Сборник трудов ИПУ РАН, Том.10. 2000. С. 76-85.

МЕХАНИЗМЫ КРИТЕРИАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ АКТИВНЫМИ СИСТЕМАМИ В ЗАДАЧАХ СТИМУЛИРОВАНИЯ

Бурков В.Н., Новиков Д.А.

1. Введение

Исследование математических моделей механизмов стимулирования в социально-экономических (активных) системах (АС) ведется в рамках таких разделов теории управления как: теория активных систем [1-3], теория иерархических игр [4], теория контрактов, теория реализуемости и др. На сегодняшний день достаточно полно исследованы так называемые базовые модели, то есть задачи стимулирования в простейших: двухуровневых одноэлементных (состоящих из управляющего органа - центра и одного управляемого объекта - активного элемента (АЭ)) статических активных системах. Как показывает анализ работ, посвященных изучению сложных (многоуровневых, многоэлементных, динамических и т.д.) АС, в большинстве этих случаев не удается найти простых аналитических решений [5].

Ниже исследуется ряд задач стимулирования в детерминированных многоэлементных активных системах. Основной акцент делается на анализ возможности и целесообразности использования унифицированных процедур стимулирования. Следует отметить, что задача синтеза унифицированной (одинаковой для всех элементов нижнего уровня) системы стимулирования принадлежит классу задач критериального управления [1] - оптимальные значения параметров управления ищутся в классе согласованных [2]. Основным результатом приводимого ниже рассмотрения можно считать установление взаимосвязи между задачами критериального управления и задачами стимулирования (для некоторых моделей доказывается их эквивалентность) и решение ряда новых задач стимулирования в многоэлементных активных системах.

2. Базовая детерминированная модель

В соответствии с классификацией, введенной в [5], базовой детерминированной моделью механизма стимулирования является следующая задача стимулирования (настоящий раздел содержит изложение ряда известных результатов [1-5], которые потребуются нам в дальнейшем).

Пусть активная система состоит из центра и одного активного элемента. Интересы участников выражены их целевыми функциями:

(1) $$\Phi_I(y) = H(y),$$

(2) $$f(y) = \sigma(y) - c(y),$$

где $y \in A$ - действие АЭ, $H(y)$ - функция дохода центра, $\sigma(y) \in M$ - функция стимулирования, $c(y)$ - функция затрат АЭ. Стратегией центра является назначение функции стимулирования из класса M с целью максимизации своей целевой функции $\Phi_I(y)$ при условии, что АЭ выберет при известной функции стимулирования действие из множества A, максимизирующее его собственную целевую функцию $f(y)$. Множество действий АЭ, доставляющих максимум его целевой функции при данной системе стимулирования называется множеством реализуемых действий (множеством решений игры):

(3) $$P(\sigma) = \mathrm{Arg}\max_{y\in A} \{ \sigma(y) - c(y) \}.$$

Эффективность стимулирования в рамках благожелательного отношения АЭ (гипотеза благожелательности (ГБ) заключается в предположении, что из множества действий, доставляющих максимум его целевой функции, АЭ выберет действие, наиболее предпочтительное для центра) к центру, которое мы будем считать имеющим место в дальнейшем, определяется как

(4) $$K(\sigma) = \max_{y\in P(\sigma)} \Phi(y).$$

Задача поиска допустимой (принадлежащей классу M) системы стимулирования, максимизирующей эффективность (4), называется задачей синтеза оптимальной функции стимулирования.

Если целевая функция центра имеет вид (1), то соответствующая задача стимулирования называется задачей первого рода [5]. Задачей второго рода называется аналогичная задача, отличающаяся лишь видом целевой функции центра - в ней из дохода вычитаются затраты на стимулирование:

(5) $$\Phi_{II}(y) = H(y) - \sigma(y).$$

В многоэлементных задачах затратами на стимулирование называется величина

(6) $$Q(y) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(y_i),$$

где i - номер АЭ, $i \in I = \{ 1, 2, ... n \}$, n - число АЭ в системе, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$.

Введем следующие предположения (если в многоэлементной системе индекс i опущен то по умолчанию будем считать, что предположение (уравнение, неравенство и т.д.) имеет место для всех АЭ):

А1. $A = \Re_1$;

А1'. $A = \Re_1^+$;

А2. c(y) - ограничена снизу;

А2'. А1', c(y) непрерывна и монотонно возрастает, c(0) = 0;

А2''. А2', c(y) выпукла и непрерывно дифференцируема, c'(0)=0;

А3. $\sigma \in M'$ - множество положительнозначных кусочно-непрерывных функций;

А3'. А3, $\sigma \in M = \{ \sigma \mid \forall y \in A \;\; 0 \le \sigma(y) \le C \}$;

А3''. А3, $\sigma \in \tilde{M} = \{ \sigma \mid \forall y \in A \;\; \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(y_i) \le R \}$.

Константа C называется ограничением механизма стимулирования[1].

Из детерминированной теории [1-3] известны следующие факты:

- в задаче стимулирования первого рода оптимальна система стимулирования C-типа (скачкообразная):

(7) $$\sigma_C(y) = \begin{cases} 0, & y < x \\ C, & y \ge x \end{cases},$$

где в рамках А2' $x \in P = [\, 0, y^+ \,]$, $y^+ = \max \{ y \in A \mid c(y) \le C \}$, а оптимальный план (желательное с точки зрения центра состояние АЭ [1]) определяется как решение следующей задачи:

(8) $$x^* = \arg \max_{x \in P} H(x);$$

- в задаче стимулирования второго рода оптимальна система стимулирования QK-типа (квазикомпенсаторная):

(9) $$\sigma_{QC}(y) = \begin{cases} 0, & y \ne x \\ c(y), & y = x \end{cases};$$

- решение задачи стимулирования второго рода состоит из двух этапов:

1) определение системы стимулирования, реализующей заданное действие с минимальными затратами - минимальные затраты на стимулирование по реализации действия $x \in A$ равны [1,7]:

(10) $$Q(x) = c(x) - c_{min},$$

где $c_{min} = \min_{y \in A} c(y)$ (действие АЭ, доставляющее минимум его функции затрат $y_i^{min} = \arg \min_{y_i \in A_i} c_i(y_i)$ называется LCA - Least Cost Action [5]). Если функция стимулирования ограничена (А3', А3''), то затраты на стимулирования по реализации действий, для которых правая часть (10) больше соответствующих ограничений, берутся равными бесконечности.

2) выбор оптимального действия (задача согласованного планирования):

(11) $$x^* = \arg \max_{y \in A} B(y),$$

где B(y) = H(y) - Q(y).

Содержательно, в задаче первого рода АЭ поощряется на фиксированную величину, если его действие не меньше заданного (плана), если же его действие строго меньше плана, то он не поощряется

[1] *Мы надеемся, что использование при дальнейшем изложении не совсем удачной, но исторически сложившейся, системы обозначений (c(y) - функция затрат, C - ограничение механизма и т.д.) не приведет к неоднозначности.*

вообще. В задачах второго рода элементу в точности компенсируются его затраты в случае выбора действия, совпадающего с планом.

3. Стимулирование в активных системах со слабо связанными элементами

Активной системой со слабо связанными элементами называется многоэлементная активная система, в которой результаты деятельности АЭ независимы, каждый из них стимулируется за свое собственное действие, но существуют общие ограничения на стимулирование - например, может быть ограничен суммарный фонд заработной платы (ФЗП) [3,5]. В этом случае в рамках А3'' задачу удается свести к набору одноэлементных задач стимулирования, результаты решения которых используются при решении задачи условной оптимизации - распределения фонда стимулирования между активными элементами.

Будем различать следующие случаи. Если в многоэлементной АС задача центра заключается в выборе набора систем стимулирования - каждой для соответствующего АЭ - то такую систему стимулирования назовем индивидуальной. Если же центр назначает одну функцию стимулирования для всех АЭ (действие каждого АЭ подставляется в эту общую для всех функцию), то систему стимулирования назовем унифицированной. При использовании унифицированной системы стимулирования суммарные затраты на стимулирование равны:

(12)
$$Q(y) = \sum_{i=1}^{n} \sigma\ (y_i)$$

Рассмотрим более подробно случай индивидуального стимулирования. Если выполнено А3'', то множество реализуемых действий, соответствующих данному бюджетному ограничению R, имеет вид:

(13)
$$\tilde{P}\ (\sigma) = \{\ y \in A \mid\ \sum_{i=1}^{n} Q_i(y_i) \le R\ \}.$$

Соответственно трем ограничениям (А3, А3' и А3'') на допустимые функции стимулирования (M, M' и $\tilde{M}$), на втором этапе решения задачи второго рода возникают три различных класса задач стимулирования:

(14)
$$K'(\sigma) = \max_{y\in A}\ \{\ H(y) - Q(y)\ \} \to \max_{\sigma\in M'},$$

(15)
$$K(\sigma) = \max_{y\in P}\ \{\ H(y) - Q(y)\ \} \to \max_{\sigma\in M},$$

(16)
$$\tilde{K}(\sigma) = \max_{y\in \tilde{P}}\ \{\ H(y) - Q(y)\ \} \to \max_{\sigma\in \tilde{M}},$$

где $Q_i(y)$ определяется (6), (10) и (12).

Задача (14) соответствует предположению А3 - максимизации разности между доходом центра и затратами на стимулирование на множестве всех неотрицательных кусочно-непрерывных функций, задача (15) - предположению А3' (ограниченность индивидуального стимулирования), задача (16) - предположению А3'' (ограниченность суммарного фонда стимулирования).

Очевидно, что $P \subseteq P'$, $\tilde{P} \subseteq P'$, следовательно $K \le K'$, $\tilde{K} \le K'$ (если сумма фиксированных индивидуальных ограничений $\{\ C_i\ \}$ равна бюджетному R, то за счет возможности перераспределения фондов стимулирования между элементами, получаем, что $\tilde{K} \ge K$). Таким образом, справедливо следующее утверждение.

<u>Утверждение 1.</u> Эффективность индивидуального стимулирования в задачах второго рода удовлетворяет соотношениям: $K \le K'$ и $\tilde{K} \le K'$. При одинаковых допустимых множествах эффективность стимулирования в задаче первого рода не ниже, чем в соответствующей задаче второго рода.

Справедливость последнего утверждения следует непосредственно из сравнения (1) и (5). Содержательно, если центр "платит" АЭ не "из своего кармана" (задача стимулирования первого рода), то при тех же возможностях по управлению (допустимых множествах и, следовательно, множествах реализуемых действий) значение его целевой функции выше, так как из его дохода не вычитаются затраты на стимулирование, как это имеет место в задаче второго рода. Подобные эффекты достаточно ярко проявлялись в плановой экономике бывшего СССР, когда сверху устанавливался фонд стимулирования, не связанный непосредственно ни с интересами управляющего органа, ни, зачастую, с эффективностью функционирования системы в целом. Поэтому условно задачи второго рода ближе к "хозрасчетным" и "рыночным" моделям. В том числе, представление (5) используется и в теории контрактов (см. [5]). При этом следует отметить, что и системы стимулирования, и реализуемые действия АЭ, оптимальные в задачах первого и второго рода, различны (ср. (8) и (11)).

Содержательные интерпретации соотношений $K \le K'$ и $\tilde{K} \le K'$ также достаточно прозрачны. Как следует из предшествующего изложения, данные неравенства обусловлены вложенностью соответствующих множеств реализуемых действий и множеств допустимых функций стимулирования:

(17) $$P \subseteq P',\ \tilde{P} \subseteq P',\ M \subseteq M',\ \tilde{M} \subseteq M'$$

и видом задач (14)-(16). Поэтому, если на стимулирование не наложено практически никаких ограничений - "выгодно платить много - плати!", то эффективность стимулирования максимальна (из трех возможных вариантов). Если наложены ограничения на суммарные по всем АЭ затраты на стимулирование, то возможности по управлению меньше и, соответственно, ниже его эффективность. Минимальная эффективность стимулирования соответствует максимальным ограничениям на возможные управления, когда фиксировано и ограничено максимальное поощрение каждого из активных элементов.

4. Унифицированные системы стимулирования

Как отмечалось выше, унифицированными называются системы стимулирования, одинаковые для всех активных элементов, входящих в рассматриваемую активную систему. Целевая функция центра при этом имеет вид: $\Phi(y) = H(y) - \sum_{i=1}^{n} \sigma(y_i)$, а целевая функция i-го АЭ: $f_i(y_i) = \sigma(y_i) - c_i(y_i)$. Пусть требуется использовать унифицированную систему стимулирования из заданного класса (задача критериального управления), например: с одним скачком (один план для всех АЭ), пропорциональную систему стимулирования (L-типа [5]) с единой ставкой оплаты и т.д. Прежде чем переходить к исследованию общего случая задачи стимулирования второго рода, рассмотрим кратко задачу синтеза унифицированной системы стимулирования первого рода, в которой центр назначает общий для всех АЭ план и использует унифицированную систему стимулирования С-типа.

Если целевая функция центра монотонна по действиям всех активных элементов и нет ограничений на стимулирование ($\sigma \in M'$), то, очевидно, следует назначать максимальный допустимый план. Следует отметить следующий качественный эффект. Использование унифицированной системы стимулирования фактически сводит непрерывную задачу к дискретной - характерными точками являются правые границы множеств реализуемых действий АЭ $\{ y_i^+ \}$- назначать планы, отличные от одной из этих точек не имеет смысла и, более того, не эффективно.

Поясним последнее утверждение. Если при индивидуальном стимулировании в АС со слабо связанными элементами увеличение ФЗП вело к (непрерывному) изменению эффективности стимулирования, то в АС с унифицированными системами стимулирования дело обстоит иначе. В силу отмеченной выше "дискретности" соответствующей задачи стимулирования, увеличение (в определенных пределах) ФЗП может не изменять оптимального плана и, следовательно, снижать эффективность управления. Другими словами, существует минимальная величина (пороговое значение) увеличения суммарного ФЗП, на которое система реагирует. Аналогичный эффект имеет место и в задаче второго рода, к описанию которой мы переходим.

Пусть выполнено предположение А2' и центр должен назначить унифицированную систему стимулирования QK-типа с одним "скачком":

(18) $$\sigma(x,y_i) = \begin{cases} u, & y_i = x \\ 0, & y_i \neq x \end{cases},\ i \in I,$$

где u - некоторая неотрицательная величина, x - общий для всех АЭ план.

Обозначим P(x,u) - множество тех АЭ, у которых затраты в точке x не превышают u, то есть

(19) $$P(x,u) = \{ i \in I \mid c_i(x) \le u \}.$$

Тогда действия, реализуемые системой стимулирования (18), удовлетворяют:

(20)
$$y_i^*(x,u) = \begin{cases} x, & i \in P(x,u) \\ y_i^{min}, & i \notin P(x,u) \end{cases}, \ i \in I.$$

Суммарные затраты на стимулирование при использовании центром системы стимулирования (18) в силу (20) равны $Q(x,u) = u\,|P(x,u)|$, где $|P|$ - число элементов множества P. Очевидно, $|P(x,u)|$ не убывает по u и не возрастает по x. Более того, зависимость $y_i^*(x,u)$ не является непрерывной. Поэтому для каждого $x \in A$ существует конечное число минимальных затрат на стимулирование, при которых изменяется число АЭ, выполняющих план x: $\{c_1(x), c_2(x), ..., c_n(x)\}$.

В общем случае задача стимулирования является достаточно сложной с вычислительной точки зрения, но вполне решаемой численно, оптимизационной задачей поиска пары (x,u), удовлетворяющей заданным ограничениям. Простое аналитическое ее решение можно найти для ряда рассматриваемых ниже частных случаев.

Предположим, что целевая функция центра аддитивна по АЭ, то есть $H(y) = \sum_{i=1}^{n} H_i(y_i)$, а активные элементы, независимо от их действий, могут быть упорядочены по затратам: $\forall\ y \in A\ c_1(y) \le c_2(y) \le ... \le c_n(y)$. Алгоритм решения данной задачи, по аналогии с двушаговым методом решения одноэлементной базовой задачи стимулирования второго рода (см. выше, а также метод Гроссмана-Харта в [3,5]) состоит из трех этапов.

На первом этапе для каждого $k = \overline{0,n}$ определяются (условимся, что, если верхний индекс суммирования меньше нижнего, то вся сумма равна нулю) следующие зависимости:

(21)
$$\Phi_k(x) = \sum_{i=1}^{k} H_i(x) + \sum_{i=k+1}^{n} H_i(y_i^{min}) - k\, c_k(x),\ x \in X.$$

Содержательно, k - число АЭ, выполняющих план. В силу предположения упорядоченности АЭ по затратам, если k-му АЭ выполнять план выгодно, то это выгодно и всем АЭ, имеющим меньшие номера в упорядочении затрат. Таким образом, имеем n+1 возможную комбинацию (начиная с того, что ни один из АЭ не выполняет план, и заканчивая тем, что все они его выполняют). Качественно, введение предположения об упорядоченности АЭ по затратам уменьшает число возможных комбинаций - в общем случае при фиксированном плане число этих комбинаций порядка 2^n. Более того, если упорядочение АЭ по затратам зависит от их действий, то число возможных комбинаций еще более возрастет.

На втором этапе для каждого $k = \overline{0,n}$ определяется максимум (21) по множеству допустимых планов, то есть план, который следует назначить, если известно, что выполнять его будет заданное число АЭ:

(22)
$$\Phi_k^* = \max_{x \in A} \Phi_k(x).$$

На третьем шаге определяется набор АЭ (их число в случае упорядоченности затрат), выполнение плана которыми доставляет максимум целевой функции центра:

(23)
$$k^* = \arg \max_{k=\overline{0,n}} \Phi_k^*.$$

Эффективность стимулирования при этом равна $K^* = \Phi_{k^*}^*$.

Таким образом, в результате применения описанного алгоритма определяется число АЭ, которые выгодно стимулировать в смысле побуждения к выполнению плана (это первые k^* АЭ в их упорядочении по затратам) и оптимальный план $x^* = \arg \max_{x \in A} \Phi_{k^*}(x)$. Отметим, что рассмотренный алгоритм соответствует отсутствию ограничений на унифицированную функцию стимулирования. Если присутствуют ограничения сверху на индивидуальные поощрения АЭ или на суммарный фонд стимулирования, то на втором и третьем этапах максимумы должны вычисляться по таким планам и комбинациям АЭ, которые удовлетворяют имеющимся ограничениям.

Сравнение эффективности данного унифицированного механизма с эффективностью соответствующего механизма индивидуального стимулирования позволяет прийти к выводу, что "ценой унификации" является следующая разность:

(24)
$$\Delta K = \sum_{i=1}^{n} \max_{y_i \in A_i} \{ H_i(y_i) - Q_i(y_i) \} -$$
$$- \max_{k=\overline{0,n}} \max_{x \in A} \{ \sum_{i=1}^{k} H_i(x) + \sum_{i=k+1}^{n} H_i(y_i^{min}) - k\, c_k(x) \}.$$

Если присутствуют дополнительные ограничения на стимулирование, то максимумы в (24) должны вычисляться по соответствующим множествам. В качестве иллюстрации рассмотрим следующий пример.

Пример. Пусть $c_i(y_i) = \beta_i y_i^2$, $\beta_1 \le \beta_2 \le \beta_3$, $y_i \ge 0$, $H_i(y_i) = \alpha_i y_i$, $i = \overline{1,n}$, Тогда $\forall\ x \in X$:

$\Phi_0(x) = 0$; $\Phi_1(x) = \alpha_1 x - \beta_1 x^2$; $\Phi_2(x) = (\alpha_1+\alpha_2)x - 2\beta_2 x^2$; $\Phi_3(x) = (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)x - 3\beta_3 x^2$;

$x_1^* = \alpha_1/2\beta_1$; $x_2^* = (\alpha_1+\alpha_2)/4\beta_2$; $x_3^* = (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)/6\beta_3$;

$\Phi_1^* = \alpha_1^2/4\beta_1$; $\Phi_2^* = (\alpha_1+\alpha_2)^2/8\beta_2$; $\Phi_3^* = (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2/12\beta_3$.

При использовании индивидуальной системы стимулирования $y_i^* = \alpha_i/2\beta_i$, $i \in I$. Следовательно, эффективность индивидуального стимулирования равна $K_0^* = \sum_{i=1}^{3} \frac{\alpha_i^2}{4\beta_i}$.

Выбрав конкретные числовые значения $\beta_1=1$, $\beta_2=2$, $\beta_3=3$, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1$, получаем, что независимо от числа АЭ, выполняющих план, эффективность унифицированного стимулирования равна $K^* = 1/4$. Эффективность же индивидуального стимулирования - $K_0^* = 11/24 > 1/4$. Относительные потери составляют $\delta K = \frac{K_0^* - K^*}{K_0^*} = 5/11$, то есть порядка 45%. В рассматриваемом примере унификация "обходится" примерно в половину эффекта!

5. Механизмы стимулирования как механизмы критериального управления

До сих пор мы выделяли в решении задачи стимулирования два этапа - этап определения множества реализуемых действий (условия согласования) и этап оптимального согласованного планирования - поиска среди реализуемых действий наиболее выгодных для центра. Наличие условий согласованности стимулирования в рамках рассматриваемых моделей позволяет говорить о том, что задачи стимулирования могут рассматриваться как подкласс задач критериального управления [1]. Тем не менее, соответствие между этими задачами было неявным и скорее интуитивным. Поэтому для полноты картины попытаемся реализовать в явном виде идею критериального управления при решении задач стимулирования, установив тем самым между ними формальную взаимосвязь.

Рассмотрим случай, когда центр выбирает систему стимулирования $\sigma \in G$ из заданного класса G с тем, чтобы согласовать (в максимально широком диапазоне действий АЭ или результатов их деятельности) интересы управляемых объектов со своими интересами.

Пусть имеется задача стимулирования первого рода. Введем класс функций:

(25) $$\Xi\,(H(y), A) = \{ f(y) \mid \forall\, y_1, y_2 \in A \quad f(y_1) \ge f(y_2) \leftrightarrow H(y_1) \ge H(y_2) \}.$$

Содержательно, функция дохода центра H(y) порождает на множестве A множество $\Xi(H(y),A)$ целевых функций активного элемента $f: A \to \Re^1$, согласованных (в смысле возрастания, убывания, точек экстремума и т.д.) с предпочтениями центра. Понятно, что, если $f \in \Xi\,(H(y), A)$, то интересы участников АС полностью согласованы и АЭ всегда выберет в рамках ГБ допустимое действие, наиболее благоприятное для центра.

Вспомним, что целевая функция АЭ является разностью между стимулированием и затратами, то есть, изменяя функцию стимулирования, центр изменяет целевую функцию АЭ. Обозначим множество всевозможных (при фиксированной функции затрат и $\sigma \in G$) целевых функций АЭ

(26) $$\Sigma_G(c(y),A) = \{ f(y) \mid \forall\, y \in A \ \ f(y) = \sigma(y) - c(y),\ \ \sigma \in G\}.$$

Полное согласование интересов возможно, если

(27) $$\Xi\,(H(y), A) \cap \Sigma_G(c(y),A) \neq \varnothing.$$

Очевидно, если G - класс всех функций $\sigma: A \to \Re^1$, то (27) всегда имеет место. Как известно из детерминированной теории [1-3] невозможность полного согласования в общем случае обусловлена ограничениями на допустимые функции стимулирования. Так, если G = M, где M определяется А3', то при C < +∞ (27) не имеет места. Дело в том, что в (25) требуется согласованность на всем множестве допустимых действий АЭ. Введем определение частичной согласованности, то есть согласованности на некотором множестве $P \subseteq A$:

(28) $$\Xi(H(y), P(G)) = \{ f(y) \mid \forall\, y_1, y_2 \in P(G)\;\; f(y_1) \ge f(y_2) \leftrightarrow H(y_1) \ge H(y_2) \}.$$

Будем говорить, что интересы центра и АЭ согласованы на множестве P, если:

(29) $$\Xi\,(\,H(y), P(G)\,) \;\cap\; \Sigma_G(c(y),A) \ne \varnothing.$$

Итак, задача критериального управления может формулироваться как задача проверки существования элемента множества G, обеспечивающего полное или частичное (на максимально широком множестве) согласование интересов центра и АЭ.

Несколько забегая вперед, отметим, что множество $P \subseteq A$ есть ни что иное, как множество реализуемых действий, зависящее от ограничений механизма и параметров АС.

Если в задаче стимулирования первого рода G = M', то, положив

(30) $$\sigma_\delta(y) = \delta\, H(y) + c(y),$$

где $\delta > 0$ - произвольное (в том числе, например, достаточно малое) число, получаем, что $f(y) = \delta\, H(y)$, что обеспечивает выполнение (25). Более того, в рамках гипотезы благожелательности δ может быть выбрано тождественно равным нулю.

Если в задаче стимулирования первого рода G = M, то использование компенсаторной системы стимулирования:

(31) $$\sigma_K(y) = \begin{cases} \sigma_\delta(y), & y \le y^+(\delta) \\ 0, & y > y^+(\delta) \end{cases},$$

где $\sigma_\delta(y)$ удовлетворяет (30), а $y^+(\delta) = \max \{ y \in A \mid c(y) - c_{min} + \delta H(y) \le C \}$, обеспечивает ε-оптимальность управления, где

$$\varepsilon = \varepsilon(\delta) = H(y^+) - H(y^+(\delta)).$$

Если выполнена гипотеза благожелательности, то следует положить $\delta = \varepsilon = 0$.

Следует отметить, что в рамках рассматриваемой модели оптимальные системы стимулирования первого рода (30)-(31) в одноэлементной модели, полученные как решения задачи критериального управления (сформулированной в терминах согласования интересов в смысле (27), (29)), совпали с оптимальными решениями соответствующей задачи стимулирования (см. выше, а также [2,5]).

Перейдем к рассмотрению задачи стимулирования второго рода, сформулированной как задача критериального управления.

Если целевая функция центра представляет собой разность между доходом и затратами на стимулирование, то частичное согласование интересов будет означать выполнение (в отличие от (29) для задачи первого рода):

(32) $$\Xi\,(\,\Phi(y, \sigma(y)), P\,) \;\cap\; \Sigma_G(c(y),A) \ne \varnothing,$$

причем, что существенно, левая часть содержит функцию стимулирования.

При отсутствии ограничений на допустимые функции стимулирования P=A. Предположим, что мы хотим выбрать такую систему стимулирования, которая приводила бы к тому, что

(33) $$f(y) = \delta\, \Phi(y),$$

что автоматически обеспечивало бы выполнение (32). Получаем:

(34) $$\sigma_\delta(y) = \frac{1}{1+\delta}\;[\,\delta H(y) + c(y)\,],$$

(35) $$f(y) \;=\; \frac{\delta}{1+\delta}\;[\,H(y) - c(y)\,],$$

(36) $$\Phi(y) = \frac{1}{1+\delta}\;[\,H(y) - c(y)].$$

Оптимальная для центра величина δ равна нулю. В рамках гипотезы благожелательности δ действительно может быть выбрано равным нулю. При отказе от ГБ (использовании центром максимального гарантированного результата по множеству реализуемых действий АЭ) получаем, что (34) ε-оптимальна [2,4].

Значит, в классе M' следует использовать систему стимулирования (30), (34), а в классе M - (31), выбирая $y^+(\delta)$, максимизирующее (36), то есть все приведенные выше для задач первого рода рассуждения остаются в силе.

При рассмотрении задач критериального управления мы выбирали достаточно конкретный вид зависимостей (30) и (33), обеспечивающих согласование интересов. Однако, так как полученные при их использовании решения совпали с оптимальными решениями соответствующих задач стимулирования, можно сделать вывод, что полученные оценки эффективности неулучшаемы. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Утверждение 2. В детерминированной активной системе для любой задачи стимулирования (первого и второго рода) может быть сформулирована эквивалентная задача критериального управления и наоборот.

В заключение настоящего подраздела отметим, что выше рассмотрены прямые задачи стимулирования и, соответственно, прямые задачи критериального управления, заключающиеся в поиске управления, обладающего максимальной эффективностью при заданных ограничениях. Обратные задачи заключаются в поиске ограничений на множества допустимых управлений, обеспечивающих заданные свойства решений, например - эффективность не ниже заданной, реализуемость некоторого фиксированного действия и т.д. Полученный выше результат о связи прямых задач критериального управления и прямых задач стимулирования с одной стороны, и результаты решения обратных задач стимулирования, известные на сегодняшний день [5], с другой стороны, позволяют утверждать, что и соответствующие обратные задачи эквивалентны. Действительно, задача поиска минимальных ограничений механизма стимулирования может быть сведена к задаче поиска множества G, для которого условия частичного согласования (29) выполнены для множества P, содержащего заданное действие.

6. Заключение

Итак, в настоящей работе установлена взаимосвязь механизмов стимулирования и механизмов критериального управления детерминированными активными системами, а также предложен ряд методов решения задач синтеза оптимальных унифицированных задач стимулирования первого и второго рода. Отметим, что выше рассматривались лишь детерминированные модели. Изучение механизмов стимулирования и критериального управления (унифицированных, с сильно связанными АЭ и т.д.) в АС с неопределенностью представляет широкую и перспективную область будущих исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977. - 255 с.
2. Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981. - 383 с.
3. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Введение в теорию активных систем. М.: ИПУ РАН, 1996. - 125 с.
4. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976. - 327 с.
5. Новиков Д.А. Стимулирование в социально-экономических системах (базовые математические модели). М.: ИПУ РАН, 1998. - 216 с.