Региональная экономика в информационном измерении: модели, оценки, прогнозы /
Сборник научных трудов под ред. Е.Ю. Иванова, Р.М. Нижегородцева.
М.:Бизнес-Юнитек, 2003. С.296 – 307.

СТРАТЕГИЧЕСКАЯ РЕФЛЕКСИЯ В БИМАТРИЧНЫХ ИГРАХ

Новиков Д.А.
(*Институт проблем управления РАН, Москва*)
nov@ipu.rssi.ru

Введение

Традиционно при рассмотрении статических некооперативных теоретико-игровых моделей вводятся два предположения: во-первых, считается, что все агенты (игроки) выбирают свои стратегии однократно, одновременно и независимо; во-вторых, что информация о целевых функциях и допустимых множествах является *общим знанием* (common knowledge) [11]. Последнее предположение, которое мы обозначим CK, означает, что каждый из агентов знает целевые функции и допустимые множества всех агентов. Кроме того, он знает, что другие агенты знают это, а также то, что они знают, что он это знает и т.д. до бесконечности.

Предположение CK является "предельным", то есть требующим от агентов бесконечной глубины рефлексии [4], и ему в соответствие может быть поставлено классическое равновесие Нэша. Однако информированность агентов может отличаться от вводимой в CK, поэтому игры, в которых информированность о состоянии природы не удовлетворяет CK, назовем *рефлексивными играми* (см. также [6]).

В рамках теоретико-игровых моделей целесообразно различать два типа рефлексии: информационную рефлексию и стратегическую рефлексию. *Информационная рефлексия* – процесс и результат размышлений игрока о том каковы значения неопределенных параметров, что об этих значениях знают и думают его оппоненты (другие игроки). При этом собственно «игровая» компонента отсутствует, так как никаких решений игрок не принимает. Информационная рефлексия относительно подробно рассмотрена в работе [5]. *Стратегическая рефлексия* – процесс и результат размышлений игрока о том, какие принципы принятия решений используют его оппоненты в рамках той информированности, которую он им приписывает в результате информационной рефлексии.

Таким образом, информационная рефлексия имеет место только в условиях неполной информированности, и ее результат используется при принятии решений (в том числе – при стратегической рефлексии). Стратегическая рефлексия имеет место даже в случае полной информированности (за исключением ситуации, в которой принципы принятия решений всеми игроками являются общим знанием – представить себе такое на практике затруднительно), предваряя принятие игроком решения о выбранном действии.

В настоящей работе рассматривается стратегическая рефлексия в биматричных играх (статических конечных играх двух лиц [2]). Основная идея заключается в том, что в биматричных играх, в которых не существует равновесия Нэша, или в которых при существующем равновесии Нэша агенты выбирают субъективные гарантирующие стратегии (то есть стратегии, максимизирующие гарантированный при имеющейся информированности выигрыш), выигрыш каждого из агентов определяется типом разыгрываемой рефлексивной игры, то есть существенным образом зависит как от его ранга рефлексии, так и от ранга рефлексии оппонента. Кроме того, показывается, что неограниченное увеличение ранга стратегической рефлексии не приводит к увеличению выигрыша. Перейдем к формальному описанию.

1. Описание модели

Рассмотрим биматричную игру[1], в которой выигрыши первого и второго игроков (агентов) задаются матрицами $\boldsymbol{A} = ||a_{ij}||$ и $\boldsymbol{B} = ||b_{ij}||$ размерности $n \times m$ соответственно. Обозначим $I = \{1, 2, \dots, n\}$ – множество стратегий (действий) первого игрока (выбирающего строку), $J = \{1, 2, \dots, m\}$ – множество стратегий (действий) второго игрока (выбирающего столбец). В рассматриваемой игре гарантирующие стратегии игроков имеют вид: $i_0 \in \mathrm{Arg} \max\limits_{i \in I} \min\limits_{j \in J} a_{ij}$, $j_0 \in \mathrm{Arg} \max\limits_{j \in J} \min\limits_{i \in I} b_{ij}$. Введем следующие предположения.

[1] *Так как матричные игры (антагонистические конечные игры) являются частным случаем биматричных игр, то все приведенные в настоящей работе результаты справедливы и для рефлексивных матричных игр.*

А.1. Матрицы выигрышей не содержат доминируемых стратегий[2].

А.2. Для каждого игрока существует однозначное отображение, ставящее в соответствие любой стратегии оппонента единственный наилучший ответ данного игрока.

Определим рефлексивную биматричную игру MG_{kl} (matrix game) как биматричную игру с матрицами $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, в которой первый и второй игроки имеют ранги рефлексии, равные k и l соответственно, k, l Î À, где À – множество натуральных чисел.

Поясним, что будет пониматься под *рангом рефлексии* (точнее – под рангом стратегической рефлексии). В рефлексивных биматричных (и не только биматричных – см. [1]) играх выбор стратегий агентами осуществляется на основании знания рангов рефлексии оппонента[3]. Ранги рефлексии определяются следующим образом. «Игрок имеет нулевой ранг рефлексии, если он знает только матрицу платежей. Игрок обладает первым рангом рефлексии, если он считает, что его противники имеют нулевой ранг рефлексии, то есть, знают только матрицу платежей. Вообще, игрок с k-ым рангом рефлексии предполагает, что его противники имеют $k–1$-й ранг рефлексии. Он проводит за них необходимые рассуждения по выбору стратегии и выбирает свою стратегию на основе знания матрицы платежей и экстраполяции действий своих противников» [8].

То есть, в рефлексивных биматричных играх предполагается, что каждый агент знает ранг рефлексии оппонента [8, 9], что позволяет ввести понятие *субъективной гарантирующей стратегии* в рефлексивной биматричной игре MG_{kl}:

(1) $i_k = \arg \max\limits_{i \in I} a_{ij_{k-1}}$, $j_l = \arg \max\limits_{j \in J} b_{i_{l-1}j}$, k, l Î À.

Отметим, что предположение А.2. означает, что у игрока, обладающего заданным рангом рефлексии, существует единственная «оптимальная» стратегия. Следовательно, при определении наилучших ответов [2, 11] вместо выражений «$i_{\dots}$ Î $\mathrm{Arg} \max\limits_{i \in I} \dots$» и «$j_{\dots} \in \mathrm{Arg} \max\limits_{j \in J} \dots$» можно использовать, соответственно, выражения «$i_{\dots} = \arg \max\limits_{i \in I} \dots$» и «$j_{\dots} = \arg \max\limits_{j \in J} \dots$». Несколько забегая вперед, подчеркнем, что при отказе

---

[2] *Если отказаться от этого предположения, то все приведенные в настоящей работе результаты останутся в силе, если под* n *и* m *понимать число соответствующих недоминируемых стратегий.*

[3] *Отметим, что этим предположением исключается из рассмотрения информационная рефлексия.*

от данного предположения гарантированные оценки максимального целесообразного ранга рефлексии, приводимые ниже, могут лишь уменьшится.

Таким образом, игра MG_{00} совпадает с исходной игрой, а субъективным равновесием в игре MG_{kl} является ($a_{i_k j_l}$; $b_{i_k j_l}$), *k, l Î À*. Отметим два любопытных факта. Во-первых, выигрыш любого агента в игре MG_{kl} при *k ³ 1, l ³ 1* может оказаться меньше максимального гарантированного (см. примеры в [1, 7, 9]). Во-вторых, приписывание каждым агентом оппоненту ранга рефлексии на единицу меньше его собственного противоречиво, так как в игре MG_{kl} при *k ³ 1, l ³ 1* это означает, что должно одновременно выполняться $l = k - 1$ и $k = l - 1$, что, очевидно, невозможно. Следовательно, равновесие в рефлексивной игре является существенно субъективным и априори агенты не знают в какую игру они играют (ранги рефлексии обоих агентов не могут быть общим знанием, так как это противоречило бы самому определению ранга рефлексии). Поэтому перспективным направлением будущих исследований представляется изучение информационной рефлексии относительно рангов стратегической рефлексии агентов в биматричных играх.

Внутренняя противоречивость рефлексивных биматричных игр может быть проиллюстрирована следующей схемой – на рисунке 1а) приведено субъективное описание игры MG_{kl} в терминах графа информационного равновесия [10] с точки зрения первого игрока, на рисунке 1б) – субъективное описание той же игры с точки зрения второго игрока.

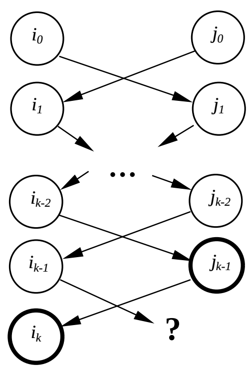

Рис. 1а). Субъективное описание игры MG_{kl} с точки зрения первого агента

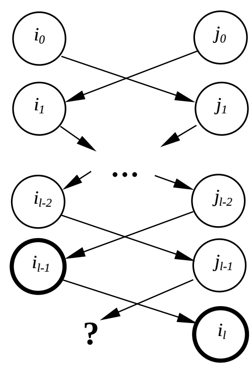

Рис. 1б). Субъективное описание игры MG_{kl} с точки зрения второго агента

Напомним (см. [10]), что граф информационного равновесия обладает тем свойством, что число дуг, входящих в каждую его вершину, должно быть на единицу меньше, чем число игроков (то есть, в биматричных играх равняться единице). Субъективные равновесные стратегии, выделенные на рисунке 1 жирными линиями, приводят к «равновесию» (i_k, j_l). Стратегии i_{k-1} для первого игрока и j_{l-1} для второго не используются в соответствующих их субъективных описаниях игры (см. знаки вопроса на рисунке 1), то есть каждое из них оказывается внутренне незамкнутым.

Завершив краткое обсуждение внутренней противоречивости рефлексивных игр, вернемся к исследованию зависимости субъективного равновесия и выигрышей игроков от рангов их рефлексии.

2. Стратегическая рефлексия

Обозначим $I_K = \bigcup\limits_{k=0,1,\dots,K} i_k$, $J_L = \bigcup\limits_{l=0,1,\dots,L} j_l$, $K = 0, 1, 2, \dots,$ $L = 0, 1, 2, \dots$.

Под I_∞ и J_∞ будем понимать соответствующие объединения по всем рангам рефлексии от нуля до бесконечности.

Если одному игроку (или обоим игрокам) неизвестен ранг рефлексии оппонента, то целесообразно рассмотрение игры $MG_{\infty\infty}$, в которой каждый игрок вычисляет гарантированный результат по рангу рефлексии оппонента. Введем гарантирующие стратегии, соответствующие полной неопределенности относительно ранга рефлексии оппонента:

(2) $i_\infty = \arg \max\limits_{i \in I} \min\limits_{j \in J_\infty} a_{ij}$, $j_\infty = \arg \max\limits_{j \in J} \min\limits_{i \in I_\infty} b_{ij}$.

Аналогично можно определить гарантирующие стратегии в рамках информации о том, что ранг рефлексии оппонента не превышает известной величины (то есть, первый игрок считает, что ранг рефлексии второго не выше L, а второй – что ранг рефлексии первого не выше K):

(3) $i^L = \arg \max\limits_{i \in I} \min\limits_{l \in J_L} a_{ij_l}$, $j^K = \arg \max\limits_{j \in J} \min\limits_{k \in I_K} b_{i_k j}$.

Отметим, что в (3), в отличие от (1), стратегия каждого из игроков не зависит от его собственного ранга рефлексии, а определяется информацией о ранге рефлексии оппонента.

Выражения (1)-(3) не исчерпывают всего многообразия возможных ситуаций, так как, например, первый игрок может предположить, что второй выберет j_∞, и тогда его наилучшим ответом будет $\arg \max\limits_{i \in I} a_{ij_\infty}$, и т.д. Кроме того, хотя к увеличению ранга рефлексии способны лишь сильные игроки, интуитивно понятно, что при росте этого ранга, то есть при удлинении цепочки рассуждений «я думаю, что он думает, что я думаю...» есть опасность «перемудрить». Сильный игрок с высоким рангом рефлексии переоценивает противника, предполагая, что у него ранг рефлексии тоже высокий. Но если ранг соперника на самом деле низкий, это приводит к проигрышу данному более слабому противнику [1, 7, 9]. Следовательно, необходимо систематическое исследование соотношения выигрышей агентов в зависимости от типа разыгрываемой рефлексивной игры. Приведем результаты этого исследования.

Существенным для нашего рассмотрения является наличие или отсутствие равновесия Нэша, а также выбор агентами (и использование при построении субъективных равновесий) гарантирующих стратегий или стратегий, равновесных по Нэшу. Таким образом, возможны следующие четыре ситуации.

Вариант 1 (равновесие Нэша в чистых стратегиях существует, и агенты ориентируются на равновесные по Нэшу стратегии).

Обозначим $(i^*; j^*)$ – номера равновесных по Нэшу чистых стратегий. Тогда, если по аналогии с (1) считать, что в рефлексивной игре каждый агент выбирает свой наилучший ответ на выбор оппонентом соответствующей компоненты равновесия, то получим, что

(4) $i_k = \arg\max_{i \in I} a_{ij^*}$, $j_l = \arg\max_{j \in J} b_{i^* j}$, k, l Î À.

Из (4) в силу определения равновесия Нэша [3, 11] следует, что $i_k = i^*$, $j_l = j^*$, k, l Î À, то есть в рамках варианта 1 стратегическая рефлексия бессмысленна[4] (за исключением, быть может, случая, когда наилучшие ответы определяются таким образом, что агенты выбирают компоненты различных равновесий Нэша в случае, когда последних несколько).

Вариант 2 (равновесие Нэша в чистых стратегиях существует, но агенты выбирают гарантирующие стратегии (1)).

Если гарантирующие стратегии образуют равновесие Нэша (как это имеет место в антагонистических играх с седловой точкой), то попадаем в условия варианта 1. Следовательно, стратегическая рефлексия имеет смысл, только если в рамках варианта 2 равновесие Нэша не совпадает с равновесием в гарантирующих стратегиях (i_0, j_0).

[4] *Под бессмысленностью стратегической рефлексии в матричных играх будем понимать случай, когда равновесие в рефлексивной игре с любой комбинацией ненулевых рангов рефлексии агентов совпадает с равновесием в исходной игре.*

Вариант 3 (равновесия Нэша в чистых стратегиях не существует, и агенты ориентируются на равновесные по Нэшу смешанные стратегии[5]).

Если агенты при определении своих наилучших ответов в рефлексивной игре по аналогии с (4) рассчитывают на то, что оппонент выберет равновесные по Нэшу смешанные стратегии, то легко показать, что максимум ожидаемого выигрыша каждого агента будет достигаться при выборе им также соответствующей равновесной по Нэшу смешанной стратегии. Следовательно, в рамках варианта 3 любое рефлексивное равновесие совпадает с равновесием Нэша в смешанных стратегиях, то есть стратегическая рефлексия в этом случае бессмысленна.

Вариант 4 (равновесия Нэша в чистых стратегиях не существует, и агенты ориентируются на гарантирующие стратегии (1)).

В четвертом варианте анализ рефлексии, очевидно, имеет смысл.

Таким образом, рассмотрев все четыре возможных варианта поведения игроков, получаем, что мы обосновали справедливость следующего утверждения.

Утверждение 1. Стратегическая рефлексия в биматричных играх имеет смысл, если агенты используют субъективные гарантирующие стратегии (1), которые не являются равновесными по Нэшу.

Обозначим

(5) $K_{min} = \min \{K$ Î À $\mid I_K = I_{¥}\}$,

(6) $L_{min} = \min \{L$ Î À $\mid J_L = J_{¥}\}$.

Содержательно, K_{min} и L_{min} – минимальные ранги рефлексии первого и второго агентов, при которых их множества субъективных равновесных стратегий совпадают с максимально возможными в рассматриваемой игре множествами субъективных гарантирующих стратегий.

В силу определения " K, L Î À I_K Í I_{K+1}, J_L Í J_{L+1}. Значит " K ³ K_{min} $I_K = I_{¥}$, " L ³ L_{min} $J_L = J_{¥}$.

В рефлексивных играх, в которых ранг рефлексии первого и второго агентов не превышает K и L соответственно, множества субъективных гарантирующих стратегий первого и второго агентов с точки зрения оппонента равны I_{L-1} и J_{K-1} соответственно. Значит, увеличение рангов рефлексии может приводить к расширению множества субъективных гарантирующих стратегий, если

(7) $L - 1 < K_{min}$,

(8) $K - 1 < L_{min}$.

---

[5] *Напомним, что в матричных играх равновесие Нэша в смешанных стратегиях всегда существует.*

Отметим, что с рассматриваемой точки зрения *максимальный целесообразный ранг рефлексии*[6] первого игрока зависит от свойств субъективных гарантирующих стратегий второго игрока (см.(8)), и наоборот.

С другой стороны, агенту не имеет смысл увеличивать ранг своей рефлексии, если он уже «исчерпал» собственное множество возможных субъективных равновесных стратегий. С этой точки зрения увеличение рангов рефлексии может приводить к расширению множества субъективных гарантирующих стратегий, если

(9) $K < K_{min}$,

(10) $L < L_{min}$.

Объединяя (8) и (9), а также (7) и (10), получаем, что первому агенту не имеет смысла увеличивать свой ранг рефлексии выше

(11) $K_{max} = \min \{K_{min}, L_{min} + 1\}$,

а второму агенту не имеет смысла увеличивать свой ранг рефлексии выше

(12) $L_{max} = \min \{L_{min}, K_{min} + 1\}$.

Обозначим

(13) $R_{max} = \max \{K_{max}, L_{max}\}$.

Таким образом, мы доказали справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2. Использование агентами в биматричной игре рангов стратегической рефлексии выше, чем (11) и (12), не имеет смысла[7].

Утверждение 2 дает возможность в каждом конкретном случае (для конкретной разыгрываемой игры) каждому игроку (и исследователю операций) вычислить максимальные целесообразные ранги стратегической рефлексии обоих игроков.

3. Основные результаты

Так как величины (11)-(13) зависят от игры (матриц выигрышей), то получим оценки зависимости этих величин от размерности матриц выигрышей (очевидно, что $|I_{\infty}| \leq |I| = n$, $|J_{\infty}| \leq |J| = m$, а для игр размерности два справедлива более точная оценка – см. утверждение 3). Для этого введем в рассмотрение граф наилучших ответов.

---

[6] *Под максимальным целесообразным рангом рефлексии игрока будем понимать такое значение ранга его стратегической рефлексии, что увеличение ранга рефлексии выше данного не приводит к появлению новых субъективных (с точки зрения данного игрока) равновесий.*

[7] *То есть, для любого ранга рефлексии, превышающего указанные оценки, найдется ранг рефлексии, удовлетворяющий указанным оценкам и приводящий к тому же субъективному равновесию.*

Графом наилучших ответов $G = (V, E)$ назовем конечный двудольный ориентированный граф, в котором множество вершин $V = I \cup J$, а дуги проведены от каждой вершины (соответствующей действию одного из игроков) к наилучшему на нее ответу оппонента. Опишем свойства введенного графа:

1. Из каждой вершины множества I выходит дуга в вершину множества J (у второго игрока есть наилучший ответ на любое действие первого игрока), из каждой вершины множества J выходит дуга в вершину множества I (у первого игрока есть наилучший ответ на любое действие второго игрока).

2. В каждую вершину множества V входит как минимум одна дуга (так как матрицы выигрышей не содержат доминируемых стратегий, то каждое действие является наилучшим ответом на какое-либо действие оппонента).

3. Если любой путь дважды прошел через одну и ту же вершину, то по определению наилучших ответов его часть является контуром и в дальнейшем новых вершин в этом пути не появится.

4. Максимальное число попарно различных стратегий первого агента, содержащихся в пути, начинающемся в вершине i_0, равно $\min(n; m + 1)$.

5. Максимальное число попарно различных стратегий второго агента, содержащихся в пути, начинающемся в вершине i_0, равно $\min(n; m)$.

6. Максимальное число попарно различных стратегий первого агента, содержащихся в пути, начинающемся в вершине j_0, равно $\min(n; m)$.

7. Максимальное число попарно различных стратегий второго агента, содержащихся в пути, начинающемся в вершине j_0, равно $\min(n + 1; m)$.

Выявленные свойства графа наилучших ответов позволяют получить оценки сверху целесообразных рангов стратегической рефлексии в биматричных играх (см. утверждения 3 и 4).

<u>Утверждение 3.</u> В биматричных играх 2×2, в которых не существует равновесия Нэша, $I_\infty = I$, $J_\infty = J$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную биматричную игру 2×2, в которой не существует равновесия Нэша. Пусть $A_1 = \{x_1, x_2\}$, $A_2 = \{y_1, y_2\}$. Вычислим гарантирующие стратегии i_0 и j_0. Положим для определенности $x_1 = i_0$, $y_1 = j_0$.

Возможны два взаимоисключающих варианта: $j_1 = y_1$ и $j_1 = y_2$.

Если $j_1 = y_1$, то $i_1 = i_2 = x_2$ (иначе (x_1, y_1) – равновесие Нэша). Тогда $j_2 = j_3 = y_2$ (иначе (x_2, y_1) – равновесие Нэша). Следовательно, $i_3 = i_4 = x_1$ (иначе (x_2, y_2) – равновесие Нэша). То есть, в первом случае $I_\infty = I$, $J_\infty = J$.

Если $j_1 = y_2$, то $i_2 = x_2$ (иначе (x_1, y_2) – равновесие Нэша). Тогда $j_3 = y_1$ (иначе (x_2, y_2) – равновесие Нэша). Следовательно, $i_4 = x_1$ (иначе (x_2, y_1) – равновесие Нэша). То есть, во втором случае также $I_\infty = I$, $J_\infty = J$. •

Качественно, утверждение 3 означает, что в биматричной игре 2×2, в которой не существует равновесия Нэша, любой исход может быть реализован как субъективное равновесие в некоторой рефлексивной игре.

Перспективным направлением дальнейших прикладных исследований можно считать анализ субъективных равновесий в базовых ординарных играх двух лиц 2×2 (напомним, что существуют 78 структурно различных ординарных игр, то есть игр, в которых оба игрока, каждый из которых имеет две допустимых стратегии, может строго упорядочить собственные выигрыши от лучшего к худшему [12]).

Утверждение 3 наводит на мысль, что, быть может, во всех биматричных играх, в которых не существует равновесия Нэша, выполнено $I_\infty = I$, $J_\infty = J$. Контрпримером служит приведенный на рисунке 2 граф наилучших ответов в игре 4×4, в котором вершины i_0 и j_0 затенены.

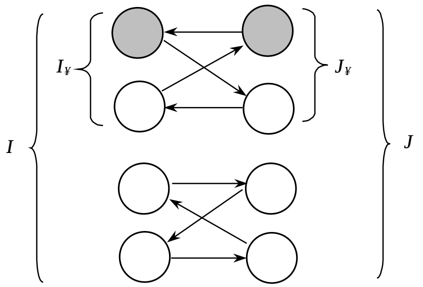

Рис. 2. Пример графа наилучших ответов в игре 4×4,
в которой $I_\infty \subseteq I$, $J_\infty \subseteq J$

Имея грубые оценки сверху ($|I_\infty| \le n$, $|J_\infty| \le m$) «размеров» множеств I_∞ и J_∞, исследуем как быстро (при каких минимальных рангах стратегической рефлексии) эти множества «покрываются» соответствующими субъективными равновесиями.

Третье свойство графа наилучших ответов означает, что в биматричной игре целесообразное увеличение ранга стратегической рефлексии, начиная со второго шага, обязательно изменяет множество стратегий, которые должны быть субъективными гарантирующими при рангах рефлексии меньших или равных данного.

Так как в биматричных играх множества допустимых стратегий конечны, то конечны множества I_∞ и J_∞, следовательно, в силу свойств 4-7 графа наилучших ответов конечны и величины L_{min} и K_{min}, то есть **в биматричных играх неограниченное увеличение ранга рефлексии заведомо нецелесообразно**. Опять же в силу конечности допустимых множеств, величины (11) и (12), определяющие максимальные целесообразные ранги рефлексии, могут быть легко рассчитаны для любой конкретной биматричной игры. Кроме того, свойства графа наилучших ответов позволяют получить оценки сверху максимальных целесообразных рангов рефлексии.

В биматричной игре $n \times m$ гарантированные оценки[8] величин (11)-(13), очевидно, будут зависеть от размерности матриц выигрышей, то есть $K_{min} = K_{min}(n)$, $L_{min} = L_{min}(m)$. Следовательно

(14) $K_{max}(n, m) = \min \{K_{min}(n), L_{min}(m) + 1\}$,

(15) $L_{max}(n, m) = \min \{L_{min}(m), K_{min}(n) + 1\}$.

Выражение (13) примет при этом вид:

(16) $R_{max}(n, m) = \max \{K_{max}(n, m), L_{max}(n, m)\}$.

Из свойств 4-7 графа наилучших ответов и выражений (14)-(16) следует справедливость следующего утверждения.

Утверждение 4. В биматричных играх $n \times m$ максимальные целесообразные ранги стратегической рефлексии первого и второго игроков удовлетворяют следующим неравенствам

(17) $K_{max}(n, m) \leq \min \{n, m + 1\}$,

(18) $L_{max}(n, m) \leq \min \{m, n + 1\}$,

(19) $R_{max}(n, m) \leq \max \{\min \{n, m + 1\}, \min \{m, n + 1\}\}$.

Следствие 1. В биматричной игре $n \times n$, $n \geq 2$, максимальный целесообразный ранг стратегической рефлексии любого игрока[9]

$$R_{max}(n, n) \leq n.$$

Для случая двух стратегий (в силу его распространенности в прикладных моделях) сформулируем отдельное следствие.

Следствие 2. В биматричной игре 2×2 максимальный целесообразный ранг рефлексии не превосходит двух.

Еще раз отметим, что оценки (19)-(21) являются оценками сверху – существование нескольких наилучших ответов на одну и ту же стратегию, наличие в исходной игре равновесия Нэша или доминируемых стратегий

[8] *Под гарантированной оценкой будем понимать оценку сверху, то есть максимально возможную для данного класса игр соответствующую величину.*

[9] *Очевидно, что в игре, в которой один из агентов имеет единственную допустимую стратегию, рефлексия бессмысленна.*

может привести только к тому, что максимальный целесообразный ранг рефлексии не увеличится.

Заключение

Рекламную версию утверждения 1 можно сформулировать следующим образом: **в биматричной игре максимальный целесообразный ранг стратегической рефлексии превышает минимальное число недоминируемых стратегий не более чем на единицу**.

В заключение настоящего подраздела еще раз напомним, что в реальных рефлексивных играх двух лиц (в том числе – описываемых биматричными играми) тип разыгрываемой игры (ранги рефлексии обоих оппонентов k и l) неизвестны достоверно ни одному из игроков. Поэтому процесс принятия ими решений стоит рассматривать, скорее, не как игру, а как рефлексивное принятие решений, которое состоит из двух этапов – принятие предположения о значении ранга рефлексии оппонента и выбор соответствующего этому рангу собственного наилучшего ответа. С этой точки зрения результаты, приведенные в настоящей работе, связывают мощности множеств недоминируемых стратегий игроков с максимальными рангами рефлексии, которые имеет смысл рассматривать.

Литература

1. ВАРШАВСКИЙ В.И., ПОСПЕЛОВ Д.А. *Оркестр играет без дирижера*. М.: Наука, 1989. – 208 с.
2. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. *Игры с непротивоположными интересами*. М.: Наука, 1976. – 327 с.
3. ГУБКО М.В., НОВИКОВ Д.А. *Теория игр в управлении организационными системами*. М.: Синтег, 2002. – 148 с.
4. ЛЕФЕВР В.А. *Конфликтующие структуры*. М.: Советское радио, 1973. – 158 с.
5. НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Активный прогноз*. М.: ИПУ РАН, 2002. – 102 с.
6. НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Рефлексия и ее математическое моделирование*. Настоящий сборник.
7. ПОДДЪЯКОВ А.Н. *Исследовательское поведение: стратегии познания, помощь, противодействие, конфликт*. Ф-т психологии МГУ им. М.В. Ломоносова, 2002. – 189 с.
8. ПОСПЕЛОВ Д.А. *Игры рефлексивные* / Энциклопедия кибернетики. Т. 1. Киев: Гл. редакция УСЭ, 1974. С. 343.

9. ПОСПЕЛОВ Д.А. *Моделирование рассуждений. Опыт анализа мыслительных актов*. М.: Радио и связь, 1989.
10. ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Информационное равновесие* / Управление большими системами. Сборник трудов молодых ученых ИПУ РАН. Выпуск 3. М.: ИПУ РАН, 2003.
11. MYERSON R.B. *Game theory: analysis of conflict*. London: Harvard Univ. Press, 1991. – 568 p.
12. RAPOPORT A., GUYER M. *A taxonomy of 2´2 games* / General Systems: Yearbook of the Society for General Systems Research. 1966. №11. P.203–214.