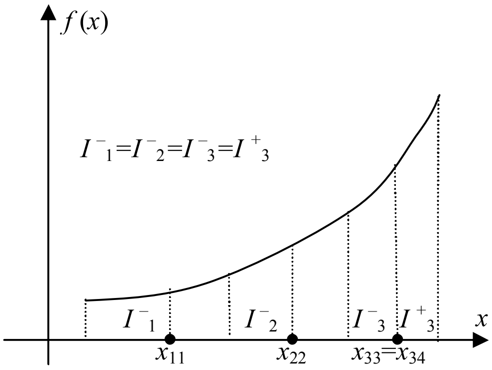

Рис. 5. Пример РБС для условий утверждения 6

Теперь пусть $f(x)$ – постоянная функция. Игроки могут располагаться одиночно и парами $x_k = x_{k+1}$. Однозначно здесь определяются только стратегии игроков x_{i1} и x_{il}, если они одиночны, из условия $I^-_1 = I^+_l = K_{\min}$. Для остальных игроков как одиночных, так и парных требуется только выполнение условия $K_k \le 2K_j$, $\forall\ k, j$. Для этой игры при $n > 3$ существуют равновесия Нэша. Для этого крайние игроки должны быть парными $x_{11} = x_{12}$, $x_{ln-1} = x_{ln}$ и должно выполняться указанное неравенство. Иллюстрация к построению дана на рис. 4. Доказано следующее утверждение.

Утверждение 5. Пусть $f(x)$ – постоянная функция.

Тогда если $x_1 = x_2$, $x_{n-1} = x_n$, и $2K_{\min} \le K_{\max}$, то $x^* = (x_1, \ldots, x_n)$ – равновесие Нэша.

Если стратегия x_1 единична и $I^-_1 = K_{\min}$, либо x_n единична и $I^+_l = K_{\min}$, и $x_{\min}$ не совпадает с x_1 либо x_n; $2K_{\min} \le K_{\max}$, то $x^* = (x_1, \ldots, x_n)$ – РБС, не являющееся равновесием Нэша.

Рассмотрим случай строго возрастающей $f(x)$. При этом игрок, находящийся правее всех, будет стремиться сместиться влево, а игрок, находящийся слева от него, – вправо до тех пор, пока их стратегии не совпадут. При этом $I^+_l = I^-_l = I^+_{l-1} = K_n = K_{n-1} = K_{\min}$. Иллюстрация к построению дана на рис. 5. Доказано следующее утверждение.

Утверждение 6. Пусть $f(x)$ строго возрастает. Тогда если $x_{n-1}=x_n$ и

$I^-_1 = I^-_2 = \ \ldots\ = I^-_{l-1} = I^-_l = I^+_l = K_{\min}$,

то $x^* = (x_1, \ldots, x_n)$ – РБС.

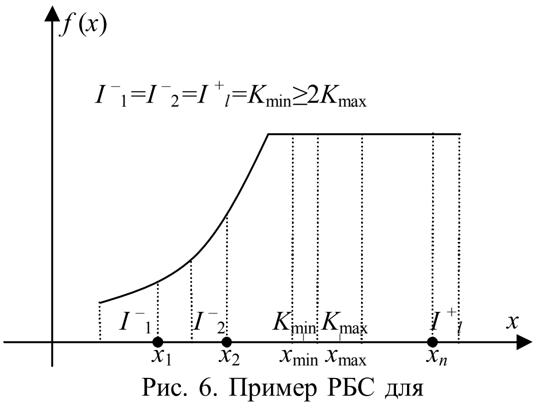

Рис. 6. Пример РБС для условий утверждения 7

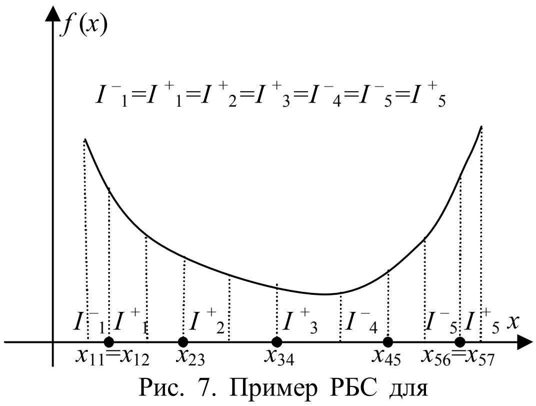

Рис. 7. Пример РБС для условий утверждения 8

Объединим два предыдущих случая. Пусть $f(x)$ сначала строго возрастает, потом достигает максимума и после этого становится константой. Иллюстрация к построению дана на рис. 6. Доказано следующее утверждение.

Утверждение 7. Пусть $f(x)$ строго возрастает при $x < x_{\max}$, $f(x) = f(x_{\max})$, при $x \geq x_{\max}$.
Тогда, если $f((x_{m-1}+x_m)/2) < f(x_{\max})$, $f((x_m+x_{m+1})/2) = f(x_{\max})$,
номер игрока с наименьшим выигрышем $k_{\min} > m$,
$I^-_1 = I^-_2 = \ldots = I^-_{m-1} = I^-_m = K_{\min} \leq K_{\max}$,
то $x^* = (x_1, ..., x_n)$ – РБС.

Пусть теперь $f(x)$ достигает минимума внутри отрезка в точке $x_{\min}$, строго убывает при $x < x_{\min}$, строго возрастает при $x > x_{\min}$. Рассмотрим игроков, примыкающих к точке минимума, так как ситуации всех других игроков этой игры рассмотрены выше. Два игрока, примыкающих к точке минимума, будут стремиться сдвигаться друг от друга (в сторону возрастания функции) до тех пор, пока их стратегии не окажутся на границах множеств безопасности нулевого порядка. Иллюстрация к построению дана на рис. 7. Доказано следующее утверждение.

Утверждение 8. Пусть $f(x)$ достигает минимума внутри отрезка в точке $x_{\min}$, строго убывает при $x < x_{\min}$ и строго возрастает при $x > x_{\min}$. Тогда если

$$x_{\min} \in [(x_{m-1}+x_m)/2,\ (x_{m+1}+x_{m+2})/2],$$
$$f((x_m+x_{m+1})/2) < f((x_{m-1}+x_m)/2),$$
$$f((x_m+x_{m+1})/2) < f((x_{m+1}+x_{m+2})/2),$$
$$x_1 = x_2,\ x_{n-1} = x_n,$$
$$I^+_1 = I^+_2 = \ldots = I^+_{m-1} = I^+_m = I^-_{m+1} = I^-_{m+2} = \ldots = I^-_{n+1} = I^-_n,$$

то $x^* = (x_1, ..., x_n)$ – РБС.

В Утверждениях 4-8, для ряда типов функций $f(x)$ (однопиковые, строго монотонные, константа и другие) сформулированы достаточные условия того, что игровые ситуации являются РБС. Построение наборов стратегий, удовлетворяющих этим достаточным условиям – самостоятельная задача, которую естественнее всего решать численно. Существование таких наборов достаточно очевидно следует из геометрических соображений, а единственность может выполняться не всегда: Утверждения 4 и 5 описывают два различных решения одной и той же задачи, а утверждение 6 задает широкое множество ситуаций РБС. Кроме того, в доказанных утверждениях описано поведение игроков, находящихся в различных положениях: крайний игрок в точке максимума, крайний игрок в точке минимума, крайний игрок при постоянной функции, игрок в области монотонности функции, игрок в области постоянства функции, игрок в области максимума, игрок в области минимума. Опираясь на этот результат, можно конструировать решение игры для различных $f(x)$. Потребуется преодоление двух возможных препятствий. Первое – наличие «мелких» минимумов, максимумов, областей возрастания и убывания, т.е. если $f(x)$ ведет себя достаточно сложно и количество игроков не настолько велико, чтобы это компенсировать. Второе – определение количества игроков, приходящихся на каждый отрезок возрастания, убывания или постоянства $f(x)$.

6. Граф угроз безопасности игры

Набор порядков безопасности стратегий игроков $(m_1, \ldots, m_n)$ дает неполную информацию о сложном РБС. При этом остается неосвещенным вопрос, кто кому угрожает и чьи угрозы являются сдерживающим фактором, обращающим данную игровую ситуацию в равновесие. Цель построения графа угроз – прояснить именно эту структуру отношений игроков.

Граф строится для фиксированной ситуации $x^* = (x_1, ..., x_n)$. Вершинам графа соответствуют игроки. Направленные ребра (дуги) графа отражают угрозы и направлены от угрожающего игрока к тому, которому он угрожает, т.е. дуга (i, j) принадлежит графу угроз ситуации, если существует x_i такое, что $K_i(x_i, x^*_{-i}) \geq K_i(x^*)$ и $K_j(x_i, x^*_{-i}) < K_j(x^*)$.

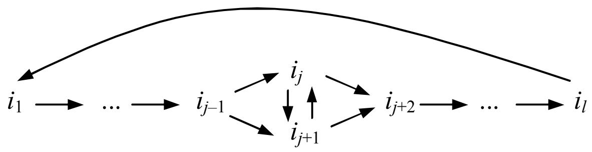

Рис. 8. Граф угроз ситуации игры «хоровод»

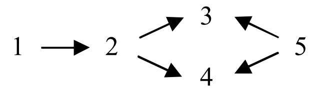

Рис. 9. Граф угроз РБС для примера с рис. 3

На рис. 8 и 9 представлены графы угроз, иллюстрирующие игру в примере из раздела 4 п.3, «хоровод» (при $x_{i_j} = x_{i_{j+1}}$) и РБС для варианта основной задачи, показанного на рис. 3.

Следует отметить отличие графа угроз для ситуации игры и рассматриваемого в примерах биматричных игр графа угроз игры. Там вершинам соответствовали ситуации игры, так что подобный граф можно представить в обозримом виде только для биматричных игр (а вообще он возможен только для дискретных игр). Введенный сейчас граф привязан к одной ситуации игры (причем необязательно РБС) и описывает угрозы, возникающие между игроками именно в этой единственной ситуации. Тем не менее, таким образом определенный граф, его вид позволяют анализировать структуру угроз не только для отдельных ситуаций, но и для целых их классов и игр в целом. Другой недостаток предлагаемого графа заключается в том, что в нем отражены только угрозы, но не видно, как эти угрозы сдерживаются (и сдерживаются ли), поэтому такие графы для РБС и для ситуаций, не являющихся РБС, могут выглядеть одинаково. Но даже с этим ограничением граф показывает структуру первичных угроз, как, например, на рис. 8, а также проясняет, какие угрозы должны сдерживаться принадлежностью стратегий множествам безопасности нулевого и более высоких порядков.

Сформулируем несколько утверждений о графах угроз для ситуации игры.

Утверждение 9. Простому РБС соответствует пустой граф.

Доказательство. Так как в РБС порядка 0 не имеется ни одной угрозы, то в графе угроз не может быть ни одной дуги. ■

Утверждение 10. Если граф угроз ситуации содержит циклы, то такая ситуация не является РБС.

Доказательство. Допустим, что стратегии игроков, входящих в цикл, безопасны. Ни одна из этих стратегий не может быть безопасна порядка 0 по построению графа и определению 1. Ни одна из них не может быть безопасна порядка 1, так как среди угрожающих ей стратегий имеется стратегия безопасная более чем нулевого порядка. Рассуждая аналогичным образом, получаем, что ни одна из этих стратегий не может быть безопасной порядка m (как бы оно ни было велико), так как среди угрожающих ей стратегий имеется одна, с порядком безопасности более чем m. Получили противоречие. ■

Утверждение 11. Для графа угроз сложного (m_1, …, m_n) *РБС, если* $m_i = 0$, *то в вершину* i *не входит ни одна дуга; если* $m_i > 0$, *то* m_i *будет равно максимальной длине маршрутов, заканчивающихся в вершине* i.

Доказательство. Проводится по индукции. Если $m_i = 0$, то игроку i не угрожает никто, значит, в вершину i не входит ни одна дуга. Если $m_i = 1$, то угрожать игроку i могут только игроки с безопасными стратегиями, значит, в вершину i входят только дуги, выходящие из безопасных вершин. Если $m_i = m$, то игроку i угрожают только игроки со стратегиями, порядок безопасности которых не превышает m-1, причем хотя бы для одного из них эта величина достигается. Значит, в вершину i входят только дуги, выходящие из вершин, в которые входят маршруты длины не более m-1, причем хотя бы для одного случая эта величина достигается. ■

В заключение рассмотрения графов следует сказать, что они не только несут информацию об РБС или просто игровой ситуации, но и делают структуру угроз в ней ясной, наглядной и очевидной.

7. Заключительные замечания. Сравнение с другими подходами и рефлексия в РБС

Сравним подход к решению игровых задач на основе безопасных стратегий с другими подходами. Как доказано выше, все строгие равновесия Нэша являются РБС, но нестрогие равновесия

Нэша могут не быть РБС (пример 4). Можно представить игру трех лиц с нестрогим равновесием Нэша и вообще без РБС. Пусть в этой игре из нестрогого равновесия может отклониться первый игрок, ничего не теряя, но нанося ущерб второму игроку. Из этого нового положения второй игрок может отклониться в третье положение, увеличивая свой выигрыш, не уменьшая выигрыш первого (т.е. второе положение для первого игрока безопасно), но уменьшая выигрыш третьего. Из третьего положения третий игрок может отклониться, получив выигрыш и нанеся ущерб первому. Среди этих положений вообще нет безопасных стратегий, хотя нестрогое равновесие Нэша имеется.

Сравним РБС с концепциями равновесий, более общих, чем равновесие Нэша, предлагавшихся другими авторами. В [6, 11] построена на основе введенной базовой системы равновесий последовательность ослабляющихся равновесий и итерационная схема поиска наисильнейшего из них для конкретных задач. При применении этой схемы рассматриваемая задача (сформулированная в разделе 2) «попадает между» двумя соседними элементами построенной последовательности. Под более слабое определение A-равновесия попадает любой набор стратегий игроков (при введении условия строгой положительности $f(x)$), а для более сильного определения B-равновесий в данной игре не существует. Но так как базовая система является открытой, то она может быть дополнена РБС в качестве еще одного базового элемента.

Интересный подход к нахождению решения игры без равновесия Нэша, предложенный в [5], разбирался в качестве примера в разделе 4 п.2. Построенный в статье алгоритм исследования соревновательной системы стимулирования эквивалентен построению РБС для случая нулевого порядка безопасности.

Рассматриваемая игра – с фиксированной суммой выигрыша. Она не кооперативна, здесь не может использоваться концепция Парето-оптимальности. Эта игра также бескоалиционна. Все игроки действуют строго эгоистично и не договариваясь. Так что данное расширение понятия равновесия получено в духе традиционных некооперативных предположений о поведении игроков, только за счет введения простейшей стратегической рефлексии, достаточно естественной с точки зрения смысла игры. Этот смысл – каждый игрок преследует цель увеличения своего выигрыша до тех пор, пока не «подставляется» под угрозу со стороны любого другого игрока, и знает, что все другие игроки действуют таким же образом. При этом каждому игроку не трудно рассчитать (даже на чисто интуитивном уровне) области своей безопасности.

Исследование РБС основано не только на учете угроз одному игроку со стороны других (простые безопасные стратегии), но и на учете этого учета угроз другими игроками (сложные безопасные стратегии). Этим метод поиска безопасных стратегий существенно отличается от подходов, стремящихся исключить рефлексию, таких как метод гарантированного результата или решение в смешанных стратегиях, и часто приводит к другим решениям.

Наиболее содержательным подходом кажется рассмотрение РБС с точки зрения теории рефлексивности, описанной в [7]. Там теоретические результаты сформулированы для произвольного числа игроков, но в качестве примеров рассматриваются в основном игры с небольшим количеством участников (два, три, несколько). В задачах с большим количеством игроков возникает особый вид стратегической рефлексии. С одной стороны, игроки, придерживающиеся РБС, используют рефлексию бесконечного ранга, как представления о способе построения стратегий партнерами в рамках общего знания. С другой стороны, при построении конкретной стратегии с порядком безопасности m игрок учитывает область безопасных стратегий порядка $m-1$ другого игрока, который учитывает безопасные стратегии порядка $m-2$ третьего, и так далее, т.е. использует рефлексивное рассуждение с рангом m. При этом ранг рефлексии второго вида должен быть меньше, чем число игроков. При решении игры используется стратегическая рефлексия порядка не больше $m-1$ (для случая строго монотонной функции, решаемой в разделе 5, достигается уровень рефлексии $m-2$). Определения 1, 2 и 3 задают структуру общего знания игроков о поведении друг друга, а граф угроз РБС наглядно отображает эту структуру.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алескеров Ф.Т., Ортешук П.* Выборы. Голосование. Партии. М.: Академия, 1995.
2. *Downs A*. An Economic Theory of Democracy. N.Y.: Harper & Row, 1957.
3. *Mas-Collel A., Whinston M.D., Green G.R.* Microeconomic theory. N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995.
4. *Брамс С.Д., Тейлор А.Д.,* Делим по справедливости, или гарантия выигрыша каждому. Серия «Экономика и бизнес». М.: СИНТЕГ, 2002.
5. *Сандак Н.Н.* Соревновательные системы // Активные системы. Сб. ст. № 2 (проблемы и методы управления в активных системах). М.: ИПУ, 1974. С. 86-98.
6. *Смольяков Э.Р.* Расширенная базовая система равновесий и методика решения бескоалиционных игр // АиТ. 2001. № 11. С. 145-153.
7. *Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Рефлексивные игры. Серия «Управление организационными системами». М.: СИНТЕГ, 2003.
8. *Новиков Д.А., Цветков А.В.* Механизмы стимулирования в многоэлементных организационных системах. М.: ООО НИЦ «Апостроф», 2000.
9. *Васильев Д.К., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А., Цветков А.В.* Типовые решения в управлении проектами. М.: ИПУ РАН (научн. изд.), 2003.
10. *Цыганов В.В.* Адаптивные механизмы в отраслевом управлении. – М.: Наука, 1991, 166 с.
11. *Смольяков Э.Р.* Эвристические процедуры поиска равновесий в бескоалиционных и антагонистических играх. // Автоматика и телемеханика, № 9, 1996. с. 18-28.