УДК 519.714.3 *Автоматика и телемеханика. 2000. №9. С.138 – 146*
В.Н. Бурков, д-р техн. наук,
Д.А. Новиков, д-р техн. наук

(Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН, Москва)

СТИМУЛИРОВАНИЕ В АКТИВНЫХ СИСТЕМАХ: ЦЕЛЕВЫЕ ФУНКЦИИ И МЕТРИЗОВАННЫЕ ОТНОШЕНИЯ

Рассматривается постановка задачи стимулирования, в которой предпочтения участников активной системы на конечном множестве возможных действий активного элемента определяются метризованными отношениями. Описываются методы решения, а также приводятся необходимые и достаточные условия эквивалентности рассматриваемой задачи известным из теории активных систем, теории иерархических игр и теории контрактов постановкам задач стимулирования.

1. Введение

В теории выбора индивидуальные и коллективные предпочтения агентов описываются отношениями предпочтения: «обычными» бинарными, метризованными (в которых помимо того находятся два объекта в данном отношении или нет, указывается сравнительная сила предпочтения) и др. [1,2]. В теории игр, а также в разделах теории управления организационными системами, изучающих их теоретико-игровые модели (теория иерархических игр [3], теория активных систем [4,5], теория контрактов [5] и др.), традиционно используется представление предпочтений в виде целевых функций. Связь между представлениями предпочтений участников системы в виде отношений и целевых функций с теоретической точки зрения подробно исследована в [6 и др.].

В настоящей работе рассматривается взаимосвязь между формулировками частной задачи – задачи стимулирования в организационных системах – в терминах метризованных отношений и в терминах целевых функций. Показывается, что в случае, когда предпочтения управляемого субъекта представлены полным аддитивным (согласованным) метризованным отношением [2], обе формулировки эквивалентны. Содержательно при этом «веса» метризованного отношения определяются первыми разностями целевой функции.

В то же время, аддитивность метризованного отношения является достаточно сильным требованием, т.е. в общем случае метризованные отношения описывают более широкий класс предпочтений, чем целевые функции. Поэтому ниже также обсуждаются возможные постановки и методы решения задач стимулирования для предпочтений управляемых субъектов, выраженных метризованными отношениями, не обладающими свойством аддитивности.

2. Задача стимулирования, сформулированная в терминах целевых функций

Приведем постановку задачи стимулирования в двухуровневой активной системе (АС), состоящей из управляющего органа – центра на верхнем уровне иерархии и одного управляемого субъекта – активного элемента (АЭ) на нижнем уровне [4]. Рассматриваемая ниже в настоящем разделе простейшая модель стимулирования является базовой как для теории активных систем [4,5], так и для теории иерархических игр [3] и для теории контрактов [5].

Пусть множество I возможных действий (стратегий) АЭ конечно: $I = \{1, 2, \dots, n\}$ и предпочтения АЭ в отсутствие стимулирования описываются вектором $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, компоненты которого интерпретируются как доход от выбора соответствующего действия. Управление со стороны центра заключается в выборе системы стимулирования $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, т.е. - в доплате (стимулировании, которое по знаку может быть как положительным, так и отрицательным) АЭ за выбор тех или иных действий. Ограничений на абсолютную величину стимулирования накладывать не будем. Целевая «функция» АЭ $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ представляет собой сумму дохода и стимулирования, т.е. $f_i = q_i + \sigma_i,\ i \in I$. В рамках гипотезы рационального поведения [4] АЭ выбирает при известной функции стимулирования действие, максимизирующее его целевую функцию. Если таких действий несколько, то будем считать, что АЭ выберет из них действие, наиболее благоприятное (в оговариваемом ниже смысле) для центра (гипотеза благожелательности [4]). Эффективностью системы стимулирования (управления) называется максимальное значение целевой функции центра на множестве действий АЭ, реализуемых этой системой стимулирования.

Задача стимулирования заключается в назначении центром такой системы стимулирования, при которой АЭ выбирает наиболее благоприятное для центра действие. Решение рассматриваемой задачи элементарно [4,5]: для фиксированной системы стимулирования σ определяется множество действий АЭ, доставляющих максимум его целевой функции (это множество называется множеством реализуемых действий): $P(\sigma) = \{i \in I \mid f_i \geq f_j,\ j \in I\}$, после чего ищется система стимулирования, которая реализует наиболее благоприятное для центра действие.

Например, если предпочтения центра на множестве действий АЭ заданы в виде его функции дохода $H = (H_1, H_2, \ldots, H_n)$ (соответствующая задача называется задачей первого рода [5]), то оптимальна любая система стимулирования σ_1, которая удовлетворяет следующему условию: $P(\sigma_1) \cap Arg \max\limits_{i \in I} H_i \neq \emptyset$.

Если целевая функция центра $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ представляет собой разность между доходом и стимулированием, т.е. $F_i = H_i - \sigma_i,\ i \in I$ (соответствующая задача называется задачей второго рода [5]), то оптимальна система стимулирования $\sigma_2 = \max\limits_{\sigma} \max\limits_{i \in P(\sigma)} \{H_i - \sigma_i\}$.

Записывая определение множества реализуемых действий в виде: $P(\sigma) = \{i \in I \mid q_i + \sigma_i \geq q_j + \sigma_j,\ j \in I\}$, получаем, что минимальной (т.е. имеющей в каждой точке минимальное значение) системой стимулирования, реализующей в рамках гипотезы благожелательности <u>все</u> действия АЭ, является компенсаторная система стимулирования $\sigma^K = (\sigma_1^K, \sigma_2^K, \ldots, \sigma_n^K)$, определяемая следующим образом [4,5]:

(1) $\sigma_j^K = q_k - q_j,\ j \in I$,

где $k = arg \max\limits_{j \in I} q_j$. Множество оптимальных с точки зрения центра в задачах второго рода реализуемых действий при этом есть:

(2) $P(F, f) = Arg \max\limits_{i \in I} \{H_i - \sigma_i^K\} = Arg \max\limits_{i \in I} \{H_i - q_k + q_i\}$.

Содержательно компенсаторная система стимулирования, являющаяся решением задач стимулирования и первого, и второго рода [4,5], делает все допустимые действия АЭ эквивалентными с точки зрения его целевой функции, т.е. в точности компенсирует АЭ те потери, которые он несет при выборе данного действия по сравнению с выбором действия k, приносящего наибольший доход в отсутствие стимулирования (очевидно, доплачивать за выбор этого действия нет смысла).

Итак, при формулировке задачи стимулирования в терминах целевых функций предпочтения АЭ на конечном множестве действий задаются вектором q чисел, разности (1) между которыми есть минимальные выплаты, делающие соответствующие пары действий эквивалентными с точки зрения значений целевой функции АЭ. Альтернативой такому описанию предпочтений является задание предпочтений непосредственно на парах действий АЭ, т.е. перечисление n^2 чисел (являющихся, например, экспертной информацией, полученной в результате парных сравнений альтернатив), интерпретируемых как сравнительная предпочтительность действий в смысле минимальных доплат, делающих соответствующую пару действий эквивалентными. Этот подход и его взаимосвязь с описанием предпочтений в терминах целевых функций рассматривается в следующих разделах.

3. Задача стимулирования, сформулированная в терминах внутренне согласованных метризованных отношений

Целевая функция АЭ, введенная в предыдущем разделе и зависящая от используемой центром системы стимулирования, порождает на множестве I полное антисимметричное транзитивное бинарное отношение, причем всегда существует хотя бы одна недоминируемая по этому отношению альтернатива (действие). В терминах этого бинарного отношения задачу стимулирования можно формулировать следующим образом: найти систему стимулирования такую, что недоминируемой по соответствующему бинарному отношению окажется альтернатива, наиболее благоприятная с точки зрения центра.

Такая постановка задачи выглядит искусственной по следующим причинам. Во-первых, теряется содержательная интерпретация стимулирования как компенсации за выбор того или иного действия (введение явной зависимости бинарного отношения от вектора стимулирования выглядит очень экзотической конструкцией – см. обсуждение в [5]). Во-вторых, одно и то же бинарное отношение может порождаться несколькими (не только различающимися аддитивной константой) целевыми функциями [6]. Кроме того, не совсем ясно как сделать обратный переход - от бинарного отношения к конкретной целевой функции, ведь в прикладных задачах ключевую роль играет именно численное значение вознаграждения, получаемого АЭ.

Промежуточное место между «обычными» бинарными отношениями и целевыми функциями занимают так называемые метризованные отношения (МО) [2]. МО на множестве I задается матрицей $D = ||d_{ij}||$, i, j Î I. Элементы d_{ij} матрицы D, i, j Î I - положительные, отрицательные или равные нулю числа, интерпретируемые как сравнительные предпочтительности различных альтернатив, в нашем случае - действий АЭ (отметим, что мы ограничимся рассмотрением полных отношений, т.е. исключим несравнимость действий и т.д.).

Будем считать, что, если d_{ij} < (>) 0, то действие i в отсутствии стимулирования строго лучше (хуже) для АЭ, чем действие j; если $d_{ij} = 0$, то действия i и j эквивалентны. Содержательно, величина d_{ij} равна той сумме, которую нужно доплатить АЭ, чтобы действие i стало эквивалентно действию j.

Предположим, что управление со стороны центра (стимулирование) заключается в изменении сравнительной предпочтительности различных действий, т.е. элементов матрицы D. Задача стимулирования при этом как и ранее заключается в таком их допустимом изменении, чтобы наилучшим для АЭ стало максимально благоприятное для центра действие.

Предположим, что предпочтения АЭ удовлетворяют следующему свойству: " i, j, m Î I $d_{im} + d_{mj} = d_{ij}$, которое назовем *условием внутренней согласованности* (УВС) предпочтений АЭ (в [2] аналогичное свойство названо аддитивностью, или в частном случае - согласованностью, мы же будем использовать термин «внутренняя согласованность», чтобы различать ее с согласованием интересов центра и АЭ, рассматриваемым ниже). Из УВС следует, что $d_{ii} = 0$, $d_{ij} = - d_{ji}$, i, j Î I, причем граф, соответствующий матрице D, является потенциальным [7] с потенциалами вершин q_i, i Î I, определяемыми с точностью до аддитивной константы следующим образом:

(3) $q_i = -\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} d_{im}$, i Î I.

Матрицу D можно восстановить по потенциалам q_i, i Î I, однозначно:

(4) $d_{ij} = q_j - q_i$, i, j Î I.

Содержательно потенциалы действий можно интерпретировать как значения функции дохода АЭ, а элементы матрицы D - как их первые разности.

Если предпочтения АЭ заданы в виде МО, удовлетворяющего УВС, то информация обо всех элементах матрицы D является избыточной: например, если известна одна ее строка (или столбец), то в рамках УВС остальные элементы матрицы восстанавливаются суммированием по соответствующим цепочкам. Это свойство внутренне согласованных МО представляется достаточно привлекательным с точки зрения объема информации, которую необходимо получить на практике для идентификации параметров АС.

Наилучшим с точки зрения АЭ действием в рассматриваемой модели можно считать действие k, для которого d_{kj} £ 0 для всех j Î I. В случае внутренне согласованных предпочтений такое действие (быть может, не единственное) всегда существует - это действие, имеющее максимальный потенциал. Таким образом, множество реализуемых действий в данном случае есть $P(D)$ = {k Î I | d_{kj} £ 0, j Î I}.

Определим для произвольной пары действий i и j, i, j Î I, операцию $(j \to i)$ «уравнивания» их потенциалов: $q_j^{j\to i} \to q_j + (q_i - q_j)$. В терминах элементов матрицы D эта операция состоит из двух этапов: 1) $d_{jm}^{j\to i} \to d_{jm} + d_{ij}$, m Î I; 2) $d_{mj}^{j\to i} \to -d_{jm}$, m Î I. При этом, очевидно, действие j становится эквивалентным действию i ($d_{ij} = d_{ji} = 0$), причем внутренняя согласованность предпочтений АЭ сохраняется, а стоимость для центра проведения операции $(j \to i)$ равна $d_{ji} = q_i - q_j$ (ср. с (1)).

Идея решения задачи стимулирования заключается в следующем. Для того, чтобы побудить АЭ выбрать действие l Î I, центр должен выплачивать АЭ за выбор этого действия вознаграждение s_l, удовлетворяющее системе неравенств: s_l - s_i ³ d_{li}, i, l Î I. Компенсаторная система стимулирования

(5) $s_l = \max\limits_{j\in I} d_{lj} = \max\limits_{j\in I} (q_j - q_l) = q_k - q_l = d_{lk}$, l Î I,

удовлетворяет этой системе неравенств. Поэтому, если k - наиболее предпочтительное с точки зрения АЭ в отсутствие стимулирования действие, то минимальное значение стимулирования s_l для реализации действия l равно d_{lk}, l Î I. Еще раз отметим, что компенсаторная система стимулирования (5) делает <u>все</u> действия АЭ эквивалентными с его точки зрения.

Пусть предпочтения центра в отсутствие стимулирования заданы в виде МО - матрицы $G = ||g_{ij}||$, i, j Î I - удовлетворяющего УВС. Матрице G может быть поставлена в соответствие «функция» дохода центра $H_i = -\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} g_{im}$, i Î I. Если вознаграждение, выплачиваемое АЭ, вычитается из функции дохода центра (задача второго рода), то, реализуя действие l, центр «теряет» d_{lk}, l Î I. Следовательно, сравнительная предпочтительность с точки зрения центра пары действий (k, l) также изменяется. Численно новое значение в силу УВС равно сумме: $g_{kl} + d_{kl}$. Значит, предпочтения центра с учетом стимулирования представляются МО X, определяемым следующим образом: $X = D + G = ||g_{ij} + d_{ij}||$, i, j Î I.

Тот факт, что в отношение предпочтения центра X аддитивно входят как его собственные предпочтения в отсутствие стимулирования, так и предпочтения АЭ в отсутствие стимулирования, позволяет содержательно интерпретировать стимулирование как согласование их интересов.

Легко видеть, что, если предпочтения и центра, и АЭ в отсутствие стимулирования внутренне согласованны, то и МО X удовлетворяет УВС. Из этого следует справедливость следующего утверждения.

<u>Утверждение 1.</u> Множество оптимальных реализуемых действий АЭ есть (ср. с (2)):

$P(G, D)$ = {i Î I | d_{ij} £ g_{ji}, j Î I}.

Взаимосвязь между задачами стимулирования, сформулированными в терминах целевых функций и МО, устанавливается следующим утверждением.

<u>Утверждение 2.</u> Задачи стимулирования, сформулированные в терминах целевых функций и МО, удовлетворяющих УВС, эквивалентны.

Эквивалентность подразумевает сводимость одной задачи к другой и наоборот. Пусть задача стимулирования сформулирована в терминах целевых функций, т.е. известна функция q дохода АЭ. Матрицу D, считая значения функции дохода потенциалами, определим по выражению (4); выполнение УВС очевидно. Аналогично, если выполнено УВС, то по матрице D можно по выражению (3) восстановить потенциалы (функцию дохода), т.е. выполнить переход в обратную сторону. Итак, если выполнено УВС, то из (3)-(4) и утверждения 1 следует, что $P(G, D) = P(F, f)$.

Из утверждения 2 следует, что МО описывают более широкий класс предпочтений АЭ и центра, нежели целевые функции, так как последние эквивалентны внутренне согласованным МО.

Конечно, нет никаких гарантий, что полученное на практике (например в результате некоторой экспертной процедуры) МО, отражающее выявленные предпочтения управляемого субъекта, окажется внутренне согласованным. Поэтому в следующем разделе обсуждаются методы решения задач стимулирования, сформулированных в терминах МО, не удовлетворяющих УВС.

4. Отказ от внутренней согласованности: результаты и проблемы

Следует признать, что при определении рационального выбора участников АС практически во всех моделях теории активных систем используются «готовые» результаты из теории принятия решений, теории игр и т.д. [4,5]. Примером может служить определение рационального выбора АЭ, приведенное в предыдущем разделе. Действительно, если МО, отражающее предпочтения АЭ, удовлетворяет УВС, то всегда найдется такое допустимое действие, которое не будет доминироваться ни одним другим действием (в случае, когда предпочтения АЭ представлены «обычным» бинарным отношением, УВС «соответствует» полноте, антисимметричности и транзитивности, т.е. совокупности свойств бинарного отношения, которая допускает нестрогое упорядочение альтернатив).

Предположим теперь, что предпочтения АЭ, отражаемые полным МО, то есть некоторой матрицей D, не удовлетворяют УВС. Идеалом с точки зрения исследователя задачи стимулирования было бы позаимствовать из теории принятия решений определение рационального выбора АЭ и для этого случая, сконцентрировав свое внимание на решении собственно задачи стимулирования, т.е. на исследовании зависимости действия, выбираемого АЭ, от управляющих воздействий со стороны центра. Вся проблема заключается в том, что в теории принятия решений отсутствует определение рационального индивидуального выбора для общего случая МО. Существующие результаты, основывающиеся в основном на аксиоматическом подходе [1,2 и др.], могут и должны использоваться и развиваться в моделях управления, что представляется чрезвычайно перспективным направлением будущих исследований теоретико-игровых моделей организационного управления. Однако не следует забывать, что рассматривается конкретная задача, специфика которой должна учитываться в соответствующей системе аксиом, которым должен удовлетворять «рациональный» (с субъективной точки зрения исследователя операций и хотя бы с точки зрения содержательных интерпретаций изучаемой модели) выбор АЭ. Один из возможных подходов, заключающийся в поиске для заданного МО ближайшего к нему МО, удовлетворяющего УВС, реализуется ниже.

Отдельного обсуждения заслуживает вопрос о том, что понимать под близостью двух МО или МО и ранжировки и т.д., ведь, как отмечалось выше, мера близости должна учитывать специфику рассматриваемой задачи. Приведем два примера.

Первый пример – введенная в [2] система аксиом, в рамках которой единственной мерой близости МО является полусумма модулей разностей элементов матриц рассматриваемых отношений. Приведенные в упомянутой работе аксиомы вполне естественны, однако пятая аксиома, касающаяся различий на единственной паре альтернатив, не соответствует содержательным интерпретациям модели стимулирования.

Вторым примером является использование для определения меры близости строчных сумм и средних строчных значений матриц МО (см. подробное обсуждение свойств строчных сумм с точки зрения задач теории выбора в [9-11]). Пусть предпочтения АЭ заданы в виде полного МО $D = ||d_{ij}||$, i, j Î I. Обозначим через s_i, i Î I - средние значения строчных элементов, взятые с обратным знаком, т.е.:

(6) $s_i = -\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} d_{im}$, i Î I.

Проводя полную аналогию с рассмотренным в предыдущем разделе частным случаем внутренне согласованных предпочтений, можно рассматривать величины (6) как потенциалы вершин графа, соответствующего некоторому МО D^0, т.е. считать, что $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ – функция дохода АЭ, после чего применить известные методы решения задачи стимулирования, т.е. вычислить новые веса дуг:

(7) $d_{ij}^0 = s_j - s_i,\ i, j \in I,$

которые определяют МО D^0, удовлетворяющее УВС, и воспользоваться результатами утверждений 1 и 2. Преимущество этого подхода заключается в следующем. Рассмотрим задачу поиска внутренне согласованного МО $\tilde{\Delta} = ||\tilde{d}_{ij}||$, ближайшего к D в следующем смысле:

$$\sum_{i,j=1}^{n} (d_{ij} - \tilde{d}_{ij})^2 \to \min_{\{\tilde{d}_{ij}\}}.$$

Легко показать, что решение этой задачи: $\tilde{d}_{ij} = d_{ij}^0,\ i, j \in I$, где d_{ij}^0 определяется (6) – (7). Естественно, если D удовлетворяет УВС, то $\tilde{\Delta}$ совпадает с D. Более того, упорядочение по «потенциалам» (6) минимизирует ряд функционалов, использующихся в теории принятия решений при определении турнирных решений [9-12].

Недостаток построенного таким образом внутренне согласованного МО заключается в том, что оно оказывается «оторванным» от сути рассматриваемой задачи стимулирования. Если по аналогии с тем, как это делалось для целевых функций и МО, удовлетворяющих УВС, постулировать, что АЭ выбирает действие, имеющее максимальный потенциал, то выбор им действия k такого, что $s_k \geq s_i,\ i \in I$, не гарантирует, что не найдется другого действия $l \neq k$, которое доминирует его по МО D, т.е. действия, для которого выполнено $d_{kl} > 0$.

Завершив рассмотрение примеров построения мер близости между МО, перейдем к описанию методов решения задач стимулирования, сформулированных в терминах МО, не удовлетворяющих УВС. Рассмотрим две задачи: задача 1 – определение системы стимулирования, реализующей заданное действие АЭ с минимальными затратами центра на стимулирование; задача 2 – определение системы стимулирования, реализующей любое действие АЭ (отметим, что в случае представления предпочтений АЭ как в виде целевых функций, так и в виде внутренне согласованных МО компенсаторная система стимулирования (1), (5) принадлежит множествам решения обеих задач).

Первая задача решается элементарно – для каждого из действий АЭ $i \in I$ ищется система стимулирования $s^i = (s_1^i, s_2^i, \dots, s_n^i)$, его реализующая (в общем случае для различных действий эти системы стимулирования различны), т.е. удовлетворяющая условию: $\forall\ j \in I\ \ s_i^i - s_j^i \geq d_{ij}$, $i, j \in I$, например, $s_i^i = \max_{j \in I} d_{ij},\ s_j^i = 0,\ j \neq i$, а затем определяется оптимальное для центра реализуемое действие: $i^* = arg \max_{i \in I} \{H_i - \max_{j \in I} d_{ij}\}$. Эффективность стимулирования при этом равна:

(8) $K_1 = \max_{i \in I} \{H_i - \max_{j \in I} d_{ij}\}.$

Рассмотрим вторую задачу. Для того, чтобы система стимулирования реализовывала все действия АЭ (делала все действия АЭ эквивалентными с его точки зрения) необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла следующей системе неравенств:

(9) $s_i - s_j \geq d_{ij},\ i, j \in I.$

Систему стимулирования, удовлетворяющую (9), можно рассматривать как компенсаторную ($s_i = q_k^* - q_i^*,\ i \in I$) для системы потенциалов $\{q_i^*\}$, определяющих некоторое внутренне согласованное МО $D^* = ||d_{ij}^*||$, $d_{ij}^* = q_j^* - q_i^*,\ i, j \in I$. Из выражений (5) и (9) получаем, что для элементов матриц D и D^* должно выполняться следующее соотношение:

(10) $d_{ij}^* \geq d_{ij},\ i, j \in I.$

Другими словами, обеспечив реализуемость компенсаторной системой стимулирования всех действий при предпочтениях АЭ, отражаемых МО D^*, можно быть уверенным, что все действия будут реализованы той же системой стимулирования и при предпочтениях АЭ, отражаемых МО D.

Следовательно, проблема заключается в поиске условий существования и алгоритмов нахождения МО, удовлетворяющего (10) и максимизирующего целевую функцию центра в смысле (2). Из выражений (9) и (10) получаем, что потенциалы искомого внутренне согласованного МО D^* должны удовлетворять следующей системе неравенств:

(11) $q_j^* - q_i^*$ ³ d_{ij}, i, j Î I.

Из теории графов известно [7], что система неравенств (11) имеет решение тогда и только тогда, когда в графе, соответствующем МО D, отсутствуют контуры (петли не рассматриваются) положительной длины (последнее условие может интерпретироваться как ослабление УВС). Естественно, если D удовлетворяет УВС, то при использовании центром компенсаторной системы стимулирования (5) системы неравенств (9)-(11) обращаются в равенства.

Из выражения (1) следует, что минимальные затраты центра на стимулирование по реализации действия l Î I равны $q_k^* - q_l^*$, где k Î I – такое действие АЭ, что q_k^* ³ q_j^*, j Î I. Следовательно, задачу стимулирования для рассматриваемой модели можно сформулировать как задачу поиска набора потенциалов $\{q_i^*\}$, удовлетворяющего (11), и такого действия АЭ, которое доставляло бы максимум разности дохода центра и его затрат на стимулирование по реализации данного действия, т.е. эффективность стимулирования равна:

(12) $K_2 = arg \max\limits_{l \in I, \{q_i^*\}} \{H_l - q_k^* + q_l^*\}$.

<u>Утверждение 3.</u> а) Для того, чтобы задача (9), (11) – (12) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы в графе, соответствующем МО D, отсутствовали контуры положительной длины;

б) Решение задачи (9), (11) – (12) может быть получено в результате применения следующего алгоритма:

<u>*0*-ой шаг.</u> Полагаем $q_j^{*0} = 0$, j Î I.

<u>*k*-ый шаг.</u> Определяем $l_j = \max\limits_{i \in I} \{q_i^{*k-1} + d_{ij}\}$, $q_j^{*k} = \max\{l_j, q_j^{*k-1}\}$, j Î I.

Справедливость пункта а) утверждения 3 следует из свойств задачи о потенциалах [7]. Алгоритм, приведенный в пункте б) утверждения 3, являющийся частным случаем решения задачи о потенциалах [7], обладает следующими свойствами (которые являются следствиями из результатов, приведенных в [7]).

Покажем, что хотя бы один из установившихся потенциалов будет равен нулю. Предположим противное, т.е. пусть все потенциалы положительны. Берем произвольное действие j Î I, и определяем действие l Î I, для которого имеет место $q_j^* - q_l^* = d_{lj}$ (такое действие обязательно найдется). Подобное действие найдется и для действия l Î I. Продолжая таким образом, придем к противоречию в силу конечности множества допустимых действий.

Число шагов алгоритма не превышает n, так как потенциал q_j^*, как показано в [7], равен длине максимального пути в графе, соответствующем МО D^*, соединяющего одну из вершин с нулевым потенциалом с вершиной j. Поэтому на каждом шаге алгоритма хотя бы одна из вершин получит окончательный потенциал, который в дальнейшем меняться не будет. Значит после конечного числа шагов потенциалы установятся: $l_j = q_j^*$, j Î I.

Кроме того, все потенциалы q_i^*, i Î I, определяемые как решение задачи (11), минимальны [7], т.е. МО D^*, получающееся в результате решения задачи (11)-(12), является ближайшим в смысле затрат на стимулирование к МО D внутренне согласованным МО. Другими словами, минимальный набор потенциалов $\{q_i^*\}$, удовлетворяющий (11), определяет ранжировку действий АЭ, ближайшую в оговоренном смысле к МО D. Утверждение 3 доказано.

Итак, утверждение 3 дает условия существования и алгоритм поиска решения задачи стимулирования для предпочтений АЭ, выраженных МО. В частном случае - если предпочтения АЭ внутренне согласованны - утверждение 3 «превращается» в утверждение 2, при этом решение задачи (11) – (12) всегда существует и является компенсаторной системой стимулирования, определяемой утверждением 1.

В заключение оценим потери эффективности (уменьшение значения целевой функции центра), обусловленные «противоречивостью» предпочтений АЭ. В соответствии с приведенным в утверждении 3 алгоритмом и выражениями (8) и (12) получаем, что $K_1 \ {}^3\ K_2$, причем равенство имеет место для МО, удовлетворяющих УВС. Другими словами, в случае внутренне несогласованных МО стремление центра использовать систему стимулирования, реализующую одновременно все действия, приводит к снижению эффективности управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т. Выбор вариантов: основы теории. М.: Наука, 1990.
2. Литвак Б.Г. Экспертная информация: методы получения и анализа. М.: Радио и связь, 1982.
3. Кононенко А.Ф., Халезов А.Д., Чумаков В.В. Принятие решений в условиях неопределенности. М.: ВЦ РАН, 1991.
4. Новиков Д.А., Петраков С.Н. Курс теории активных систем. М.: СИНТЕГ, 1999.
5. Новиков Д.А. Стимулирование в социально-экономических системах (базовые математические модели). М.: ИПУ РАН, 1998.
6. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. М.: Наука, 1978.
7. Бурков В.Н., Горгидзе И.А., Ловецкий С.Е. Прикладные задачи теории графов. Тбилиси: Мецниереба, 1974.
8. Ларичев О.И. Выявление экспертных знаний. М.: Наука, 1989.
9. Чеботарев П.Ю. О некоторых оптимизационных методах агрегирования предпочтений / Проблемы компьютеризации и статистики в прикладных науках. Вып. 8. М.: ВНИИСИ, 1990. С. 67 – 72.
10. Chebotarev P. Yu., Shamis E. Constructing an objective function for aggregating incomplete preferences / Constructing scalar-valued objective functions. Tangian A., Gruber J. (eds.) Berlin: Springer, 1997. P. 100 – 124.
11. Чеботарев П.Ю. Метод строчных сумм и приводящие к нему модели / Проблемы компьютеризации и статистической обработки данных. Сб. трудов ВНИИСИ. Выпуск 3. М.: ВНИИСИ РАН, 1989. С. 94 – 110.
12. Laslier J. F. Tournament solutions and majority voting. Berlin: Springer, 1997.