РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

СБОРНИК ТРУДОВ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ

Выпуск 3

Общая редакция – Д.А. Новиков

Москва – 2003

УДК 007
ББК 32.81
У 67

У 67 **Управление большими системами /** Сборник трудов молодых ученых. Выпуск 3. Общая редакция – Д.А. Новиков. М.: ИПУ РАН, 2003. – 112 с.

ISBN 5-201-14949-9

В сборнике представлены статьи молодых ученых, специализирующихся в области разработки и внедрения механизмов управления организационными системами.

Утверждено к печати Редакционным советом Института

Текст воспроизводится в виде, утвержденном Редакционным советом Института

ISBN 5-201-14949-9

СОДЕРЖАНИЕ

Акимов В.А., Балашов В.Г., Заложнев А.Ю.
Метод нечеткого критического пути……………………………..5

Глизнуцин В.Е.
Математические возможности
практического менеджмента……………………………………..11

Гришанов Д.Г., Павлов О.В., Сидоров В.В.
Стимулирование коллективов бригад
в условиях поточно-массового производства…..………………..20

Губко М.В.
Оптимальные иерархические структуры
при монотонном функционале стоимости………………………27

Заложнев А.Ю.
Модели принятия решений об объемах закупок
фирмой – оптовым покупателем в зависимости
от изменения отпускных цен производителя
и спроса конечных покупателей…………………………………...35

Заложнев А.Ю.
Задача определения оптимального количества сотрудников
сервисного центра…………………………………………………43

Коргин Н.А.
Общий метод построения механизмов открытого
управления для обменных схем……….………………………..48

Мишин С.П.
Динамическая задача синтеза оптимальной
иерархической структуры………………………………………55

Нижегородцев Р.М.
Моделирование государственной стратегии пенсионного обеспечения……………………………………………..76

Павлов О.В.
Механизм стимулирования поставщиков за качество работы увеличением объёма заказа………………………………82

Тарасюк Е.С., Вязгин В.А.
Исследование эффективности управления производственным бизнес-процессом в различных организационных структурах…………….………..87

Уандыков Б.К.
Базовые механизмы реализации программ в области безопасности…………………………………….…91

Чхартишвили А.Г.
Информационное равновесие………….………………………………94

Щепкин Д.А.
Определение параметров экономических механизмов снижения уровня риска………………………………………..110

МЕТОД НЕЧЕТКОГО КРИТИЧЕСКОГО ПУТИ

Акимов В.А., Балашов В.Г., Заложнев А.Ю.
(*Институт проблем управления РАН, Москва*)
zal@ipu.rssi.ru

Рассмотрим проект, состоящий из набора операций (работ). Технологическая зависимость между операциями задается в виде сети (сетевого графика), то есть ориентированного графа (V, E), $|V| = m$, без контуров, в котором выделены два множества вершин – входы сети и выходы сети. При этом дуги сети соответствуют операциям, а вершины – событиям (моментам окончания одной или нескольких операций). В четком случае для каждой операции $(i; j)$ задана ее продолжительность t_{ij}. Методы описания и исследования сетевых графиков изучаются в теории календарно-сетевого планирования и управления (КСПУ) [2-5].

Опишем классический (четкий) метод критического пути (critical path method – CPM). Легко видеть, что продолжительность проекта определяется путем максимальной длины, называемым критическим путем. Операции, принадлежащие критическому пути, называются критическими. Остальные (некритические) операции имеют резерв времени, характеризуемый максимальной задержкой операции, при которой продолжительность проекта не изменяется. Критические операции имеют нулевой резерв. Приведем соответствующие формулы.

Для сети всегда существует правильная нумерация (такая, при которой из вершины с большим номером не идет дуг в вершины с меньшими номерами). Поэтому будем считать, что события занумерованы таким образом, что нумерация является правильной.

Предположим, что выполнение комплекса операций (проекта) начинается в нулевой момент времени. Обозначим Q_0 – множество событий, не требующих выполнения ни одной из операций, то есть входы сети; Q_i – множество событий, непосредственно предшествующих событию i, то есть множество вершин j сети, для которых существует дуга $(j; i)$.

Положим

(1) $t_i^- = 0,\ i\ \hat{I}\ Q_0;\ t_i^- = \max\limits_{j \in Q_i} (t_j^- + t_{ji}),\ i\ \hat{I}\ V \setminus Q_0.$

Величина t_i^- называется ранним моментом (временем) свершения i-го события и характеризует время, раньше которого это событие произойти не может.

Длина критического пути

(2) $T = \max\limits_{i \in V} t_i^-$

определяется ранним временем свершения конечного события, то есть события, заключающегося в завершении всех операций.

Поздним моментом t_i^+ свершения события называется максимальное время его наступления, не изменяющее продолжительности проекта. Обозначим R_i – множество событий, непосредственно следующих за событием i, то есть множество вершин j сети, для которых существует дуга (i; j). Вычислим для каждой вершины-события i длину l_i максимального пути от этой вершины до выхода сети – события, заключающегося в завершении всего комплекса операций (для выходов сети считаем соответствующие величины равными нулю):

(3) $l_i = \max\limits_{j \in R_i} (l_j + t_{ij})$, i Î V.

Положим $t_i^+ = T - l_i$, i Î V.

Полным резервом Dt_i события i называется разность между его поздним и ранним моментами свершения, то есть

(4) $Dt_i = t_i^+ - t_i^-$, i Î V.

Итак, мы описали простейший (базовый вариант) метода критического пути, соответствующий случаю, когда имеется полная и точная информация о продолжительностях операций. Однако, во многих реальных ситуациях такая информация отсутствует, то есть имеет место неопределенность. В зависимости от имеющейся информации различают интервальную (известен диапазон значений продолжительностей операций), вероятностную (известно распределение вероятностей продолжительностей операций) и нечеткую (имеется нечеткая информация относительно продолжительностей операций) неопределенность.

При вероятностной неопределенности [5] в общем случае невозможно (исключение составляют операции, выполняемые последовательно или параллельно) получение аналитических выражений для распределений вероятностей и других характеристик событий проекта, поэтому для исследования свойств критического пути применяют методы имитационного моделирования – Монте-Карло и другие, реализованные в современных программных комплексах управления проектами. Мы остановимся на анализе интервальной и нечеткой неопределенности, то есть случаев информированности, при которых возможно получение аналитических выражений для параметров событий, что, несомненно, чрезвычайно привлекательно с точки зрения задач принятия управленческих решений.

Сначала обобщим рассмотренную модель на случай интервальной неопределенности относительно продолжительности операций, а именно, будем считать, что $t_{ij} \in [t_{ij}^{-}, t_{ij}^{+}]$, $i, j \in V$.

Тогда ранние моменты t_i^{-} свершения событий принадлежат отрезкам $\Delta_i^{-} = [t_i^{--}, t_i^{-+}]$, где

(5) $t_i^{--} = t_i^{-+} = 0, i \in Q_0$; $t_i^{--} = \max\limits_{j \in Q_i} (t_j^{--} + t_{ji}^{-})$,

$$t_i^{-+} = \max_{j \in Q_i} (t_j^{-+} + t_{ji}^{+}), i \in V \setminus Q_0.$$

Длина критического пути принадлежит отрезку $D = [T^{-}; T^{+}]$, где

(6) $T^{-} = \max\limits_{i \in V} t_i^{--}$, $T^{+} = \max\limits_{i \in V} t_i^{-+}$.

По аналогии с (3), вычислим для каждой вершины-события i оценки $[l_i^{-}; l_i^{+}]$ длины максимального пути от этой вершины до выхода сети – события, заключающегося в завершении всего комплекса операций (для выходов сети считаем соответствующие величины равными нулю):

(7) $l_i^{-} = \max\limits_{j \in R_i} (l_j^{-} + t_{ij}^{-})$, $l_i^{+} = \max\limits_{j \in R_i} (l_j^{+} + t_{ij}^{+})$, $i \in V$.

Положим $t_i^{+-} = T^{-} - l_i^{-}$, $t_i^{++} = T^{+} - l_i^{+}$, $i \in V$.

Получаем следующую оценку границ отрезков, которым принадлежат полные резервы событий:

(8) $D t_i^{-} = t_i^{+-} - t_i^{--}$, $D t_i^{+} = t_i^{++} - t_i^{+-}$, $i \in V$.

В интервальной модели, в отличие от «классической», нельзя однозначно сказать является ли событие критическим. Все операции могут быть разделены на три класса.

В первый класс попадают события, для которых имеет место полная определенность, то есть, события, для которых обе границы (8) равны между собой и равны нулю. Эти операции можно с полным основанием назвать критическими.

Во второй (промежуточный по степени «критичности») класс попадают события, для которых нижняя граница отрезка полных резервов равна нулю, а правая строго положительна. Такие события могут в рамках существующей неопределенности оказаться критическими. Условно назовем их полукритическими.

И, наконец, третий класс составляют события, для которых нижняя граница отрезка полных резервов строго положительна. Такие события можно с полной определенностью отнести к некритическим.

<u>Пример 1.</u> Пусть имеется сеть, приведенная на рисунке 1 с интервалами продолжительностей операций, приведенными в таблице 1. В таблице 2 приведены параметры событий, рассчитанные соответствии с формулами (5)-(8).

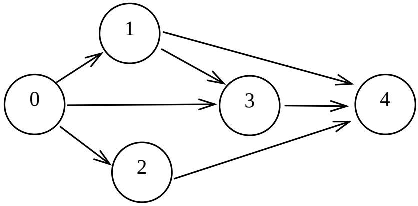

Рис. 1. Сеть в примере 1

Табл. 1. Параметры операций в примере 1

Операции	Минимальная продолжительность	Максимальная продолжительность
0-1	1	3
0-2	4	7
0-3	1	3
1-3	1	3
1-4	5	6
2-4	2	4
3-4	4	6

Табл. 2. Параметры событий в примере 1

Событие	t^{--}	t^{-+}	l^{-}	l^{+}	t^{+-}	t^{++}	Dt^{-}	Dt^{+}
0	0	0	6	12	0	0	0	0
1	1	3	5	9	1	3	0	0
2	4	7	2	4	4	8	0	1
3	2	6	4	6	2	6	0	0
4	6	12	0	0	6	12	0	0

Видно, что при использовании нижних границ интервалов продолжительностей операций критическими являются все события и длина критического пути $T^{-} = 6$, а при использовании верхних границ – критическим является путь 0-1-3-4 длины $T^{+} = 12$. Следовательно, в условиях существующей неопределенности события 0, 1, 3 и 4 являются критическими, а событие 2 – полукритическим. •

Отметим, что в предельном случае интервальной неопределенности, то есть при полной информированности, когда отрезки $[t_{ij}^{-}, t_{ij}^{+}]$ – суть точки, i, j Î V, выражения (5)-(8) переходят в соответствующие выражения (1)-(4).

Обобщим теперь рассмотренную модель интервальной неопределенности на нечеткий случай, при котором относительно продолжительностей операций имеется нечеткая информация $m_{\tilde{t}_{ij}}(t_{ij})$, где $m_{\tilde{t}_{ij}}(\cdot): \Re_{+}^{1}$ ® $[0; 1]$ – функция принадлежности нечеткой продолжительности операции (i, j), i, j Î V.

Нечеткая информация относительно продолжительности операций может быть получена от экспертов в ситуации, когда проект и каждая операция являются уникальными (например, научные, организационные и др. проекты) и отсутствуют как нормативы, так и статистические данные.

В соответствии с принципом обобщения [1, 6] функция принадлежности нечеткого раннего времени свершения i-го события, i Î V, имеет вид (ранние времена свершения событий – входов сети являются четкими равны нулю):

(9) $$m_{\tilde{t}_i^-}(x) = \max_{\{(x_{ji}),\ j \in Q_i, x_j \mid \max\limits_{j \in Q_i}(x_j + x_{ji}) = x\}} \min [\min_{j \in Q_i}(m_{\tilde{t}_{ji}}(x_{ji})); m_{\tilde{t}_j^-}(x_j)].$$

Функция принадлежности нечеткого времени завершения проекта (нечеткой длины критического пути) есть

(10) $$m_{\tilde{T}}(T) = \max_{\{(x_i),\ i \in V \mid \min\limits_{j \in V}(x_j) = T\}} \min_{j \in V}(m_{\tilde{t}_j^-}(x_j)).$$

Нечеткие длины максимального пути от вершины i Î V до выхода сети (соответствующие длины для событий – выходов сети – являются четкими и равны нулю) имеют функцию принадлежности

(11) $$m_{\tilde{l}_i}(x) = \max_{\{(x_{ij}),\ j \in R_i, x_j \mid \max\limits_{j \in R_i}(x_j + x_{ii}) = x\}} \min [\min_{j \in R_i}(m_{\tilde{t}_{ij}}(x_{ij})); m_{\tilde{l}_j}(x_j)].$$

Функции принадлежности нечетких поздних времен свершения событий имеют вид:

(12) $$m_{\tilde{t}_i^+}(x) = \max_{\{(T,\ x_i) \mid T - x_i = x\}} \min [m_{\tilde{T}}(T);\ m_{\tilde{l}_i}(x_i)],\ i \text{ Î } V.$$

Функции принадлежности нечетких полных резервов событий имеют вид:

(13) $\mu_{\Delta\tilde{t}_i}(x) = \max\limits_{\{(y_i,\, x_i) \mid y_i - x_i = x\}} \min [\, \mu_{\tilde{t}_i^+}(y_i)\,;\ \mu_{\tilde{t}_i^-}(x_i)\,],\ i \in V.$

Величину $\mu_i = \mu_{\Delta\tilde{t}_i}(0) \in [0; 1]$ можно интерпретировать как степень принадлежности *i*-го события критическому пути, $i \in V$.

Информация о степенях принадлежности событий критическому пути может служить для руководителей проекта [7] индикатором, отражающим требование первоочередного внимания к событиям, у которых эти степени равны единице или близки к ней.

Отметим, что в частном случае нечеткой неопределенности – при интервальной неопределенности (то есть когда $\mu_{\tilde{t}_{ij}}(t_{ij}) = 1$ и Supp $\mu_{\tilde{t}_{ij}}(t_{ij}) = [\, t_{ij}^-,\ t_{ij}^+ \,]$, $(i, j) \in E$) выражения (9)-(13) переходят в соответствующие выражения (5)-(8).

ЛИТЕРАТУРА

1 БЕЛЛМАН Р., ЗАДЕ Л. *Принятие решений в расплывчатых условиях* / Вопросы анализа и процедуры принятия решений. М.: Мир, 1976. С. 172 – 215.

2 БУРКОВ В.Н., ЗАЛОЖНЕВ А.Ю., НОВИКОВ Д.А. *Теория графов в управлении организационными системами*. М.: Синтег, 2001. – 124 с.

3 БУРКОВ В.Н., ЛАНДА Б.Д., ЛОВЕЦКИЙ С.Е., ТЕЙМАН А.И., ЧЕРНЫШЕВ В.Н. *Сетевые модели и задачи управления*. М.: Советское радио, 1967. – 144 с.

4 ВОРОПАЕВ В.И. *Модели и методы календарного планирования в автоматизированных системах управления строительством*. М.: Стройиздат, 1974. – 232 с.

5 ГОЛЕНКО Д.И. *Статистические методы сетевого планирования и управления*. М.: Наука, 1968. – 400 с.

6 ОРЛОВСКИЙ С.А. *Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации*. М.: Наука, 1981. – 206 с.

7 *Управление проектами: справочное пособие* / Под ред. И.И. Мазура, В.Д. Шапиро. М.: Высшая школа, 2001. – 875 с.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВОЗМОЖНОСТИ ПРАКТИЧЕСКОГО МЕНЕДЖМЕНТА[1]

Глизнуцин В.Е.

(*Липецкий государственный технический университет, Липецк, acetec@lipetsk.ru*)

Введение

Стабильно работающая организация предоставляет широкие возможности для применения рационального нормативного подхода к менеджменту [8]. Ее цели достаточно полно определены, внутреннее поведение известно, внешнее – предсказуемо. Наличие таких условий позволяет эффективно использовать математические методы поддержки принятия управленческих решений на базе текущей внутренней информации. Отметим, что еще в 1913 году Г. Эмерсон предложил и обосновал эффективность использования данных бухгалтерского учета при принятии управленческих решений в производственном процессе, но его предложение не было оценено по достоинству [7]. В предлагаемой работе развиваются его идеи, но на современной математической, информационной и технической базе.

1. Как подружить практический менеджмент с математическими методами

Известные математические методы, оформившиеся впоследствии в теорию исследования операций, первоначально разрабатывались именно для поддержки принятия управленческих решений в текущей хозяйственной деятельности организации, то есть как инструмент для менеджера. Так, для оптимального планирования производственной программы был разработан метод линейного программирования, обобщенный впоследствии на задачи оптимального распределения любых ресурсов организации [3]. Для определения оптимальных по критерию минимума затрат на приобретение и хранение партий закупок выведен ряд формул, среди которых в теории управления запасами наиболее известна формула "экономически обоснованного размера запаса", или формула Уилсона. Модификациями формулы Уилсона являются формулы Баумоля и Миллера-Орра для определения оптимального остатка денежных средств [1,2].

Понятно, что одни и те же математические методы можно использовать при решении множества задач, общих по управленческой природе и

---

[1] *Научный консультант д.т.н., профессор Кузнецов Л.А.*

различных по экономическому содержанию. Однако возможности практического применения математических методов к частным задачам менеджмента ограничиваются множеством причин, среди которых выделим следующие.

Менеджеру трудно ассоциировать конкретную задачу менеджмента с некоторой математической моделью. Формальная постановка задач ему непонятна. Часто это вызывает неприятие к инструменту в целом и скепсис к получаемым с его помощью результатам.

В информационной среде менеджмента отсутствуют данные, выступающие в качестве исходных при решении задач математическими методами. Создание специальной информационной структуры – отдельная задача, для которой у менеджера вряд ли найдется время, а обращение к информационным источникам другой предметной области (например, бухгалтерского учета) требует знания этой области.

Математические методы решения для массового и эффективного применения требуют реализации в виде пакета прикладных программ. Наиболее широко математические методы реализованы в различных САПР. Такое программное обеспечение ориентировано на технологические службы крупного машиностроительного производства, а никак ни на менеджеров среднего и малого бизнеса.

Для устранения перечисленных препятствий на пути широкого применения математических методов в практическом менеджменте разработана методология управления хозяйственной деятельностью организации, предусматривающая следующие необходимые шаги.

Для формирования исходных данных в математических моделях используется поле бухгалтерской информации. Достоинством этого шага является, во-первых, обязательный характер формирования бухгалтерской информации в режиме реального времени в каждой организации, и во-вторых, наличие в бухгалтерском учете всей необходимой информации о каждой совершившейся хозяйственной операции. Последующее преобразование первичных данных в отчетные формы в соответствии с алгоритмами бухгалтерского учета приводит к частичной потере (в результате агрегирования) и естественному устареванию данных. Но менеджер организации для принятия решений располагает не только формами внешней бухгалтерской отчетности, но и внутренней первичной информацией, содержащей все необходимые данные для применения математических методов.

Построена классификация задач менеджмента, варианты решения которых могут быть найдены математическими методами, по отношению к классам управленческих задач, математическим методам и областям хозяйственной деятельности.

Программные модули, реализующие математические методы, разрабатываются в виде функциональной надстройки над тиражными автоматизированными системами бухгалтерского учета (АСБУ), так как практически каждая бухгалтерия использует АСБУ. Такое решение автоматически предоставляет в распоряжение менеджера организации исходную информацию и математический аппарат для ее преобразования. Ему остается только задавать цели, ограничения и другие условия моделирования и оценивать результаты решения, выполненного на текущих данных его организации. При разработке интерфейса программных модулей важно, чтобы общение с пользователем велось на понятном менеджеру языке его предметной области [4].

2. Классификация задач менеджмента

Будем классифицировать задачи управления хозяйственной деятельностью организации по отношению к областям хозяйственной деятельности, классу управленческих задач и математическим методам (рис. 1).

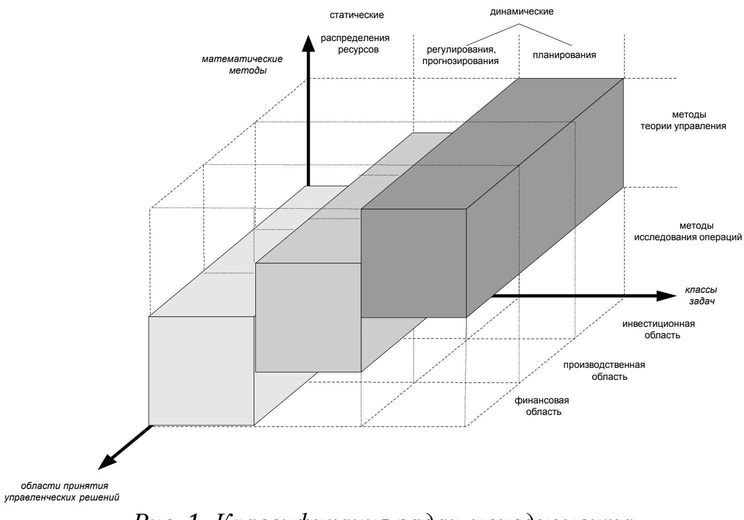

Рис. 1. Классификация задач менеджмента

Первое основание для классификации характеризует точки приложения управленческих решений. Практический менеджмент выделяет три основных области принятия управленческих решений – производственную, инвестиционную и финансовую. Аналогичное выделение областей учета присутствует и в бухгалтерском учете. Внутри каждой области определены свои объекты управления для менеджмента и учета для бухгалтерского учета.

Второе основание для классификации определяет класс задач управления организацией, среди которых можно выделить статические и динамические задачи. Статические задачи имеют смысл задач распределения ресурсов, а динамические – текущего управления (регулирования и прогнозирования) или стратегического планирования.

Третье основание для классификации включает математические методы решения задач управления – теории исследования операций и теории управления, которые в свою очередь детализируются до конкретных методов.

Разработка такой классификации позволяет каждую задачу менеджмента отнести к определенному классу задач управления и поставить ей в соответствие математический метод решения.

Статические задачи менеджмента есть задачи распределения ресурсов. Они легко решаются методами исследования операций. В бухгалтерской отчетности содержатся результаты хозяйственной деятельности за некоторый период времени – как правило, месяц, квартал, полугодие, год. Такой информации достаточно для поиска оптимальных в некотором смысле структур активов или пассивов организации или каких-то их подмножеств. Важно, что оптимальная структура в общем смысле существует всегда в силу необходимости достижения наилучших с какой-то точки зрения результатов при ограниченных ресурсах.

Применение конкретного метода зависит от вида задачи. Определение размера некоторого ресурса, оптимального по критерию минимума затрат на обслуживание, есть задача управления запасами. В случае, когда искомые виды некоторого ресурса формируются путем преобразования из других ограниченных ресурсов с известными эффективностями, следует прибегнуть к линейному программированию. Если требуется определить оптимальные доли частей некоторого заданном в целом ресурса, то удобно пользоваться методом динамического программирования.

Для решения динамических задач текущего управления и стратегического планирования более подходят методы теории управления.

3. Применение методов исследования операций

Теперь покажем, как математические методы исследования операций можно применить к задачам управления из различных областей хозяйственной деятельности. Такой подход позволяет понять экономическую природу значительно большего числа задач, чем практикуется менеджерами организаций.

В производственной области объектами управления выступают оборотный капитал и его элементы – материалы, готовая продукция, денежные средства, дебиторская и кредиторская задолженности. Очевидно, что методом динамического программирования можно искать оптимальную структуру оборотного капитала при заданной его величине. Несколько модернизировав классическую постановку, можно решить задачу, которая вызывает значительно больший интерес – задачу определения структуры минимальной величины оборотного капитала для обеспечения заданного объема выпускаемой продукции. При заданной величине денежных средств метод динамического программирования позволяет определить их оптимальное распределение по формам хранения (в национальной валюте, в валютах других государств, в ценных бумагах и т.п.).

Метод линейного программирования позволяет определить оптимальное распределение материалов по местам хранения, сформировать производственную программу, распределить денежные средства по формам хранения при наличии ограничений на некоторые формы.

Минимизация затрат на обслуживание ресурса применительно к элементам оборотного капитала позволяет планировать их оптимальные в этом смысле размеры.

В инвестиционной области объектами управления выступают инвестиционные проекты и их составляющие – основные средства, нематериальные активы, трудовые ресурсы. Очевидно, что методами динамического программирования можно искать варианты инвестиционного портфеля при известной общей сумме средств на инвестиции.

Предположим, что предварительно определена производственная программа при ограничениях только на объемы продаж, которые диктуются рынком. Тогда, используя метод линейного программирования, можно определить оптимальное количество видов оборудования, нематериальных активов и трудовых ресурсов. Знание оптимальных и фактических значений позволяет принимать решения о соответствующих инвестициях в расширение действующего производства.

Минимизация затрат на обслуживание ресурса применительно к основным средствам и нематериальным активам служит обоснованием для принятия решений по их обновлению, капитальному ремонту, модернизации. Относительно трудовых ресурсов могут, например, приниматься решения о повышении квалификации персонала.

В области финансирования объектами управления выступает капитал организации, его составляющие – собственный и заемный капитал, а также нераспределенная прибыль. Задачи управления капиталом возникают в случае недостатка собственных средств на обеспечение производственной и инвестиционной деятельности. Задачи распределения и использования прибыли стоят перед организацией в любом случае. Методом динамического программирования удобно выполнять поиск вариантов оптимального соотношения собственного и элементов заемного капиталов с целью обеспечения максимальной рыночной стоимости организации. Используя метод линейного программирования, можно формировать политику распределения (дивиденды) и использования (на развитие, на потребление) прибыли.

Основным ограничением применимости методов исследования операций является их пригодность только для частных задач. Но оптимальное решение частной задачи не обязательно является таковым для организации в целом. Поэтому есть необходимость постановки и решения более общих задач, для которых подходит математический аппарат теории управления.

4. Применение методов теории управления

Общая задача управления организацией требует согласованного решения отдельных частных задач. Декомпозиция общей задачи управления организацией на более простые задачи позволяет получать решения, но при этом необходимо выполнять и декомпозицию целей (строить дерево целей). Построение дерева целей – задача в первую очередь качественная. Количественную оценку можно искать только для весов частных целей в некотором объединяющем их критерии. Поэтому возникают проблемы, связанные с обеспечением оптимальности для организации в целом решений, полученных для частных задач. Наука логистика сформировалась в результате тенденции к оптимальному управлению материальными запасами не разрозненно в местах их нахождения, а по всей цепочке их передвижения. Логическим продолжением этой тенденции является обобщение движения материальных потоков на весь цикл обращения оборотного капитала, а затем и на всю производственную (или любую другую) деятельность.

Методология бухгалтерского учета упорядочивает информацию обо всех областях хозяйственной деятельности в единой системе. Поэтому над полем данных бухгалтерского учета как раз и удобно строить систему управления хозяйственной деятельностью в целом, не выполняя декомпозицию задач. При этом традиционные частные задачи являются отдельными частями общего решения, а их взаимоувязка и соответствие глобальной цели выполняются автоматически.

При таком подходе хозяйственную деятельность удобно моделировать в соответствии с теорией управления. Рассмотрим систему с двухуровневым управлением (рис.2), в которой объект управления моделируется в форме бухгалтерского преобразования информации о хозяйственных операциях в показатели эффективности хозяйственной деятельности (показатели внутренней и внешней бухгалтерской отчетности). На нижнем уровне управления осуществляется регулирование по отклонению фактических показателей эффективности хозяйственной деятельности от плановых значений, поступающих с верхнего уровня управления. Верхний уровень управления реализует систему стратегического планирования развития организации на основе агрегированных данных о уже совершившейся хозяйственной деятельности.

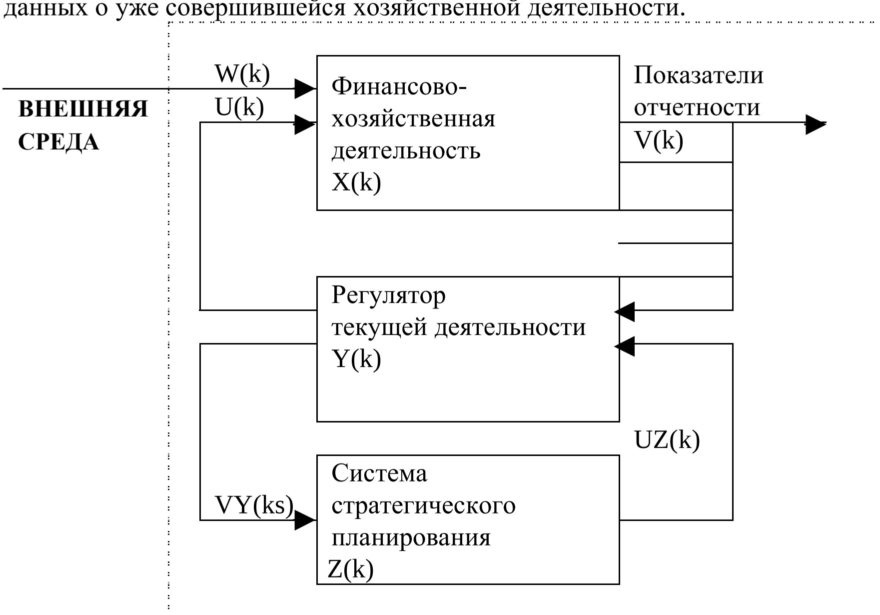

Рис.2 Модель хозяйственной деятельности с управлением

Математическая модель такой системы может быть записана в пространстве состояний в общепринятом виде:

- для объекта управления как

(1) $\boldsymbol{X}(k+1) = Ax\,\boldsymbol{X}(k) + Au\,\boldsymbol{U}(k) + Aw\,\boldsymbol{W}(k)$

(2) $\boldsymbol{V}(k) = Bx\,\boldsymbol{X}(k) + Bu\,\boldsymbol{U}(k) + Bw\,\boldsymbol{W}(k)$

- для регулятора текущей деятельности как

(3) $\boldsymbol{Y}(k+1) = \mathrm{Cy}\,\boldsymbol{Y}(k) + \mathrm{Cv}\,\boldsymbol{V}(k)$

(4) $\boldsymbol{U}(k) = Dv(k)\,(\boldsymbol{UZ}(k) - \boldsymbol{V}(k))$

и для системы стратегического планирования как

(5) $\boldsymbol{Z}(ks+1) = Fz\,\boldsymbol{Z}(ks) + Fv\,\boldsymbol{VY}(ks)$

(6) $\boldsymbol{UZ}(ks) = Hz(ks)\;\boldsymbol{Z}(ks) + Hv(ks)\;\boldsymbol{VY}(ks)$.

Объединив модель хозяйственного процесса (1), (2) с моделью регулятора текущей деятельности (3), (4) и исключив $\boldsymbol{U}(k)$, получим замкнутую модель управления текущим хозяйственным процессом в виде:

(7) $\boldsymbol{X}(k+1) = Ax`(k)\;\boldsymbol{X}(k) + Aw`(k)\,\boldsymbol{W}(k)$

(8) $\boldsymbol{Y}(k+1) = Cy\,\boldsymbol{Y}(k) + Cv\,\boldsymbol{V}(k)$

(9) $\boldsymbol{V}(k) = Bx`(k)\,\boldsymbol{X}(k) + Bw`(k)\,\boldsymbol{W}(k) + \boldsymbol{Bz}(k)$

где $Ax`(k) = Ax - Au\,Dv(k)\,[I + Bu\,Dv(k)]^{-1}\,Bx$; $Bx`(k) = [I + Bu\,Dv(k)]^{-1}\,Bx$; $Aw`(k) = Aw - Au\,Dv(k)\,[I + Bu\,Dv(k)]^{-1}\,Bw$; $Bw`(k) = [I + Bu\,Dv(k)]^{-1}\,Bw$; $\boldsymbol{Bz}(k) = [I + Bu\,Dv(k)]^{-1}\,Bu\,Dv(k)$.

При добавлении к замкнутой модели текущего управления системы стратегического планирования (5), (6) получим замкнутую модель управления хозяйственным процессом в длительном периоде.

Содержательный смысл замкнутой модели управления производственным процессом в длительном периоде рассмотрен в [5, 6]. Там показано, что система планирования формирует совместное решение задачи объемного планирования производства и задач определения оптимальных по минимуму затрат на пополнение и хранение размеров элементов оборотного капитала (материалов, незавершенного производства, готовой продукции, денежных средств, дебиторской и кредиторской задолженностей), а текущий регулятор, минимизируя отклонения фактических значений объемов выпуска продукции и уровней запасов всех ресурсов, обеспечивает выполнение основных требований производственного менеджмента – сбалансированности, эффективности и ликвидности хозяйственного процесса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Идея использования математических методов в менеджменте, высказанная Вебером в 1947 году [8], не получила широкого распространения в практике хозяйствования коммерческих организаций.

В статье сформулированы основные причины такой непопулярности:

- математические методы излагаются на языке математики, поэтому трудны для понимания менеджеру организации. Задачи менеджмента излагаются вербально, что чуждо математику. Для практического применения не хватает корректного перевода;
- трудности формирования исходных данных для применения математических методов;
- отсутствие программного обеспечения по математическим методам, ориентированного на широкий круг задач менеджмента.

Современное состояние математического аппарата, информационных технологий в экономике и технической базы организаций позволяет предложить методологию управления хозяйственной деятельностью организации, которая снимает имеющиеся проблемы. Изложены ее определяющие положения:

- построена классификация, позволяющая ставить в соответствие задачам менеджмента необходимые для их решения данные бухгалтерского учета и конкретные математические методы, причем частным задачам – методы исследования операций, а общим – методы теории управления;
- для решения общих задач построены математические модели над информационным пространством бухгалтерского учета;
- программные модули, реализующие математические методы, предложено разрабатывать в виде функциональной надстройки над тиражными автоматизированными системами бухгалтерского учета (АСБУ).

Такой подход позволяет менеджеру организации получать интересующие его решения сколь угодно часто. При этом от него не требуется профессиональных знаний математика и бухгалтера.

Литература

1. БАУМОЛЬ У. *Экономическая теория и исследование операций*. – М.: Прогресс, 1965.- 496.
2. БРЕЙЛИ Р., МАЙЕРС С. *Принципы корпоративных финансов*. – Пер. с англ. – М.: ЗАО «Олимп – Бизнес», 1997. – 1120 с.
3. КАНТОРОВИЧ Л.В. *Математические методы в организации и планировании производства*. – Изд-во ЛГУ, 1939
4. КУЗНЕЦОВ Л.А., ГЛИЗНУЦИН В.Е., ГЛИЗНУЦИНА Е.С., ЛИФАНОВА Е.С. *Автоматизированная система оптимального объемного планирования производства* / Датчики и системы № 1, 2001 г. С. 50 – 53.
5. КУЗНЕЦОВ Л.А., ГЛИЗНУЦИН В.Е., ГЛИЗНУЦИНА Е.С., ДЕГТЕРЕВА М.А. *Стратегическое планирование производственной деятельности организации* / Современные сложные системы управления СССУ/HTCS’2002: Сб. тр. межд. науч.-техн. конф. Липецк, 2002. С. 87 – 89.
6. КУЗНЕЦОВ Л.А., ГЛИЗНУЦИН В.Е., ГЛИЗНУЦИНА Е.С., РОЩУПКИНА О. В. *Текущее регулирование производственного процесса* / Современные сложные системы управления СССУ/HTCS’2002: Сб. тр. межд. науч.-техн. конф. Липецк, 2002. С. 90 – 92.
7. ЭМЕРСОН Г. *Двенадцать принципов производительности*. М.: Экономика, 1991.
8. WEBER *M. The Theory of Social and Economic Organization*. New York: Free Press, 1947.

СТИМУЛИРОВАНИЕ КОЛЛЕКТИВОВ БРИГАД В УСЛОВИЯХ ПОТОЧНО-МАССОВОГО ПРОИЗВОДСТВА

Гришанов Д.Г. Павлов О.В. Сидоров В.В.
(*АО «АВТОВАЗ», Тольятти, Самарский государственный аэрокосмический университет, Самара*)

В отечественной экономике наибольшую известность получила коллективная форма оплаты труда производственных бригад, разработанная на ОАО "АвтоВАЗ" для условий строго регламентированного поточно-массового производства. Система оплаты труда на ОАО " АвтоВАЗ" включает оплату:

1. По тарифным ставкам за отработанное время.
2. Доплаты за профессиональное мастерство, устанавливаемое членом бригады в размере 4, 8, 12, 16, 20, 24 процента к тарифной ставке в сумме с доплатой за работу по напряжённым нормам и доплатой за условия труда.
3. Доплаты за условия труда устанавливаются на рабочие места в зависимости от степени интенсивности, тяжести и вредности условий труда в размере от 4 до 24 процентов к тарифным ставкам с учетом характеристики рабочего места.
4. Доплата за напряженность норм труда.
5. Доплаты за выполнение нормированных производственных заданий бригадой.
6. Премии за снижение трудоемкости и рост производительности труда.

Доплаты за напряженность норм труда проводятся по конкретным рабочим местам в зависимости от удельного веса активного времени в нормах с учетом факторов условий труда на основании «Таблицы доплат за напряженность норм труда» (таблица 1).

В соответствии с таблицей 1 можно одновременно стимулировать и за напряженность норм труда, характеризуемую удельным весом активного времени, и за условия труда, выражаемые балльной оценкой. Начисление доплат за напряженность норм труда производится по результатам работы каждого рабочего за месяц в процентах к тарифной ставке, присвоенному рабочему разряду, за фактически отработанное время на рабочих местах, на которых установлена доплата. Величина доплат, как видно из таблицы 1, зависит от уровня удельного веса активного времени и балльной оценки факторов производства: с увеличением уровня удельного веса активного времени и балльной оценки увеличивается и размер доплат.

Таблица 1. Доплаты за напряженность норм труда

Удельный вес активного времени в составе нормы	Сумма бальной оценки факторов условий труда				
	до 40,4	40,5 – 45,0	45,1 – 50,2	50,3 – 53,0	53,1 – 60,0
	Размер доплат за напряженность норм труда в %				
Менее 0,77	0	0	0	0	0
0,77 … 0,80	0	0	0	0	0
0,81 … 0,84	0	0	0	8	10
0,85 … 0,88	0	0	8	10	12
0,89 … 0,92	0	8	10	12	14
0,93 … 0,95	8	10	12	14	16
0,96 … 0,98	10	12	14	16	18
0,99 … 1,00	12	14	16	18	20

Напряженность норм труда рабочего в условиях поточно-массового сборочного производства определяется среднечасовым темпом выпуска изделий $n_ч$: чем больше часовой темп выпуска и меньше ритм сборки r, тем больше напряженность норм труда и, следовательно, выше удельный вес активного времени. В таблице 2 приведены значения напряженности норм труда $y_1(n_ч)$ и ритма сборки r при различных величинах темпа выпуска автомобилей $n_ч$.

Уравнение для напряженности норм труда, построенное по данным таблицы 2, имеет вид:

(1) $y_1(n_ч) \le 0{,}0167\, n_ч, \quad 0 \le n_ч \le 60$.

Эластичность функции (1) к часовому темпу равна единице, т.е.

$$E(y_1) = \frac{\partial y_1 n_r}{\partial n_r y_1} = 1 .$$

Это значит, что при однопроцентном приращении часового темпа выпуска изделий напряженность норм труда увеличивается также на один процент и, следовательно, должен увеличиваться размер доплаты на один процент.

В среднем, как следует из таблицы 1, однопроцентное приращение напряженности норм труда дает работнику 0,87 процентное приращение величины доплаты, что не в полной мере стимулирует напряженный труд работающих. Отметим, что только на интервале от 0, 98 до 1 однопроцентное увеличение напряженности труда обеспечивается однопроцентным увеличением величины доплат.

Таблица 2. Значение напряженности норм труда

Часовой темп выпуска *n* ч (шт/час)	10	20	30	40	50	55	60
Удельный вес активного времени У1 (*n* ч)	0,167	0,334	0,5	0,667	0,84	0,92	1
Ритм сборки *r* (мин/шт)	6	3	2	1,5	1,2	1,09	1

Таким образом, при заданном темпе сборки автомобилей по формуле (1) находится напряженность норм труда, а затем с учетом балльной оценки условий труда по таблице 1 определяется размер дополнительной оплаты, как процент к тарифной ставке рабочего

(2) $D(y_1, y_2) = T\,\delta(y_1(n_ч),$

где T – тарифная ставка рабочего, $\delta(y_1(n_ч), y_2)$ – размер доплат за напряженный труд.

Заводская система оплаты труда построена с таким расчетом, чтобы стимулировать безусловное выполнение программы каждой бригадой и производством, создать предпосылки освоения проектных технически обоснованных норм каждым рабочим.

Производственное задание устанавливается бригадам на месяц на основе производственной программы и технологической трудоемкости. Уровень выполнения производственных заданий определяется без учета объемов дополнительных непроизводительных работ как отношение фактически выполненного объема работ к плановому:

(3) $d(y,x) = \frac{y}{x}\cdot 100\%$,

где $y = t_{бр}\,q$ – фактический объем выработки продукта в нормо-часах; $x = t_{бр}x_q$ – плановый объем продукции в нормо-часах; q, x_q – фактический и плановый объем продукции в штуках; $t_{бр} = \sum_{j=1}^{m} t_j$ – суммарная трудоемкость по m операциям, закрепленным за бригадой; $t_{бр} = \sum_{j=1}^{m} t_j$, t_j – технологическая трудоемкость j-ой операции.

Уравнение (3) позволяет определить сменное выполнение плана по выпуску продукции бригадой и поэтому может рассматриваться оценкой достижения одной из локальных целей бригады.

При уровне выполнения нормированного производственного задания от 80 до 100% начисление дополнительной оплаты производится по формуле

(4) $D(y,x) = \left(d(y,x) - 80\right)a/20;\quad 80\ \mathbf{p}\ d(y,x) \le 100$,

где a – базовый размер дополнительной оплаты за выполнение производственного задания в процентах.

Если степень выполнения плана по выпуску продукции равна 100%, то бригаде начисляется базовый размер дополнительной оплаты, при выполнении задания ниже 80% дополнительная оплата не начисляется.

Для того чтобы обеспечить одновременное выполнение нормативного задания и выполнение, например, плана по номенклатуре на практике строится система дополнительной оплаты, учитывающая изменения обоих показателей. Так, в положении об оплате труда работников предусматриваются и основные и дополнительные показатели, от изменения которых зависит размер дополнительной оплаты. Для производственной бригады, занятой производством автомобилей, размер дополнительной оплаты зависит от уровня выполнения нормированного задания и выполнения плана по номенклатуре. При этом за каждый процент недовыполнения номенклатурного плана размер дополнительной оплаты, начисленной за выполнение нормированного производственного задания, снижается на 1%, но не более чем на 50%.

Пусть степень выполнения номенклатурного плана определяется из соотношения

(5) $d_{HM}(y_1, x_1) = \dfrac{y_1}{x_1}\%$,

тогда величина недовыполнения плана представляет собой разность

(6) $\Delta(y_1, x_1) = (100 - d_{HM}(y_1, x_1))$,

где y_1 – фактическое значение выполнения номенклатурного плана; $x_1 = 100$ – плановое значение номенклатурного плана.

С учетом (6) размер дополнительной оплаты (4), начисленной за выполнение нормированного задания, будет равен

(7) $D(y, x, y_1, x_1) = (D(y, x) - \Delta(y_1, x_1))$.

Эта разность по положению не должна быть меньше 0,5 (y, x), т.е. итоговый размер дополнительной оплаты не должен быть меньше величины дополнительной оплаты, начисленной за выполнение нормативного задания.

Аналитическое уравнение для функции дополнительной оплаты за выполнение нормативного задания бригады с учетом выполнения номенклатурного плана будет иметь вид:

$$d(y, x, y_1, x_1) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad d(y, x) \le 80 \\ D(y, x, y_1, x_1) = (D(y, x) - \Delta(y_1, x_1)), & \\ \text{если} \quad 80 < d(y, x) \le 100, & \\ D(y, x, y_1, x_1) \ge 0{,}5\, D(y, x) & \end{cases}$$

где $D(y, x, y_1, x_1)$ – итоговый размер дополнительной оплаты, начисленной бригаде с учетом выполнения номенклатурного задания.

Начисление дополнительной оплаты производится в зависимости от уровня выполнения задания в процентах к тарифной ставке в сумме с доплатой за напряженность норм труда $\delta_{нн}(y, x)$ и доплатой за условия труда $\delta_{ут}(y)$ по уравнению

(8) $f(y,x) = T\left[(100 + d_{нн}(y,x) + d_{ут}(y)/100)\right](100 + d_{н.з.}(y,x,y_1,x_1))/100.$

Это уравнение представляет собой одну из целевых функций бригады при реализации ею нормированного производственного задания при заданных условиях и напряженности труда. Рассмотрим механизм реализации этой цели. Для этого проанализируем стратегию поведения коллектива бригады с учетом особенностей поточно-массового производства в условиях действующего механизма стимулирования.

Предположим, что в общем случае за бригадой закреплено m сборочных операций, каждая из которых имеет нормативную трудоемкость t_j; $j = 1, \ldots, m$.

Суммарная трудоемкость работ, выполняемых бригадой, равна

(9) $t_{бр} = \sum_{j=1}^{m} t_j .$

При заданном ритме r выпуска автомобилей, количество рабочих мест, обслуживаемых бригадой, равно

(10) $l_{бр} = t_{бр} / r = \sum_{j=1}^{m} t_j / r .$

Для организации сборки автомобилей на поточной линии необходимо, чтобы продолжительность каждой операции была равна или кратна ритму сборки, т.е. чтобы на каждой операции было соблюдено условие

(11) $l_j r = t_j$

где l_j – число рабочих мест, установленных на j-ой операции.

На сборочном конвейере сборка автомобилей осуществляется рабочими бригады на ходу движения изделий на конвейере. По окончании сборочной операции изделия рабочие возвращаются на свое исходное место и начинают сборочную операцию следующего по порядку изделия, которое должно подойти к этому месту в момент возвращения рабочих. Ритм работы такого конвейера складывается из времени непосредственной сборочной операции и передвижения рабочих, т.е.

(12) $r = \max_j (t_{сб} + t_{в})_j \le \Phi_{эф} / q ,$

где $\Phi_{эф}$ – эффективный фонд времени работы сборочной линии; q – количество изделий, подлежащих изготовлению на линии; $t_в$ – время передвижения рабочих при выполнении j–той операции; $t_{сб}$ – время выполнения j-той сборочной операции.

С уменьшением ритма суммарное время на выполнение сборочной операции и передвижение рабочих уменьшается, а производительность линии увеличивается.

Опишем механизм реализации цели коллективом бригады, определяющий действие коллектива на этапе реализации нормированного производственного задания. Для описания механизма реализации производственного задания сформируем модель ограничений и целевую функцию.

Будем считать, что бригада собирает один вид изделия в объёме q, используя для этого один вид ресурсов – трудовой ресурс в количестве L. Предположим, что количество рабочих мест в бригаде $l_{бр}$ равно количеству работающих $L_{бр}$ ($l_{бр}=L_{бр}$). Пусть эффективность использования трудового ресурса характеризуется величиной выработки β на одного рабочего бригады. Тогда при заданной численности рабочих в бригаде, заданной технологии сборки изделия, количество выпускаемых изделий будет определяться эффективной выработкой рабочих $\beta_э$ (производительностью труда работающих)

(13) $q = j\,(b_э),\; u_э = e(a)\,b_э,$

где $j\,(b_э)$ – производственная функция; $b_э$ – эффективный темп сборки автомобилей; $e(a)$ – функция усилия; a – процент дополнительной оплаты работникам при реализации нормированного производственного задания.

При известном ритме сборочной линии r, время, затраченное на выпуск продукции бригадой в количестве q, не должно превышать эффективного фонда времени $\Phi_{эф}$, т.е.:

(14) $r\,q \le \Phi_{эф}\,;\; \Phi_{эф} = S\sum_{к=1}^{к_{см}}(T_{ctk} - T_{регк}),$

где S – количество рабочих мест в плановом периоде; $T_{смк}$ – продолжительность $к$-ой смены; $T_{рег.к}$ – продолжительность регламентированных перерывов в $к$-ой смене.

С учётом (8) и (12), (14) модель, описывающая стратегию поведения количества бригады при реализации производственного задания, имеет следующий вид:

(15) $$f(y,x) = A\left\{\left[\left(\frac{q}{x_q} - 80\right)a/20\right] \cdot \left(100 - \frac{q}{x_q}\right)\right\} \to \max;$$

$$r \cdot q \le \Phi_{эф};\ q = j\,(e(a)B),$$

где $A = T\left[(100 + d_{нн}(y,x) + d_{ут}(y))/100\right]$ – фиксированная величина.

Модель механизма реализации нормированного задания (15), состоящая из функции стимулирования и ограничений, позволит исследовать воздействие материального стимулирования на поведение коллектива бригады. При этом активность коллектива бригады, как следует из (15), проявится в выборе им такого темпа сборки, который обеспечивает максимальное значение целевой функции.

Максимизируя величину дополнительной оплаты, коллектив бригады стремится увеличить фактический объём выпускаемой продукции q до величины, равной плановому нормированному заданию x_q. Если $q = x_q$, то размер дополнительной оплаты принимает максимальное значение и становится равным a.

При этом, если максимальной величине дополнительной оплаты соответствует и оптимальное значение усилий работника, то такая ситуация является наиболее эффективной как с позиции интересов коллектива бригады, так и интересов сборочного предприятия в целом, что и обеспечивается в практической деятельности ОАО «АвтоВАЗ».

Литература

1. БУРКОВ В.Н. *Экономические проблемы управления производством*. М.: РОЭЛ-Консалтинг, 1996.
2. БУРКОВ В.Н., ИРИКОВ В.А. *Модели и методы управления организационными системами*. М.: Наука, 1995.
3. ИОНОВ В.Я., КАШИН В.Н. *Хозяйственный механизм и эффективность промышленного производства*. М.: Наука, 1997.
4. НОВИКОВ Д.А. ПЕТРАРКОВ С.Н. *Курс теории активных систем*. М.: Синтег, 1999.
5. РИЧИН Т. *Количественные методы анализа хозяйственной деятельности*. М.: Дело и сервис, 1998.

ОПТИМАЛЬНЫЕ ИЕРАРХИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ ПРИ МОНОТОННОМ ФУНКЦИОНАЛЕ СТОИМОСТИ

Губко М.В.
(*Институт проблем управления РАН, Москва*)
*m*goubko@*ma*il.ru

Введение

Во многих областях науки и техники важную роль играет понятие иерархии, иерархической структуры. Для таких областей как теория систем, теория управления, типичным является представление объекта исследования (системы) в виде структуры подчиненности одних элементов системы другим.

Математической моделью иерархических структур являются ориентированные графы. Ориентированным графом (*орграфом*) называется кортеж $<V, E>$, где V – это множество вершин, $E = \{(v_1, v_2) : v_1, v_2 \in V\}$ – множество дуг. Присутствие во множестве E вектора (v_1, v_2) соответствует наличию связи (дуги) между вершинами v_1 и v_2 графа. Тогда *иерархией*, или *иерархической структурой* обычно называют ациклический[1] орграф.

В настоящее время области применения теории графов весьма многочисленны – теория кодирования, нелинейная динамика, управление проектами и т.д. Во многих приложениях графы используются именно для моделирования иерархий, и одной из типичных задач является оптимизация иерархии, то есть поиск оптимальной в некотором смысле иерархической структуры на множестве допустимых иерархий[2].

Обычно подобные задачи рассматриваются практически независимо, при их решении существенно используется специфика предметной области. В то же время сходство между этими задачами делает актуальными сведение их к единой постановке и разработку единых подходов к их решению. Основной чертой данного подхода должно быть стремление к рассмотрению задачи оптимизации иерархии в абстрактном виде без привязки к конкретным содержательным интерпретациям. Примерами реализации этой программы служат работы [1-4], и данная статья может

---

[1] *Орграф называется ациклическим, если в нем нет циклов – последовательностей дуг вида* $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_n, v_1)$.

[2] *В* [6] *приведены примеры подобных задач из теории алфавитного кодирования, теории массового обслуживания, теории управления.*

рассматриваться как продолжение намеченной в них программы исследования.

1. Постановка задачи и основные понятия

Как отмечалось выше, задачу оптимизации иерархии можно сформулировать как задачу выбора оптимальной в некотором смысле иерархической структуры из некоторого множества допустимых иерархий (ациклических орграфов).

На практике обычно рассматриваются конечные иерархии, в графе каждой из которых множество вершин конечно. В то же время, анализ бесконечных иерархий иногда позволяет выявить важные свойства оптимальных иерархических структур [5], поэтому далее рассматривается общий случай. Предположение о конечности иерархий будет оговариваться отдельно.

Определение 1. Для произвольной вершины v орграфа $G=<V,E>$ множество $Q_G(v)=\{v':(v',v)\in E\}$ будем называть множеством непосредственных подчиненных вершины v, множество $R_G(v)=\{v':(v,v')\in E\}$ – множеством непосредственных начальников вершины v. Вершина v графа G называется терминальной, если множество ее непосредственных начальников пусто, $R_G(v)=\varnothing$.

Множество терминальных вершин графа G обозначим T_G.

Итак, пусть на множестве всех иерархий Ξ задано некоторое множество допустимых иерархий $\Omega\subseteq\Xi$ и отображение $P:\Omega\to[0,+\infty)\cup\{+\infty\}$, ставящее в соответствие каждому орграфу из множества Ω неотрицательное число. Отображение $P(\cdot)$ будем называть функционалом стоимости иерархии. Тогда задача поиска оптимальной иерархии на множестве допустимых иерархий Ω состоит в поиске графа $G^*\in\Omega$, доставляющего минимум функционала стоимости, то есть

(1) $G^*\in Arg\min_{G\in\Omega}P(G)$ [1].

Разумеется, решать задачу (1) в общем виде невозможно – необходимо делать некоторые предположения о виде функционала и допустимого множества. В [1-6] рассматривается задача поиска оптимальной иерархии для функционалов специального вида (так называемых, структурных функционалов стоимости) и определенных классов допустимых множеств (множеств иерархий, реализующих заданный набор функций). В [6]

---

[1] *Естественно, пока не утверждается, что задача обязательно имеет решение, то есть что множество* $Arg\min_{G\in\Omega}P(G)$ *не пусто.*

приведены примеры прикладных задач, сводимых к поиску оптимальной иерархии со структурным функционалом стоимости.

Данная работа посвящена исследованию более слабых предположений о виде функционала стоимости, а именно, свойств оптимальной иерархии при монотонном функционале стоимости P.

2. Монотонные функционалы стоимости

Одним из важных классов функций множества являются монотонные функции. Функция множества $Q(A)$ монотонна, если для любой пары множеств $A \subseteq A'$ $Q(A) \leq Q(A')$. Так как функционал стоимости иерархии является, по сути, функцией двух множеств, V и E, выделим свойства монотонности по каждому из них.

Определение 2. Функционал стоимости иерархии P называется дуго-монотонным, если для произвольных графов $G_1 = <V, E_1> \in \Omega$, $G_2 = <V, E_2> \in \Omega$ таких, что $E_1 \subset E_2$, выполнено неравенство $P(G_1) \leq P(G_2)$ (иначе говоря, удаление из графа дуг не увеличивает стоимости графа). Функционал $P : \Omega \to [0, +\infty)$ называется вершинно-монотонным, если неравенство $P(G_1) \leq P(G_2)$ выполнено для произвольных графов $G_1 = <V_1, E> \in \Omega$, $G_2 = <V_2, E> \in \Omega$ таких, что $V_1 \subset V_2$ (удаление из графа изолированных вершин не увеличивает его стоимости). Если неравенство $P(G_1) < P(G_2)$ выполняется строго, то функционал называется строго дуго-монотонным или строго вершинно-монотонным соответственно. Одновременно и дуго-монотонный и вершинно-монотонный функционал будем называть монотонным. Одновременно и строго дуго-монотонный и строго вершинно-монотонный функционал – строго монотонным.

Отметим, что если задана иерархия $G = <V, E>$, то любой граф $G' = <V, E'>$, в котором $E' \subset E$, также является иерархией.

3. Базовые графы

Для произвольного графа $G = <V, E>$ множество дуг E можно рассматривать, как бинарное отношение [7] (отношение подчиненности) на множестве V.

Определение 3 [7]. Бинарное отношение E называется произведением $E_1 E_2$ бинарных отношений E_1 и E_2, если $(v_1, v_2) \in E$ $\Leftrightarrow$ $\exists w : (v_1, w) \in E_1, (w, v_2) \in E_2$. Для произвольного отношения E естественным образом определяется его k-я степень E^k.

Для произвольного бинарного отношения можно определить его транзитивное замыкание [7] по формуле

(2) $E^{\infty} = E \cup E^2 \cup \ldots = \bigcup_{k \in N} E^k$.

Транзитивное замыкание отношения E является минимальным транзитивным отношением, содержащим E. Если исходное отношение E ациклично, то транзитивное замыкание антирефлексивно.

Определение 4. Для произвольного графа $G =< V, E >$ отношение $\Gamma_G := I_V \cup E^{\infty}$ (и соответствующий ему граф на множестве вершин V) будем называть отношением подчиненности (графом подчиненности) графа G.[1]

Определение 5. Для произвольной вершины $v \in V$ иерархии $G =< V, E >$ коллективом $K_G(v)$ будем называть множество

$$K_G(v) := \{v' \in V : (v', v) \in \Gamma_G\} = Q_{\Gamma_G}(v),$$

$S_G(v) := \{v' \in V : (v', v) \in E^{\infty}\} = Q_{E^{\infty}}(v)$ назовем множеством подчиненных вершины v, а множество

$M_G(v) := \{v' \in V : (v, v') \in E^{\infty}\} = R_{E^{\infty}}(v)$ назовем множеством начальников вершины v.

Равенство графов подчиненности порождает отношение эквивалентности (симметричное транзитивное рефлексивное отношение) на множестве иерархий, то есть расслаивает Ω на классы эквивалентных графов (графов с одинаковыми графами подчиненности). Класс эквивалентных графов с транзитивным замыканием E^{∞} обозначим $\Omega(E^{\infty})$.

Определение 6 [7]. Для произвольной иерархии $G =< V, E >$ ее базовым графом называется граф $G' =< V, E' >$, в котором

(3) $E' = E^{\infty} \setminus E^{\infty} E^{\infty}$.

Содержательный смысл этой операции прост – для каждой вершины отношения подчиненности иерархии G удаляются подчиненные ее подчиненных.

Базовый граф является иерархией, то есть $G' \in \Xi$. Транзитивное замыкание G' равно E^{∞}, и удаление любой связи из графа G' приводит к изменению его транзитивного замыкания. В то же время, добавление в G' любой связи, имеющейся в его транзитивном замыкании, оставляет транзитивное замыкание неизменным.

---

[1] *I_V – отношение тождества элементов множества V:* $I_V = \{(v, v) : v \in V\}$.

Содержательно все базовые графы описываются известным еще с феодальных времен правилом «вассал моего вассала – не мой вассал». Это следует непосредственно из определения, ведь для каждой вершины из множества всех подчиненных удаляются подчиненные подчиненных.

4. Вид оптимальной иерархии для монотонного функционала стоимости

Как уже было отмечено, среди иерархий с одинаковым графом подчиненности базовый граф имеет минимальное число дуг. Поэтому при дуго-монотонном функционале стоимости иерархии базовый граф имеет минимальную стоимость на этом классе иерархий, а при строго дуго-монотонном – базисный граф строго дешевле любого графа из данного класса.

Теорема 1. Пусть для любой иерархи из множества допустимых иерархий Ω ее базовый граф также содержится в Ω, а функционал стоимости иерархии дуго-монотонный. Тогда для любого числа $e > 0$ найдется некоторый базовый граф G стоимости $P(G^*) < \inf_{G \in \Omega} P(G) + e$. Если также известно, что минимум в (1) достигается[1], то существует базовый граф из Ω минимальной стоимости. Если функционал строго дуго-монотонный, то любое решение задачи (1) является базовым графом.

Доказательство. Пусть минимум в (1) достигается. Предположим, что все оптимальные иерархии не являются базовыми графами. Выберем тогда произвольную оптимальную иерархию. В силу дуго-монотонности функционала ее базовый граф имеет не большую стоимость и по условию теоремы является допустимым. Следовательно, базовый граф принадлежит решению.

Предположим теперь, что функционал строго дуго-монотонный и иерархия *G* из решения задачи (1) не является базовым графом. Тогда соответствующий базовый граф имеет (в силу строгой дуго-монотонности функционала) строго меньшую стоимость, чем *G*, что невозможно в силу оптимальности *G*.

Пусть теперь решение задачи (1) пусто. Тогда в силу неотрицательности функционала для любого $e > 0$ найдется иерархия *G* стоимости $P(G) < \inf_{G' \in \Omega} P(G') + e$. Но базовый граф иерархии *G* имеет стоимость не большую стоимости *G* и является допустимым. •

Условия на допустимое множество Ω из формулировки теоремы 1 выполнены, в частности, если Ω ограничивает не сами допустимые

[1] *Например, минимум в* (1) *достигается при конечном множестве* Ω.

иерархии, а допустимые графы подчиненности, как например, сформулированное в [1] понятие «организации, реализующей заданный набор функций».

Таким образом, теорема 1 говорит о том, что зачастую при дугомонотонном функционале стоимости искать оптимальную иерархию достаточно на множестве базовых графов из Ω .

Данный результат имеет и следующее значение. Между базовыми графами и графами подчиненности имеется взаимно однозначное соответствие, определяемое формулами (2) и (3). Поэтому появляется возможность переформулировать задачу в терминах графов подчиненности и, соответственно, решать задачу на множестве графов подчиненности, пользуясь известными результатами [8] исследования отношений частичного порядка, которыми являются графы подчиненности.

Результат, аналогичный теореме 1 можно получить и для вершинно-монотонных функционалов, заменив в формулировке слова «базовый граф» на «граф без изолированных вершин», однако это не столь интересно в смысле содержательных интерпретаций.

Наконец, исследуем один важный с практической точки зрения класс допустимых множеств:

Определение 7. Множество Ω_f всех иерархий, в которых имеется вершина с заданным коллективом $K_G(v) = f$, называется классом иерархий, реализующих функцию *f*.

Так как для произвольного графа $G \in \Omega_f$ его базовый граф содержит коллектив *f*, то Ω_f удовлетворяет условиям теоремы 1. Однако для задачи поиска оптимальной на Ω_f иерархии можно сформулировать и более сильное условие оптимальности:

Теорема 2. Если в задаче поиска оптимальной иерархии на Ω_f минимум в (1) достигается, а функционал стоимости строго монотонный, то любой оптимальный граф является ордеревом[1].

Доказательство. Пусть задана оптимальная иерархия $G = \langle V, E \rangle \in \Omega_f$. В ней есть вершина *v* с коллективом *f*. Рассмотрим граф $H = \langle V \cap f, E \cap f \times f \rangle$. Из этого графа удалили все вершины, из которых нет пути в *v*, а также входящие и исходящие дуги этих вершин. Ациклический граф *H* по-прежнему содержит вершину v, и ее коллектив

---

[1] *Ордерево – это ориентированный граф, в котором из каждой вершины, кроме одной, терминальной, выходит ровно одна дуга. Коллектив терминальной вершины совпадает с множеством всех вершин графа, и дуг из нее не выходит.*

не изменился. Следовательно, $H \in \Omega_f$. Кроме того, в графе H вершина v – единственная терминальная вершина, так как ее коллектив совпадает с множеством всех вершин графа.

Поскольку G оптимален, то $H = G$, так как иначе в силу строгой монотонности функционала стоимость H строго меньше, что противоречит оптимальности графа G. Таким образом, в оптимальном графе коллектив единственной терминальной вершины совпадает с множеством всех вершин графа, то есть из любой вершины есть путь в терминальную вершину. Предположим, что в графе G найдется вершина v_0, из которой выходит более одной дуги, то есть множество $R_G(v_0)$ содержит как минимум два элемента – v' и v''. Удалим дугу (v_0, v'). Коллектив терминальной вершины v не изменился, так как из вершины v'' по-прежнему есть путь в v, а из v_0 есть путь в v''. В то же время, в силу строгой монотонности функционала стоимость графа строго уменьшилась, а это невозможно, так как G оптимален. Следовательно, оптимальный граф G является ордеревом. •

Теорема 3. Если все иерархии из Ω_f конечные, а функционал стоимости монотонный, то для любой иерархии из Ω_f имеется ордерево из Ω_f не большей стоимости.

Доказательство. Возьмем произвольную иерархию G из Ω_f и аналогично доказательству теоремы 2 удалим все вершины, из которых нет пути в вершину v с коллективом f. Если в получившемся графе из каждой вершины выходит одна дуга, то получили искомое ордерево. В противном случае вершин, из которых выходит более одного ребра конечное число, и мы можем для каждой из них удалить все исходящие дуги кроме одной (произвольной). Получившееся ордерево будет принадлежать Ω_f и в силу монотонности функционала иметь не большую стоимость, чем G. •

Следствие 1. Если в условиях теоремы 3 минимум в выражении (1) достигается, то существует оптимальное на Ω_f ордерево.

Данные результаты позволяют сделать вывод, что при поиске оптимальной иерархии на Ω_f при монотонном функционале стоимости достаточно ограничиться классом ордеревьев из Ω_f.

Литература

1. *ВОРОНИН А.А., МИШИН С.П. Моделирование структуры организационной системы. Об алгоритмах поиска оптимального дерева* // Вестн. Волг. ун-та. 2001. Сер. 1: Математика. Физика. С. 93 – 113.

2. *МИШИН С.П. Оптимальное управление структурой организационной системы* / Сборник трудов международной научно-технической конференции «Современные сложные системы управления». Липецк, 12–14 марта 2002. С. 101 – 102.

3. *ВОРОНИН А.А., МИШИН С.П. Алгоритмы поиска оптимальной структуры организационной системы* // Автоматика и телемеханика. 2002. №5. С. 120 – 132.

4. *ГУБКО М.В., МИШИН С.П. Оптимальная структура системы управления технологическими связями* / Сборник трудов международной научно-технической конференции «Современные сложные системы управления». Старый Оскол, 27-29 ноября 2002. С. 50 – 55.

5. *ГУБКО М.В. Структура оптимальной организации континуума исполнителей* // Автоматика и телемеханика. 2002. №12.

6. *МИШИН С.П. Модели и методы оптимизации иерархических организационных структур* // Диссертация на соискание степени к.ф.м.н., Волгоградский государственный университет, 2003.

7. *КУЗНЕЦОВ О.П., АДЕЛЬСОН-ВЕЛЬСКИЙ Г.М. Дискретная математика для инженера*. М.: Энергоатомиздат, 1988.

8. *КУЗЬМИН В.Б. Построение групповых решений в пространствах четких и нечетких бинарных отношений*. М.: Наука, 1982.

МОДЕЛИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ОБ ОБЪЕМАХ ЗАКУПОК ФИРМОЙ – ОПТОВЫМ ПОКУПАТЕЛЕМ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ОТПУСКНЫХ ЦЕН ПРОИЗВОДИТЕЛЯ И СПРОСА КОНЕЧНЫХ ПОКУПАТЕЛЕЙ

Заложнев А.Ю.
(*Институт проблем управления РАН, Москва*)

Центральное место в системе торговли занимает оптовая торговля. Оптовый покупатель (продавец) – хозяйствующий субъект, стоящий в торговой цепочке между производителем продукции и хозяйствующими субъектами или физическими лицами, приобретающими товар для его непосредственного использования или потребления. От ценовой политики оптового продавца существенным образом зависит объем продаж товара данного вида. Производитель также может проводить на рынке определенную ценовую политику, например, стимулируя спрос путем уменьшения отпускной цены. Эти соображения приводят участников рынка, за исключением, пожалуй, конечного потребителя, к необходимости построения умозрительных или формальных моделей оптовых закупок и продаж, связывающих их объем с изменением уровня закупочных или отпускных цен. В настоящей статье будут рассмотрены две модели принятия решений об объемах закупок и об уровне розничных цен фирмой – оптовым покупателем (дилером) в зависимости от изменения отпускных цен производителя и спроса конечных покупателей при различных объемах оптовых закупок.

Рассмотрим следующую модель.

I. Имеются три разнородных участника рынка:

а) производитель;

б) оптовый продавец (дилер);

в) покупатель (покупатели).

Дилер закупает товар (оборудование) непосредственно у производителя по отпускным ценам. Покупатель может закупать товар только у дилера. В этом смысле дилер фактически является эксклюзивным дистрибьютором.

II. Зависимость суммарного покупательского спроса V от дилерской продажной цены за единицу продукции q определяется функцией $V(q)$. Для данной модели будем считать ее линейной.

Выбор линейной зависимости объясняется просто. Допустим, что эксперт (менеджер дилерской фирмы) может с достаточной степенью точности определить:

а) ту цену (b_2) на товар, при которой его не будет покупать ни один покупатель;

б) то количество товара (V_0), которое может быть продано при минимальной цене на товар – минимальной оптовой отпускной цене производителя (b_1).

На основании этих данных может быть построена прямая зависимости спроса от цены $V(q)$ (рис. 1).

III. Известна зависимость $b(V)$ отгрузочных цен производителя от объема дилерских закупок V. Эта зависимость может быть задана в виде ступенчатой функции, убывающей по V. Максимальное значение цены $b(V) - b_0$ имеет место при закупке одной единицы продукции (оборудования) или минимально целесообразного с точки зрения издержек дилера количества расходных материалов или запасных частей, а минимальное – при минимальной отгрузочной цене производителя – b_1, определяемой объемом переменных издержек, затрачиваемых производителем на производство одного изделия.

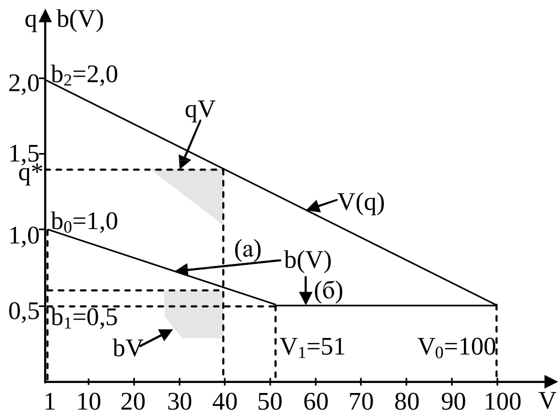

Рис. 1.

В рамках настоящей модели зависимость цены (b) от объема закупок V (вообще говоря, идет речь об объеме закупок в течение какого-то определенного временного периода, например, года) может быть аппроксимирована ломаной, состоящей из двух участков:

а) прямой, убывающей от точки с координатами ($V = 1$, $b = b_0$), соответствующей отгрузочной цене производителя при закупке одной единицы оборудования (минимально целесообразного с точки зрения постоянных издержек дилера количества продукции производителя), до точки с координатами ($V = V_1$, $b = b_1$), соответствующей объему закупок V_1, начиная с которого производитель продает товар дилеру по минимально возможной цене b_1.

б) прямой, параллельной оси V при $b = b_1$. Эта прямая соответствует любому объему продаж производителя дилеру, начиная с V_1 (если быть абсолютно точным, по оборудованию, начиная с $V_1 + 1$). Продажа производится по цене $b = b_1$.

На рис. 1 представлены зависимости $V(q)$ и $b(V)$ для следующих значений параметров: $V_1 = 51$, $V_0 = 100$, $b_0 = 1.0$, $b_1 = 0.5$, $b_2 = 2.0$.

Сформулируем задачу. Необходимо определить величину оптовых закупок у производителя, производимых дилером – V_{max}, исчисляемую в стоимостном или натуральном выражении, при которой обеспечивается максимизация прибыли дилера, рассчитываемой по формуле: $P = (q - b)\,V$, где q – цена, по которой продавец продает товар покупателю, b – отпускная цена производителя при объеме закупки V, V – объем оптовой закупки. Необходимо решить следующую оптимизационную задачу:

$$P = (q(V) - b(V))V \to \max_V \cdot$$

На основе вышеизложенного кривая $b(V)$ описывается следующими соотношениями:

$$(1)\quad b(V) = \begin{cases} (b_1 - b_0V_1)/(1 - V_1) + [(b_0 - b_1)/(1 - V_1)]V, \; 1 \le V \le V_1 & (a) \\ b_1, \; V > V_1 & (б) \end{cases}$$

Кривая $V(q)$ описывается соотношением

$$V(q) = \frac{V_0 b_2}{b_2 - b_1} + \left[\frac{V_0}{b_1 - b_2}\right]q \cdot$$

Разрешим это соотношение для q относительно V:

$$q = b_2 - [(b_2 - b_1)V_0]V.$$

Нам необходимо определить то значение V, при котором достигается максимум функции P по V: $P(V) = (q(V) - b(V))V \to \max_V$. Решим эту задачу сначала для случая, когда функция $b(V)$ имеет вид $b(V) = b_1$ (случай (б)). Получаем:

$$P(V) = \left(b_2 - \frac{b_2 - b_1}{V_0}V - b_1\right)V, \quad \frac{dP}{dV} = b_2 - b_1 - \frac{2(b_2 - b_1)}{V_0}V = 0,$$

откуда $V = V_0 / 2$. Поскольку $\left(\frac{dP}{dV}\right)'' = -2\frac{b_2 - b_1}{V_0} < 0$, т.к. $b_2 > b_1$ из смысла задачи, то в точке $V = V_0 / 2$ функция $P(V)$ имеет максимум.

Если $V_0 / 2 > V_1$, то точка максимума при $V = V_0 / 2$ является допустимой, если $V_0 / 2$ £ V_1, то нет.

Решим теперь задачу для случая, когда функция $b(V)$ имеет вид (*а*). При этом

$$P(V) = \left\{ b_2 - \frac{b_2 - b_1}{V_0} V - \frac{b_1 - b_0 V_1}{1 - V_1} + \frac{b_0 - b_1}{1 - V_1} V \right\} V$$

$$\frac{dP}{dV} = b_2 - 2\frac{b_2 - b_1}{V_0} V - \frac{b_1 - b_0 V_1}{1 - V_1} + 2\frac{b_0 - b_1}{1 - V_1} V,$$

откуда

$$V = V^* = \frac{V_0}{2} \times \frac{(b_2 - b_0)V_1 + b_1 - b_2}{(b_2 - b_1)(V_1 - 1) + V_0(b_0 - b_1)}, \quad \left(\frac{dP}{dV}\right)'' = 2\frac{b_0 - b_1}{1 - V_1} - 2\frac{b_2 - b_1}{V_0}.$$

Поскольку из смысла задачи $b_0 > b_1$, $b_2 > b_1$, $V_1 > 1$, то $(dP/dV)'' < 0$, и значение $V = V^*$ соответствует максимуму функции $P(V)$.

Если для V^* имеет место $V^* \le V_1$, то точка максимума при $V = V^*$ является допустимой. Если обе точки максимума – при $V = V_0 / 2$ и при $V = V^*$ являются допустимыми, то для решения задачи $P(V) \to \max\limits_{V}$ необходимо сравнить значения целевой функции $P(V)$ при $V = V_0 / 2$ и при $V = V^*$. То значение V, для которого $P(V)$ будет больше, и будет являться точкой максимума.

Таким образом, величина $V_{max} = \arg\max \{P(V_0/2), P(V^*)\}$ и будет являться той величиной дилерских закупок у производителя, которая обеспечит дилеру максимальную прибыль.

Сформулированную и решенную задачу назовем «моделью неинформированного покупателя».

Рассмотрим другую задачу, которую назовем «модель информированного покупателя». В дополнение к пункту первому из вышеприведенной модели, данная модель строится на следующих предположениях:

I. Покупателю (покупателям) известны:

1. Отпускные цены производителя b и их зависимость от объема оптовых закупок V.

2. Объем оптовых закупок продавца (дилера) V.

Покупателя, располагающего такой информацией, будем называть «информированным».

II. Предположим, что информированный покупатель считает для себя приемлемой цену $q = (1+k)b(V)$, которая на величину $k\,b(V)$ выше отпускной цены производителя $b(V)$ и включает в себя все постоянные и переменные издержки продавца (дилера). Спрос V со стороны покупателей на товар, продаваемый дилером по цене $q = (1 + k)\, b(V)$ равен спросу на товар, отпускаемый (продаваемый) производителем по цене $b(V)$. Понятно также, что покупатели не могут закупать товар непосредственно у производителя.

III. При значениях цены продавца q больших чем $(1 + k)\, b(V)$ при объеме оптовых закупок V спрос W на продукцию (оборудование) со стороны покупателей начинает убывать. Покупатели, например, могут переключить свой спрос на продукцию других производителей.

В рамках данной модели необходимо определить объем оптовых закупок V^* и продажную цену q^*, которые обеспечат дилеру максимум прибыли.

Эксперты-менеджеры фирмы-продавца (дилера) в принципе могут оценить величину $m = q\,/\,b(V)$, которая соответствует тому значению цены q, при котором спрос W на продукцию (оборудование), закупаемую в количестве V по цене $b(V)$ и продаваемую дилером по цене q будет равен нулю (см. рис.2).

Поскольку при значении цены $q = (1 + k)\, b(V)$ спрос W со стороны покупателей на продукцию, закупаемую дилером в объеме V, равен V, а при цене $q = m\, b(V)$ равен нулю, то мы можем определить коэффициенты линейной зависимости $W(q)$, в качестве параметров которой выступают величины V и $b(V)$.

Определим коэффициенты a и c прямой $W = a\,q + c$, проходящей через две точки на координатной плоскости (q, W) с координатами $(m\, b(V), 0)$ и $((1+k)\, b(V), V)$. Получаем:

$$a = \frac{V}{b(V)(1+k-m)};\quad c = \frac{Vm}{m-1-k},$$

откуда $W = \left\{\dfrac{mb(V)-q}{b(V)(m-1-k)}\right\}V$.

На рисунке 2 представлены зависимости $b(V)$, $(1 + k)\, b(V)$, $W(q)$ для следующих значений коэффициентов: $V_1 = 51$, $V_0 = 100$, $b_0 = 1.0$, $b_1 = 0.5$, $k = 0.5$, $m = 3.0$.

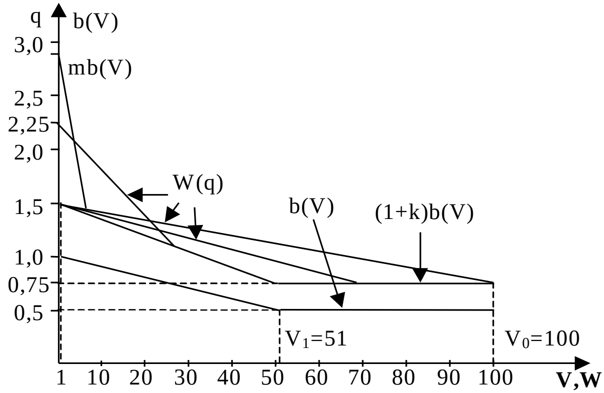

Рис. 2.

На основе вышесказанного в качестве критерия будем использовать максимум прибыли, задаваемый соотношением:

(2) $P(q,V) = qW(q,V) - b(V)V \to \max\limits_{q,V}$.

Сначала при фиксированном V ($V = V_*$) и, соответственно, $b(V)$ нужно рассмотреть критерий вида (см. рис. 3):

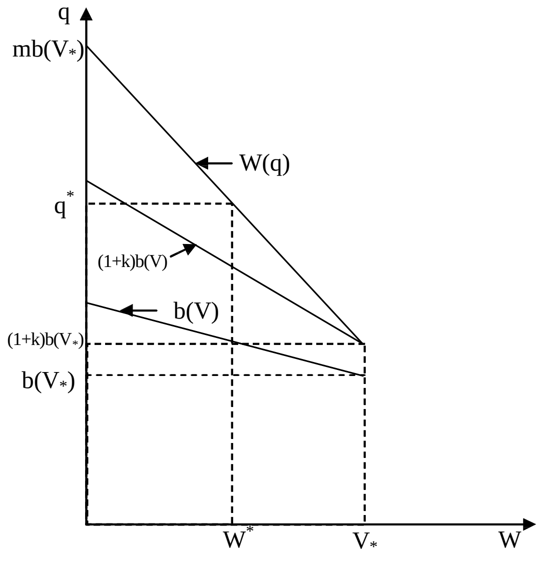

Рис. 3.

(3) $P(q,V) = qW(q,W) \to \max\limits_{q}$.

Имеем

(4) $P(q,W) = qW = q\left\{\dfrac{mb(V) - q}{b(V)(m-1-k)}\right\}V$,

$$\frac{dP}{dq} = \frac{mb(V) - 2q}{b(V)(m-1-k)} = 0,$$

откуда

(5) $q^{*} = m\, b(V) / 2$.

Определим знак второй производной: $\left(\dfrac{dP}{dq}\right)'' = -2\dfrac{V}{b(V)(m-1-k)}$. Поскольку по смыслу задачи $m - k - 1 > 0$, то $\left(\dfrac{dP}{dq}\right)'' < 0$ и в точке $q = q^*$ достигается максимум функции $P(q,W)$.

Подставляем выражение для q^{*} из (5) в (4) и получаем выражение для W (W^{*}), соответствующее максимуму функции $P(q, W)$:

$$W^{*} = W(q^{*}) = \frac{mV}{2(m-1-k)};$$

Рассмотрим теперь критерий (2). Подставляем в него найденное значение $q = q^{*}$ и получаем:

$$P(V) = \frac{mb(V)}{2} \times \frac{mV}{2(m-1-k)} - b(V)V = \left[\frac{m^{2}}{4(m-1-k)} - 1\right]b(V)V \to \max_{V}$$

Функция $b(V)$ как и ранее задается соотношениями (1):

$$b(V) = \begin{cases} \dfrac{b_1 - b_0 V_1}{1 - V_1} + \dfrac{b_0 - b_1}{1 - V_1}V,\ 1 \le V \le V_1 & (a) \\ b_1,\ V > V_1 & (б) \end{cases}$$

Рассмотрим сначала случай (*б*).

В этом случае функция $P(V)$ является линейной по V и имеет следующий вид: $P(V) = \left[\dfrac{m^{2}}{4(m-1-k)} - 1\right]b_1 V$.

Максимум $P(V)$ достигается при максимально возможном значении V, в нашем случае при $V = V_0$: $P(V_0) = \left[\dfrac{m^{2}}{4(m-1-k)} - 1\right]b_1 V_0$.

Рассмотрим теперь случай (a).

$$P(V)=\left[\frac{m^2}{4(m-1-k)}-1\right]\left\{\frac{b_1-b_0V_1}{1-V_1}+\frac{b_0-b_1}{1-V_1}V\right\}V$$

$$\frac{dP}{dV}=\left[\frac{m^2}{4(m-1-k)}-1\right]\left\{\frac{b_1-b_0V_1}{1-V_1}+2\frac{b_0-b_1}{1-V_1}V\right\}=0,$$

откуда $V^*=\dfrac{b_0V_1-b_1}{2(b_0-b_1)}$.

Для выяснения достигается ли в точке $V = V^*$ максимум или минимум функции $P(V)$, необходимо определить знак второй производной $P(V)$ по V в точке $V = V^*$: $\left(\dfrac{dP}{dV}\right)''=2\left[\dfrac{m^2}{4(m-1-k)}-1\right]\dfrac{b_0-b_1}{1-V_1}=0$.

Поскольку $b_0 > b_1$ и $V_1 > 1$ по смыслу задачи, то сомножитель $\dfrac{b_0-b_1}{1-V_1}<0$, и для выяснения знака второй производной необходимо определить знак сомножителя $\dfrac{m^2}{4(m-1-k)}-1$, если он строго больше нуля, то в точке $V = V^*$ достигается максимум функции $P(V)$. Следует отметить, что для приведенных выше значений $m = 3.0$ и $k = 0.5$ этот сомножитель является положительным.

Допустим, что в точке $V = V^*$ достигается максимум функции $P(V)$, тогда для решения задачи («информированный покупатель») необходимо сравнить значения критерия $P(V)$ при $V = V_0$ и $V = V^*$: $P(V_0)$ и $P(V^*)$. То значение V, при котором критерий P будет иметь большее значение, и будет являться решением задачи.

Величина q^*, определяемая соотношением (4), и величина $V_{max} = \arg max\{P(V_0), P(V^*)\}$ являются, соответственно, тем значением продажной цены дилера и объема дилерских закупок, которые максимизируют прибыль дилера и являются, соответственно, решением задачи, которая выше была обозначена как «модель информированного покупателя».

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО КОЛИЧЕСТВА СОТРУДНИКОВ СЕРВИСНОГО ЦЕНТРА

Заложнев А.Ю.
(*Институт проблем управления РАН, Москва*)

Рассмотрим процесс функционирования сервисного центра коммерческой фирмы, занимающейся продажей технологического оборудования, в той части, которая касается разовых заявок на обслуживание этого оборудования. Допустим, что заявки на сервисное обслуживание поступают через случайные промежутки времени. Среднее значение интервала времени между поступлениями отдельных заявок составляет $1/l$, а средняя интенсивность потока в единицу времени, соответственно, l.

Допустим, что входящий поток заявок на обслуживание удовлетворяет требованиям стационарности, независимости от предыстории процесса (отсутствие последействия) и ординарности потока (вероятность того, что в интервале времени dt поступит более одной заявки, есть величина бесконечно малая по сравнению с dt). Такой поток называется простейшим, а интервал времени между событиями – приходами последовательных заявок на обслуживание является случайной величиной, распределенной по показательному закону (см., например, [1], стр. 266-269), с плотностью распределения $p(t) = l\ \mathrm{e}^{-lt}$, $t \geq 0$, которое характеризует количество заявок на обслуживание, поступающих в сервисный центр в единицу времени.

Продолжим содержательное описание задачи. В сервисном центре работает некоторое количество специалистов, занимающихся обслуживанием оборудования. Работа каждого из этих сотрудников по обслуживанию разовых заявок может быть охарактеризована средним временем обслуживания $1/m$. При этом интенсивность обслуживания (среднее количество заявок, обслуживаемых в единицу времени) равна m.

Будем исходить из того, что время обслуживания заявки специалистом также является случайной величиной и имеет показательное распределение с плотностью $p(t) = m\ \mathrm{e}^{-mt}$, $t \geq 0$.

Предположим, что число работающих в сервисном центре специалистов равно n. Если в момент поступления заявки на обслуживание оборудования все специалисты уже заняты обслуживанием других, пришедших ранее заявок, то эта заявка ставится в очередь. Длина очереди не ограничена.

Такая система называется n-канальной системой массового обслуживания (СМО) с ожиданием (см., например, [2], стр. 262-263).

Для такой СМО известно [там же], что если выполняется соотношение $c = \frac{l}{mn} < 1$, то существует стационарный режим ее функционирования с конечной длиной очереди на обслуживание. Если имеет место $c \geq 1$, то очередь будет неограниченно возрастать ([2], стр. 262-263).

Таким образом, сразу можно утверждать, что число специалистов сервисного центра n должно быть больше чем l/m.

Возвращаясь к содержательной постановке следует отметить, что время реакции на заявку не должно превышать $t_{\text{реакц}}$, в противном случае фирма уплачивает заказчику штраф в размере s за каждую единицу времени, которая прошла после истечения $t_{\text{реакц}}$ до времени начала обслуживания заявки специалистами сервисного центра.

Для такой СМО, для известных l и m и заданного n можно определить среднее время нахождения заявки в очереди ([2], стр. 262-263; [4], стр. 444-445): $t_{\text{ож}} = \frac{r^n p_0}{nmn!(1-c)^2}$, где $r = l / m$, $c = r / n$,

$$p_0 = \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{1!} + \frac{r^2}{2!} + \mathbf{L} + \frac{r^n}{n!} + \frac{r^{n+1}}{n!(n-r)}\right)}.$$

Таким образом, в случае, если $t_{\text{ож}} > t_{\text{реакц}}$, за каждую единицу времени фирма в среднем уплачивает штраф в размере $l\ (t_{\text{ож}} - t_{\text{реакц}})s$, где, как уже отмечалось выше, l – среднее количество заявок на обслуживание, поступающих в единицу времени.

Средняя заработная плата каждого специалиста сервисного центра составляет z денежных единиц в единицу времени. Поскольку число специалистов составляет n человек, то общая сумма зарплаты, выплачиваемой фирмой специалистам сервисного центра в единицу времени составляет $n\,z$.

Сформулируем задачу нахождения оптимального количества специалистов сервисного центра n^*, которое минимизирует суммарные издержки фирмы в виде штрафов за опоздание с началом обслуживания заявок и заработной платы сотрудников сервисного центра: $n^* = \arg min\ F(n)$, $F(n) = l\ (t_{\text{ож}}(n) - t_{\text{реакц}})s + n\,z$, где $n \in M \subset N$, $n_1 < n < n_2$ и $t_{\text{реакц}} = \text{const}$; n_1 и n_2 – соответственно нижняя и верхняя границы множества M:

(1) n_1: $\max n \in N$: $c = \dfrac{l}{mn} \geq 1$,

(2) n_2: $\min n \in N$: $t_{ож}(n) < t_{реакц}$; $n_1, n_2 \notin M$.

Содержательно: n_1 – максимальное из всех $n \in N$, при которых очередь на обслуживание неограниченно возрастает; n_2 – минимальное из всех $n \in N$, при которых время ожидания заявки меньше чем установленное время реакции.

Сформулированную задачу будем решать методом перебора по $n \in M$ при заданных значениях l, m, s и z. Значение n_1 определим из неравенства, фигурирующего в (1). Значение n_2 определим путем последовательного увеличения n от $n_1 + 1$ до того значения, при котором впервые выполнится неравенство, фигурирующее в (2), это и будет n_2.

Будем решать задачу для значений параметров $l = 5$, $m = 1$, $z = 1$ и значений параметра s последовательно равных $4\,z$, $1\,z$, $0.25\,z$. При этом $r = l\,/\,m = 5$, и на основании неравенства из (1) и условия $n_1 \in N$ также имеет место $n_1 = 5$, откуда следует $n \geq 6$. В качестве единицы измерения времени при расчете величины $F(n)$ примем 1 месяц. Величина $t_{реакц} = 4$ (часам) ≈ 0.0056 (месяца при 30 днях в месяце), что соответствует реальному времени реакции при обслуживании заявок на ремонт технологического оборудования.

Решение задачи приведено в таблицах 1 и 2. Из таблицы 1 видно, что $t_{ож}\,(n{=}11) = 1.8$(часа) $< t_{реакц} = 4$(часа), откуда следует, что $n_2 = 11$ и $M = \{6,7,8,9,10\}$. Из таблицы 2 видно, что для приведенных значений l, m, z и, соответственно, значений s равных 4, 1, 0.25 получаем значения n^* соответственно равные 8, 7 и 6. Это и будут оптимальные значения количества специалистов при вышеприведенных значениях параметров.

Таблица 1

n	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
p_0	0.0045	0.0060	0.0065	0.0066	0.0067	0.0067
$t_{ож}$ (в месяцах)	0.5859	0.1628	0.0560	0.0200	0.0072	0.0025
$t_{ож}$ (в сутках)	17.577	4.884	1.68	0.6	0.216	0.075
$t_{ож}$ (в часах)	421.848	117.216	40.32	14.4	5.184	1.8

Таблица 2

n		**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	
***s*=4**	*F*(*n*)	17.606	10.144	**9.008**	9.288	10.032	$\boldsymbol{n^*=8}$
***s*=1**	*F*(*n*)	8.902	**7.786**	8.252	9.072	10.008	$\boldsymbol{n^*=7}$
***s*=0.25**	*F*(*n*)	**6.725**	7.197	8.063	9.018	10.002	$\boldsymbol{n^*=6}$

Решение задачи может быть проиллюстрировано рисунком 1. По оси абсцисс отложена величина n, а по оси ординат, соответственно, $t_{\text{ож}}(n)$, заданное в целях большей наглядности в днях, величина суммарной месячной зарплаты nz и величина $F(n)$, полученная при $s = 4z = 4$. Также в целях наглядности, хотя задача решалась только для целых n, соседние в смысле значений ординаты точки (например, $t_{\text{ож}}(n)$ и $t_{\text{ож}}(n+1)$) соединены отрезками прямых.

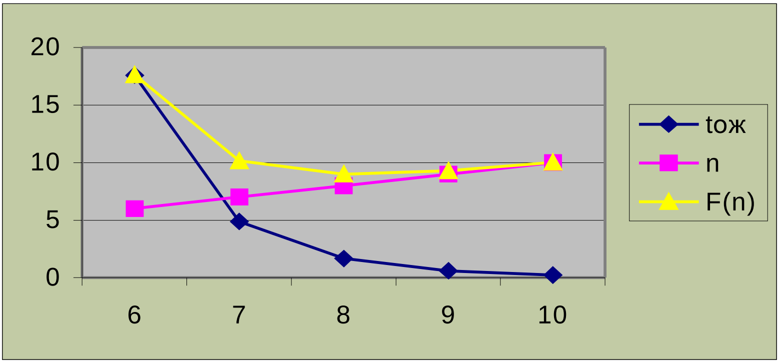

Рис. 1.

На основе полученных результатов можно сделать следующий практический вывод. В случае, если величина штрафа s за опоздание с началом обслуживания относительно мала по сравнению со средней зарплатой специалиста s (например, для нашей задачи случай $s = 0.25$) за тот же период времени, и известны средняя интенсивность потока заявок (l) и средняя производительность труда специалиста по их обслуживанию (μ), нет смысла проводить достаточно громоздкие расчеты по определению n^*, а в качестве оптимальной величины количества специалистов можно принять величину n_1+1. т.е. в таком случае оптимальным будет минимальное количество специалистов, при котором уже обеспечивается ограниченность очереди на обслуживание. Для рассматриваемой задачи $n^*(s = 0.25) = n_1 + 1 = 6$.

Литература

1. ЗАЙЧЕНКО Ю.П. *Исследование операций*. Киев: Издательское объединение «Вища школа», 1975. – 320 с.

2. ВЕНТЦЕЛЬ Е.С. *Исследование операций*. М.: Советское радио, 1972. – 552 с.

3. ВЕНТЦЕЛЬ Е.С., ОВЧАРОВ Л.А. *Прикладные задачи теории вероятностей*. М.: Радио и связь, 1983. – 416 с.

4. ФОМИН Г.П. *Математические методы и модели в коммерческой деятельности*. Учебник. М.: Финансы и статистика, 2001. – 544 с.

ОБЩИЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ МЕХАНИЗМОВ ОТКРЫТОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОБМЕННЫХ СХЕМ

Коргин Н.А.
(*Институт проблем управления РАН, Москва*)
kolya@edunet.ru

Введение

В данной публикации рассматривается общий метод построения прямых неманипулируемых механизмов планирования, в литературе именуемых механизмами открытого управления (ОУ) [4], для обменных схем (ОС). Проводится анализ условий совершенного согласования (УСС) [4], на основании которых определяются выражения для построения механизмов ОУ. Фактически, в данной публикации частный подход, рассмотренный в [5], распространяется на более общий случай. Рассмотренные ранее задачи обмена [1-3] вписываются в полученные общие результаты, что наглядно иллюстрируется на примере одной из них [2].

1. Постановка задачи

1.1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим систему из n+1 элементов и m видов ресурсов. Множество всех элементов обозначим $I = \{0,\ldots,n\}$. Множество всех ресурсов обозначим $J = \{1,\ldots,m\}$. Набор всех имеющихся у i-го элемента ресурсов обозначим $\overline{y_i} = (y_1^i,\ldots,y_m^i)$. Здесь y_j^i обозначает наличие у i-ого элемента ресурса типа j. Соответственно распределение ресурсов по всем элементам можно записать в виде матрицы: $y = \begin{pmatrix} \overline{y_0} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix}$.

Предпочтения каждого элемента опишем функцией его предпочтений: $\varphi_i(\overline{y_i}, r_i): R^{m+1} \to R, r_i \in \Omega_i,\ i = 0,\ldots,n$. Параметр r_i – тип элемента, характеризует некоторым образом его функцию предпочтения. Начальное распределение ресурса между элементами системы считается заданным и обозначается y^0.

Элементы обладают возможностью взаимодействовать между собой путем взаимного обмена ресурсами и информацией о различных параметрах всей системы.

Определение 1. Обмен – перераспределение ресурсов из множества J между элементами из множества I: $y^0 \to y$.

Определение 2. Трансферт – передача ресурса типа j для элемента i в процессе обмена $y^0 \to y$.

Соответственно можно определить $\overline{x_i} = (x_1^i, \ldots, x_m^i)$ – вектор трансфертов всех ресурсов у элемента i; матрица трансфертов в ОС $x = \begin{pmatrix} \overline{x_0} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix}$.

Определение 3. Функция полезности элемента i от обмена:

$$f_i(\overline{x_i}, r_i) = j_i(\overline{x_i} + \overline{y_i^o}, r_i) - j_i(\overline{y_i^o}, r_i).$$

Строго, функция полезности зависит также и от аргумента $\overline{y_i^o}$, но, учитывая, что в модели мы рассматриваем единственное начальное распределение ресурсов, аргумент $\overline{y_i^o}$ опускается.

1.2. ВОЗМОЖНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ

Большинство ограничений, которые можно наложить на данную модель будут играть роль для получения конечного решения рассматриваемой нами задачи. В данной работе приводятся лишь ограничения, необходимые для построения обобщенного решения.

Прежде всего, это – ограничения на вид функции полезности АЭ. Нам необходима непрерывность функции полезности, существование и непрерывность ее частных производных вплоть до второго порядка по всем переменным. Кроме того частная производная функции полезности по типу АЭ должна быть монотонна, например

(F1) $\dfrac{\partial f_i}{\partial r_i}(\overline{x_i}, r_i) \geq 0, i = 1 \ldots n, r_i \in \Omega_i.$

Кроме того, решение поставленной задачи сильно упрощается, если мы используем условия Спенса-Мирлиса – постоянство знака смешанной производной $\partial^2 f_i / \partial x_j^i \partial r_i$ [5], например такое: $\forall i, \exists l(i),$ такое, что

(F2a) $\forall j, \forall r_i \in \Omega_i, \forall x_j^i, \quad \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_l^i \partial r_i}(\overline{x_i}, r_i) > 0,$

(F2b) $\forall i, \forall j \neq l(i), \forall r_i \in \Omega_i, \forall x_j^i, \quad \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_l^i \partial r_i}(\overline{x_i}, r_i) \geq 0.$

Также, необходимо записать условия индивидуальной рациональности (ИР) для всех элементов – прибыль любого АЭ (значение функции полезности) должна быть неотрицательна.

1.3. ИНФОРМИРОВАННОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ

Элементы системы информированы ассиметрично – центр знает все параметры системы, кроме значений типов АЭ – ему известны лишь множества возможных значений Ω_i и, быть может, вероятностное распределение типа на множестве возможных значений.

В общем случае для построения механизма ОУ информированность АЭ не имеет значения, но, без потери общности, предположим, что АЭ полностью информированы о параметрах системы.

1.4. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача управляющего органа – центра (Ц) – построить механизм обмена $p(\bar{s})$, оптимальный по критерию K: $K(p(\bar{s}),\bar{s}) \to \max$, где $\bar{s} = (s_1,\ldots,s_n)$ – вектор заявок АЭ. Т.к механизм прямой, т.е АЭ сообщают центру оценки своих типов, то $s_i \in \Omega_i, i = 1\ldots n$.

Порядок функционирования стандартен для механизмов планирования:

1. Центр объявляет механизм обмена $p(\bar{s})$;
2. АЭ сообщают центру свои заявки $\bar{s}* = (s_1*,\ldots,s_n*)$;
3. Центр назначает обмен $x = p(\bar{s}*)$.

Механизм ищется в классе прямых неманипулируемых механизмов (механизмов ОУ) – т.е. механизмов, для которых доминантной стратегией каждого АЭ будет сообщение истинной заявки – $\bar{s}* = (r_1,\ldots,r_n)$.

2. Решение

Прямой неманипулируемый механизм должен отвечать условию совершенного согласования (УСС) [4]:

$$(\text{УСС})\ \begin{cases} K(x,\bar{s}) \to \max\limits_{x} \\ f_i(\overline{x_i}, s_i) = \max\limits_{\bar{z} \in X_i(s_{-i})} f_i(\bar{z}, s_i) \end{cases},$$

где $X_i(s_{-i})$ – множество возможных трансфертов для i-го АЭ при фиксированном векторе s_{-i} сообщений остальных АЭ. Первое выражение в этом условии отражает оптимальность механизма для центра, остальные – доминантность сообщения истинных заявок для АЭ.

Введем функцию зависимости прибыли i-го АЭ от значения собственного параметра r_i, своей заявки s_i, и заявки остальных участников обменной схемы s_{-i}: $V_i(r_i, s_i, s_{-i}) = f_i(\overline{x_i}(s_i, s_{-i}), r_i)$.

УСС для АЭ можно проинтерпретировать следующим образом:

$$\textbf{(1)}\ \forall r_i \in \Omega_i, \forall s_{-i} \in \Omega_{-i},\ \begin{cases} \dfrac{\partial V_i}{\partial s_i}(r_i, r_i, s_{-i}) = 0 \\ \dfrac{\partial^2 V_i}{\partial s_i^{\,2}}(r_i, r_i, s_{-i}) \le 0 \end{cases}$$

Из первого условия (1a) очевидным образом следует, что

$$\textbf{(2)}\ \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j^i}(\overline{x_i}(r_i, s_{-i}), r_i)\frac{dx_j^i}{dr_i}(r_i, s_{-i}) = 0.$$

Лемма 1. Условие (1b) $\forall k_i \in K_i, \forall s_{-i} \in K_{-i}$ эквивалентно неравенству

$$(3)\ \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j^i \partial r_i}(\overline{x_i}(r_i, s_{-i}), r_i)\frac{dx_j^i}{ds_i}(r_i, s_{-i}) \ge 0.$$

Доказательство. В развернутом виде, условие (1b) записывается следующим образом:

$$(4)\ \sum_{j=1}^{m}[\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j^i \partial x_l^i}(\overline{x_i}(r_i, s_{-i}), r_i)\frac{dx_j^i}{ds_i}(r_i, s_{-i})\frac{dx_l^i}{ds_i}(r_i, s_{-i}) +$$

$$+\frac{\partial f_i}{\partial x_j^i}(\overline{x_i}(r_i, s_{-i}), r_i)\frac{d^2 x_j^i}{ds_i^{\,2}}(r_i, s_{-i})] \le 0.$$

Продифференцировав выражение (2) по r_i, получаем:

$$(5)\ \sum_{j=1}^{m}[\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j^i \partial x_l^i}(\overline{x_i}(r_i, s_{-i}), r_i)\frac{dx_j^i}{ds_i}(k_i, s_{-i})\frac{dx_l^i}{dr_i}(r_i, s_{-i}) +$$

$$+\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j^i \partial r_i}(\overline{x_i}(r_i, s_{-i}), r_i)\frac{dx_j^i}{ds_i}(r_i, s_{-i}) + \frac{\partial f_i}{\partial x_j^i}(\overline{x_i}(r_i, s_{-i}), r_i)\frac{d^2 x_j^i}{ds_i dr_i}(r_i, s_{-i})] = 0\cdot$$

Очевидно, что $\frac{dx_j^i}{ds_i}(r_i, s_{-i}) = \frac{dx_j^i}{dr_i}(r_i, s_{-i})$.

Вычитая (4) из (5), получим выражение (3). •

Рассмотрим следующее выражение:

$$\frac{\partial V_i}{\partial s_i}(r_i, s_i, s_{-i}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j^i}(\overline{x_i}(s_i, s_{-i}), r_i)\frac{dx_j^i}{ds_i}(s_i, s_{-i}).$$

Учитывая (1), можно записать

$$\frac{\partial V_i}{\partial s_i}(r_i, s_i, s_{-i}) = \sum_{j=1}^{m}\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j^i}(\overline{x_i}(s_i, s_{-i}), r_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j^i}(\overline{x_i}(s_i, s_{-i}), s_i)\right]\frac{dx_j^i}{ds_i}(s_i, s_{-i}).$$

Знак левой части данного выражения определяется

$$(6)\ (r_i - r_i^*)\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j^i \partial k_i}(\overline{x_i}(r_i^*, s_{-i}), r_i^*)\frac{dx_j^i}{ds_i}(s_i, s_{-i}),$$

где r_i^* лежит между r_i и s_i.

Теорема 1. Следующие условия:

1. Выполнены (F2a) и (F2b).
2. Все компоненты планов, назначаемых Ц каждому АЭ, изменяются монотонно в зависимости от заявки данного АЭ, например:

$$\forall i, \forall j, \forall s_i \in \Omega_i, \forall s_{-i} \in \Omega_{-i}, \forall x_j^i,\ \ \frac{dx_j^i}{ds_i}(s_i, s_{-i}) \geq 0,$$

достаточны для существования глобального максимума каждого $V_i(r_i, s_i, s_{-i})$ в $s_i^* = r_i$.

Доказательство. Анализируя (6), можно увидеть, что при выполненных условиях данной леммы функция $V_i(r_i, s_i, s_{-i})$ не убывает при $r_i < s_i$, и не возрастает при $r_i > s_i$. •

Необходимо заметить, что, если в условиях (F2a) и (F2b) взять произвольные знаки неравенств, то смысл теоремы 1 не изменится. Изменятся лишь знаки неравенств для соответствующих $dx_j^i / ds_i(s_i, s_{-i})$.

Очень важный прием, который используется в иностранной литературе [5], заключается в том, что центр может не принимать в рассмотрение типы агентов, которые его не устраивают.

Если предложенный Ц механизм, удовлетворяет условиям (2) и (3), то функцию полезности каждого АЭ можно записать следующим образом:

$$n_i(r_i, s_{-i}) = V_i(r_i, r_i, s_{-i}) .$$

Очевидно, что, с учетом (2):

$$(7)\ \frac{dn_i}{dr_i}(r_i, s_{-i}) = \frac{\partial f_i}{\partial r_i}(\overline{x_i}(r_i, s_{-i}), r_i) .$$

В соответствии (F1) выражение (7) положительно. В литературе функция $n_i(r_i, s_{-i})$ называется «информационной рентой» АЭ [5]. Из (7) видно, что данная рента является возрастающей функцией от типа АЭ. Т.е., чем лучше тип АЭ, тем большую прибыль он получает от неполной информированности Ц о своем типе.

Так как в нашей модели условия индивидуальной рациональности (ИР) не зависят от типа АЭ, можно нормализовать минимальную прибыль для каждого АЭ 0, и записать ИР следующим образом:

$$(8)\ \forall i, \forall r_i \in \Omega_i, \forall s_{-i} \in \Omega_{-i},\ \ n_i(r_i, s_{-i}) \geq 0 .$$

Механизм ОУ следует создавать таким образом, что бы прибыль любого АЭ, в случае, если его тип окажется наихудшим из возможных для него, была минимальна, т.е. не нарушала требования ИР:

$$\forall i, \forall s_{-i} \in \Omega_{-i},\ \ n_i(\underline{r}_i, s_{-i}) = 0 .$$

Следовательно, с учетом (7):

$$(9)\ n_i(r_i, s_{-i}) = \int_{\underline{r}_i}^{\overline{r}_i} \frac{\partial f_i}{\partial r_i}(\overline{x_i}(t, s_{-i}), t)dt .$$

Выражение (9) вместе с теоремой 1 являются основными результатами данной публикации. Они позволяют определить семейство механизмов, в которых доминантой стратегией АЭ является сообщение истинных заявок. Данные результаты получены из анализа УСС для АЭ. УСС для центра позволяет выбрать из полученного семейства механизмов оптимальный по заданному критерию. Конечное решение для каждой задачи будет зависеть от вида критерия оптимальности, вида функций предпочтений элементов и начального распределения ресурсов между элементами, ограничений на ресурсы в системе, ограничений на взаимодействия между элементами и т.д.

3. Пример

Рассмотрим система, состоящую из центра и активного элемента. Центр обладает всем ресурсом типа 1 – деньги, АЭ обладает всем ресурсом типа 2 – рабочие часы. Возможности обоих элементов по потреблению каждого ресурса неограниченны.

Функция полезности АЭ имеет вид $f = x_1 - \frac{x_2^{\;2}}{2r}$. Центр знает диапазон возможных значений типа АЭ $r \in \Omega = [\underline{r}, \bar{r}]$ и плотность распределения $r = \frac{1}{\bar{r} - \underline{r}}$ [2]. Критерий эффективности механизма записывается следующим образом:

(10) $\mathbf{E}\,(x_2 - x_1) \to \max$ **.**

Используя (9), получаем, что

(11) $x_1(r) = \frac{x_2^{\;2}(r)}{2r} - \int_{\underline{r}}^{\bar{r}} \frac{x_2^{\;2}(t)}{2t^{\;2}} dt$.

Подставляя (11) в (10), получаем $p(r) = \{\frac{4r^3 - \underline{r}^3}{\underline{r}^2}, \frac{r^2}{\bar{r}}\}$. Данный механизм полностью соответствует полученному в [2].

Литература

1. КОРГИН Н.А. *Механизмы открытого управления в обменных схемах*. / Управление социально-экономическими системами. Сборник трудов молодых ученых ИПУ РАН. Общая редакция – Новиков Д.А. М.: Фонд «Проблемы управления», 2000. С. 54 – 58.
2. КОРГИН Н.А. *Задачи стимулирования и обменные схемы* // Автоматика и телемеханика. №10. 2001. С. 147 – 153.
3. КОРГИН Н.А. *Механизмы открытого управления в многоэлементных обменных схемах с одним активным элементом на каждом уровне* / «Сократовские чтения – 2002». Материалы пятой ежегодной научной конференции. М.: Международный университет, 2002. С. 51.
4.НОВИКОВ Д.А., ПЕТРАКОВ С.Н. *Курс теории активных систем*. М.: Синтег, 1999. – 108 с.
5. SALANIE B. *The Economics of Contracts*. MTI, 1997. PP. 11 – 105.

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОЙ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

Мишин С.П.
(*Волгоградский государственный университет*)
smishin@newmail.ru

Введение

Под системой в самом общем смысле слова обычно понимают совокупность некоторых элементов и связей между ними. Понятие организационной системы включает в себя также “поведение” отдельных элементов и подсистем, которое связано с целенаправленностью. Обычно целенаправленность определяется как оптимизация некоторого функционала [11]. Организационные системы характерны для самых различных сфер человеческой деятельности: экономической, социальной, военной и т.п., что и обусловливает актуальность их изучения. Несмотря на большое количество работ (см. [17] и др.) по проблемам математического моделирования структур организационных систем, в настоящее время не только не создана общая их теория, но отсутствует даже общепринятое определение см., например [10, 14], не сводящееся к перечислению различных примеров, а имеющиеся модели касаются отдельных аспектов функционирования конкретных систем.

Важнейшим свойством организационных систем является иерархичность структуры, то есть определенная соподчиненность элементов и подсистем [19]. В то же время пока не создано единого методологического подхода к исследованию организационных систем как многоуровневых систем с иерархической структурой [14, 17]. Причем наименее разработанной является проблема синтеза иерархической структуры: поиск структуры общего вида, оптимальной в смысле некоторого критерия. В подавляющем большинстве существующих моделей [10, 18, 19] рассматриваются только древовидные структуры, а ограничения, критерий оптимальности и методы исследования определяются спецификой конкретной задачи. Очевидно, что в общем случае критерий оптимальности может быть произвольным, возможно множественное подчинение, наличие нескольких элементов верхнего уровня.

В работе [15] исследуется абстрактное множество иерархических структур общего вида (ориентированных ациклических графов) с произвольным критерием оптимальности (функционалом). При определенных ограничениях методы решения этой задачи описаны в [5, 6, 7, 8]. Поставленную задачу можно назвать задачей статической оптимизации. Однако, поскольку оптимальная структура неявным образом зависит от “внешних условий”, актуальной является и задача “динамической оптимизации”, то есть поиск оптимальной иерархической структуры на заданном временном интервале с учетом изменений “внешней среды”. В этом случае кроме эффективности структуры необходимо учитывать и “гибкость” ее перестроения при изменениях среды. Эта задача является ключевой в некоторых моделях “устойчивого развития” [4]. Динамическая оптимизация напрямую связана и с проблемой выбора оптимального числа уровней иерархии в зависимости от внешних условий, которая обсуждается в большинстве работ, например [20], лишь на качественном уровне.

В данной работе рассматривается формальная математическая модель количественного анализа оптимального баланса “статической” и “динамической” эффективности структуры организационной системы. При этом оптимизация структуры рассматривается отдельно от остальных свойств системы (например, законов ее функционирования). То есть структура изучается “сама по себе”, что и обусловливает название работы.

1. Определение иерархической структуры

Определение 1. Множество элементов назовем конечное множество $N = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Группой элементов назовем любое непустое подмножество N. Множество групп обозначим через $F = 2^N \setminus \{\varnothing\}$. Мощностью группы $g \in F$ назовем количество содержащихся в ней элементов $|g|$. Элементарной группой назовем группу единичной мощности.

Для организационной системы множество элементов соответствует множеству конечных исполнителей, выполняющих некоторые технологические операции, необходимые для выполнения системой своих функций (выпуск изделий, оказание услуг и т.п.). Основная задача структуры системы – организация взаимодействия элементов в некоторых группах, каждая из которых реализует некоторую функцию системы. Формально определим структуру следующим образом.

Определение 2. Ориентированный ациклический граф $G = (V, E)$ назовем графом организации (организацией) над множеством элементов N, если выполнены следующие условия:

a) в вершинах графа находятся группы элементов, то есть для любой вершины $g \in V$ выполнено $g \in F$;

b) для любой группы $g \in V \setminus N_G$ выполнено $g = \bigcup_{h \in Q_G(g)} h$, где через $Q_G(g) = \{h : h \in V, (h, g) \in E\}$ обозначено множество вершин графа G, из которых идут ребра в g, а через $N_G = \{g \in V : Q_G(g) = \varnothing\}$ обозначено множество начальных вершин G.

c) Любая группа $g \in N_G$ элементарна.

Будем говорить, что группа $g \in V \setminus N_G$ организуется из подгрупп множества $Q_G(g)$. Группы $g \in V$, из которых не выходит ребер, назовем терминальными. Множество терминальных групп обозначим через T_G.

Таким образом, в графе организации каждая неначальная группа $g \in V \setminus N_G$ организуется из непосредственно подчиненных ей подгрупп (то есть g равна объединению подгрупп из $Q_G(g)$). Начальные ("нижние") вершины графа, в которые не входит ребер, являются элементарными группами.

Определение 3. Функционалом стоимости организации $G = (V, E)$ назовем величину $P(G) = \sum_{g \in V \setminus N_G} P(g_1, \mathbf{K}, g_k)$ (*), где $Q_G(g) = \{g_1, \mathbf{K}, g_k\}$, $P(g_1, \mathbf{K}, g_k) \geq 0$ – величина, зависящая от набора групп $g_1, \mathbf{K}, g_k$, а не от графа G, и не изменяющаяся при перестановке групп набора $g_1, \mathbf{K}, g_k$.

Таким образом, стоимость G складывается из суммы стоимостей организации всех неначальных групп $g \in V \setminus N_G$ – неотрицательных величин, зависящих от набора подгрупп, из которых организуется g.

Определение 4. Множество организаций, в которые входят заданные неэлементарные группы $f_1, \mathbf{K}, f_m$, обозначим через $O(\mathbf{f})$, где $\mathbf{f} = \{f_1, \mathbf{K}, f_m\}$. Любой граф из $O(\mathbf{f})$ назовем организацией набора групп $\mathbf{f} = \{f_1, \mathbf{K}, f_m\}$. Не начальную группу, отличную от $f_1, \mathbf{K}, f_m$, назовем промежуточной. Задачу поиска организации минимальной стоимости на множестве $O(\mathbf{f})$ назовем задачей об оптимальной (в статике) организации.

То есть задача об оптимальной организации соответствует задаче поиска структуры, организующей взаимодействие элементов в некоторых группах, необходимых для выполнения системой своих функций. Считаем, что все терминальные вершины графов из $O(\mathbf{f})$ содержатся среди групп набора $\mathbf{f}$, т.к. иначе их можно удалить без увеличения стоимости.

Как указано в работе [15], если задано произвольное множество структур (ориентированных ациклических графов) с произвольным функционалом стоимости, то при выполнении так называемого свойства структурности функционала общая задача сводится к задаче на некотором множестве графов организации (см. опр. 2) с функционалом стоимости (*). То есть поставленная задача об оптимальной организации имеет достаточно общий характер. Одним из содержательных примеров, соответствующим частному случаю указанной задачи, является задача об оптимальной организации технологического взаимодействия элементов [9].

Статические модели поиска оптимальной структуры как раз и предполагают минимизацию некоторого критерия оптимальности на определенном множестве структур. Ключевым моментом при определении статической модели является выбор функционала стоимости. Для различных примеров организационных систем (например, для отраслей промышленности) накоплен огромный эмпирический материал, позволяющий определить некоторые агрегированные параметры структуры. Например, норма управляемости (максимальное число подчиненных) [2], численность управленческого персонала [13] и т. п. Такие исследования позволяют сравнивать некоторые “типичные” структуры и выбирать из них наиболее подходящую для конкретной системы. Тестирование функционалов на этих “типичных” вариантах позволяет уточнять их вид и параметры, исходя из эмпирических данных и результатов моделирования (примеры функционалов различного вида исследованы в работах [6, 7]). Ниже считаем, что функционал стоимости некоторым образом задан.

Определение 5. Последовательной организацией назовем граф $G=(V,E)\in O(N)$, для любой вершины $g\in V\setminus N_G$ которого выполнено $Q_G(g)=\{g_1,g_2\}$, причем хотя бы одна из групп g_1,g_2 элементарна. Через $O_p(\mathbf{f})$ обозначим множество последовательных организаций из $O(\mathbf{f})$.

Определение 6. Веерной организацией групп $f_1,\mathbf{K},f_m$ назовем организацию, которая содержит группы $f_1,\mathbf{K},f_m$ и элементарные группы $\{a\}\subseteq f_1\cup\mathbf{K}\cup f_m$, причем каждая группа $f_1,\mathbf{K},f_m$ организуется из составляющих ее элементарных подгрупп.

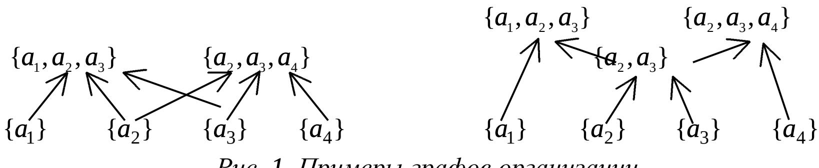

Рис. 1. Примеры графов организации

Примеры организаций приведены на рис. 1. Слева изображена веерная организация групп $f_1=\{a_1,a_2,a_3\}$ и $f_2=\{a_2,a_3,a_4\}$, при которой элементы организуются в группы f_1 и f_2 без промежуточных групп. Справа приведен пример последовательной организации групп f_1 и f_2.

Элементы a_2 и a_3 организуются в промежуточную группу $\{a_2, a_3\}$, которая используется как для организации f_1, так и для организации f_2.

2. Динамическая задача оптимизации структуры

В работах [5, 6, 7, 8] описаны методы решения задачи об оптимальной организации, то есть методы статического моделирования. При переходе от статических моделей к динамическим будем считать, что функционал P соответствует стоимости функционирования системы (затратам) в течение некоторой единицы времени. Если "ситуация" некоторым образом изменяется, то старая структура может "не отвечать новым требованиям" и необходима реструктуризация (перестроение), требующая некоторых затрат. В [16] определена стоимость реорганизации $r(G', G'')$ графа G' в граф G'', т. е. стоимость перестроения организации G' в организацию G'' (в частности, стоимость $r(\varnothing, G)$ создания организации G "с нуля" и стоимость $r(G, \varnothing)$ деорганизации G). Стоимость реорганизации вычисляется на основании известных величин: $r'(a)$ – стоимость исключения исполнителя a из группы; $r''(a)$ – стоимость включения исполнителя a в группу. Тогда G' реорганизуется в G'' путем последовательного исключения и включения исполнителей. Стоимость реорганизации $r(G', G'')$ равна минимальной суммарной стоимости всех исключений и включений (подробнее см. [16]) и при $r'(a) = r''(a) > 0$ будет метрикой на множестве графов организации.

Вопрос о выборе критерия оптимальности в динамике для организационных систем не имеет однозначного решения [3, 12]. В отсутствии исчерпывающего прогноза изменений внешней среды постановки оптимизационных задач неизбежно включают в себя элементы эмпирики. Ниже мы рассмотрим один из возможных эмпирических критериев, который при необходимости может быть модифицирован.

Ограничения на траектории структур (графов) могут описываться различным образом. В качестве одного из вариантов аппарата описания траекторий структурных изменений отметим приведенное в [1] построение так называемых "уравнений графодинамики". Ниже в мы рассматриваем единственное ограничение на преобразования структуры – в каждый момент времени она должна быть графом организации некоторого набора групп, определяемого "внешней средой". Рассмотрим структуру не протяжении T единиц времени.

Определение 7. Через $\mathbf{f}^t = \{ f_1^t, \ldots, f_{m^t}^t \}$, $t = \overline{1,T}$ обозначим определяемый “внешней средой” набор групп элементов, которые должны быть организованы на протяжении единицы времени t для выполнения организационной системой некоторых функций.

Определение 8. Структурой организационной системы на протяжении единицы времени t назовем любой граф организации $G^t \in O(\mathbf{f}^t)$ набора групп $\mathbf{f}^t$.

В работе [7] описана модель организационной системы, в которой изменение набора организуемых групп происходит при снижении цен на одни выпускаемые изделия и повышении цен на другие, в результате чего некоторый “управляющий орган”, стремящийся максимизировать выручку (доход) системы, принимает решение о прекращении выпуска одних изделий и начале выпуска других. Как правило “управляющий орган” находится внутри организационной системы (руководит ей). Однако предмет исследования данной работы – структура. Поэтому решение “управляющего органа” мы относим к “внешним условиям”, считая что выбор структуры осуществляется по некоторым образом заданному набору групп. То есть задача оптимизации структуры решается отдельно от остальных задач управления организационной системой. Такой поход позволяет исследовать структурные явления “сами по себе” и возможно будет в какой-то мере способствовать построению общей модели оптимального управления организационной системой.

Определение 9. Множество всевозможных наборов групп из F обозначим через $\mathbf{F}$. Информацией о внешней среде, известной к началу единицы времени t, считаем наборы групп $\mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^t$. Динамикой внешней среды назовем наборы $\mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^T$.

Таким образом, к началу единицы времени t известно, какой набор групп $\mathbf{f}^t$ нужно организовать, и какие наборы групп нужно было организовать на протяжении предыдущих единиц времени. То есть известна “история” изменения внешней среды.

Определение 10. Управлением структурой организационной системы в момент времени t назовем отображение $\Psi^t : \underbrace{\mathbf{F} \times \ldots \times \mathbf{F}}_{t} \times O(\mathbf{f}^{t-1}) \to O(\mathbf{f}^t)$, первые t аргументов которого представляют собой информацию о внешней среде, а последний – структуру системы на протяжении единицы времени $t-1$, $t = \overline{2,T}$. Управлением в первый момент времени назовем отображение $\Psi^1 : \mathbf{F} \to O(\mathbf{f}^1)$. Совокупность управлений Ψ^t на изучаемом отрезке времени обозначим через $\Psi = (\Psi^1, \mathbf{K}, \Psi^T)$ и назовем управлением.

Определение 11. Управление структурой назовем простейшим, если для любого $t = \overline{1,T}$ выполнено $\Psi^t : \mathbf{F} \to O(\mathbf{f}^t)$.

Управление структурой в момент времени t определяет $G^t \in O(\mathbf{f}^t)$ – граф организации заданного внешней средой набора групп $\mathbf{f}^t$, то есть структуру организационной системы на протяжении единицы времени t, исходя из известной информации о внешней среде и “текущей” структуры системы, то есть структуры на протяжении единицы времени $t-1$. Структура в первый момент времени выбирается из множества $O(\mathbf{f}^1)$ без учета какой-либо информации, так как к этому моменту известен лишь набор групп $\mathbf{f}^1$. Простейшее управление структурой выбирает G^t из множества $O(\mathbf{f}^t)$ без учета информации о состоянии внешней среды в предыдущие единицы времени и без учета “текущей” структуры системы.

Определение 12. Результатом управления структурой назовем величину $R(\mathbf{f}^1, \mathbf{K} \mathbf{f}^T, \Psi) = \left\lfloor \sum_{t=\overline{1,T}} (P(G^t) + r(G^{t-1}, G^t)) \right\rfloor / T$, где $G^0 = G^1 = \Psi^1(\mathbf{f}^1)$, $G^t = \Psi^t(\mathbf{f}^1, \mathbf{K}, \mathbf{f}^t, G^{t-1})$ для $t = \overline{2,n}$. Первую и вторую часть результата соответственно обозначим через $P(\mathbf{f}^1, \mathbf{K} \mathbf{f}^T, \Psi) = (\sum_{t=\overline{1,T}} P(G^t)) / T$ и $r(\mathbf{f}^1, \mathbf{K} \mathbf{f}^T, \Psi) = (\sum_{t=\overline{1,T}} r(G^{t-1}, G^t)) / T$. Если динамика внешней среды задана, то используем запись $R(\Psi)$, $P(\Psi)$, $r(\Psi)$.

Результат управления структурой при каждом t складывается из затрат на функционирование системы, определяемых функционалом P, и из затрат на реструктуризацию $r(G^{t-1}, G^t)$, то есть из стоимости создания (построения) структуры G^t из сложившейся к началу единицы времени t структуры G^{t-1}. Считаем, что в первый момент времени структура G^1 “уже имеется” и не требует затрат на построение ($G^0 = G^1$). Результат зависит от динамики внешней среды $\mathbf{f}^1, \mathbf{K} \mathbf{f}^T$ и от управления Ψ, определяющего структуры $G^1, \mathbf{K}, G^T$.

Определение 13. Оптимальным управлением назовем управление структурой Ψ, минимизирующее результат, то есть $\arg\min_{\Psi} R(\mathbf{f}^1, \mathbf{K} \mathbf{f}^T, \Psi)$.

Таким образом, оптимальное управление минимизирует средние затраты на функционирование системы и на реструктуризацию на протяжении конечного числа единиц времени T. Оптимальное управление зависит от динамики внешней среды $\mathbf{f}^1, \mathbf{K} \mathbf{f}^T$, которая, как правило, заранее неизвестна. В работе [7] определено управление в среднем при некотором прогнозе (вероятностном распределении) динамики внешней среды.

Задача об оптимальном управлении представляется весьма сложной для аналитического решения. Однако, если отображения $\Psi^1, \mathbf{K}, \Psi^T$ эффективно вычисляются, то результат управления структурой при заданной динамике внешней среды $\mathbf{f}^1, \mathbf{K}\mathbf{f}^T$ также может быть эффективно вычислен. Таким образом, если рассматривается набор эффективно вычисляемых управлений, то среди них можно найти оптимальное.

3. Пример простейших управлений структурой

Определение 14. Для произвольного графа организации $G=(V,E)\in O(N)$ уровнем $L_G(g)$ вершины $g\in V$ назовем максимальную длину пути из g в терминальную вершину.

Уровень любой вершины конечен в силу ацикличности графа организации. Уровень терминальных вершин нулевой, уровень остальных вершин равен максимальной длине цепочки “начальников” данной вершины, то есть максимальной длине пути в терминальную вершину.

Определение 15. Уровнем $L(G)$ графа $G=(V,E)\in O(N)$ назовем максимальный уровень вершины графа: $L(G)=\max\limits_{g\in V} L_G(g)$.

Утверждение 1. Для организации $G=(V,E)\in O(\mathbf{f})$ набора групп $\mathbf{f}=\{f_1,\mathbf{K},f_m\}$ выполнено $L(G)=1$ тогда и только тогда, когда G – веерная организация.

Доказательство. Пусть G – веерная организация. Все терминальные вершины G входят в набор $\mathbf{f}=\{f_1,\mathbf{K},f_m\}$. Если бы существовал путь длины два или более в терминальную вершину f_i, то нашлась бы промежуточная вершина $g\notin \mathbf{f}$, $|g|>1$, что противоречит определению веерной организации. Таким образом, $L(G)=1$.

Пусть $L(G)=1$. Если неэлементарная вершина $g\in V$ не принадлежит набору $\mathbf{f}$, то g не является терминальной и из нее выходит по крайней мере одно ребро. В силу неэлементарности g в нее также входит ребро. То есть в G существует путь длины 2, что противоречит $L(G)=1$. Итак, V состоит из групп $f_1,\mathbf{K},f_m$ и элементарных групп. Группа f_i, $i=\overline{1,m}$ организуется из элементарных подгрупп, так как иначе в G нашелся бы путь длины 2. То есть G – веерная организация. Утверждение доказано.

Таким образом, веерная организация и только она имеет минимальный уровень среди всех организаций множества $O(\mathbf{f})$.

Определение 16. Для произвольного графа организации $G=(V,E)\in O(\mathbf{f})$ набора групп $\mathbf{f}=\{f_1,\ldots,f_m\}$ назовем l-усечением графа G, $l\geq 1$ граф $G_l\in O(\mathbf{f})$, который получается в результате следующей процедуры. Удалим из G неначальные вершины с уровнем, большим или равным l, вместе с инцидентными им ребрами. Получим граф $G'=(V',E')$, где $V'=(V\setminus\{g:L_G(g)\geq l\})\cup N_G$. Если неначальная вершина $g\in V'$ не покрывается в G' подгруппами из $Q_{G'}(g)$, то добавляем к E' ребра $(\{a\},g)$ для всех $a\in g\setminus\bigcup_{h\in Q_{G'}(g)}h$. Если для некоторого $1\leq i\leq m$ $f_i\notin V'$, то добавим к V' группу f_i, а к E' ребра $(\{a\},f_i)$ для $a\in f_i$. В результате получим граф $G_l\in O(\mathbf{f})$ организации групп набора $\mathbf{f}$.

Если $l>L(G)$, то никаких перестроений не происходит. При $l\leq L(G)$ в графе G_l останутся начальные вершины и вершины с уровнем $l-1$ и менее. Следовательно уровень некоторых начальных вершин будет равен l, то есть выполнено $L(G_l)=l$. Таким образом, G_l получается из G с сохранением l старших уровней иерархии (с номерами от 0 до $l-1$) и удалением остальных неначальных вершин.

На рис. 2 приведен пример графа G организации двух групп f_1, f_2 и его 2-усечение G_2. Выполнено $L_G(f_2)=2$, следовательно при усечении вершина $f_2=\{a_7,a_8\}$ будет удалена, а затем организована из $\{a_7\}$ и $\{a_8\}$.

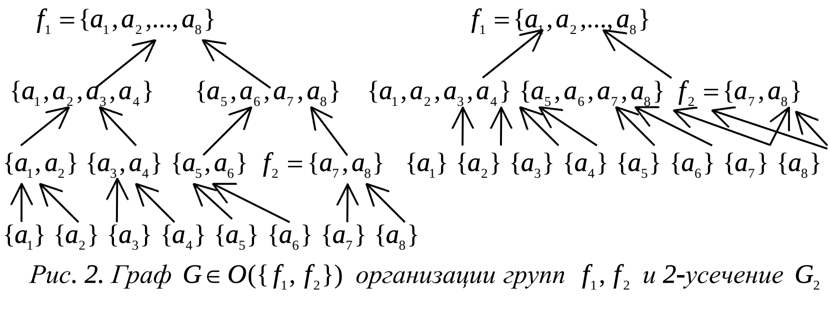

Рис. 2. Граф $G\in O(\{f_1,f_2\})$ организации групп f_1,f_2 и 2-усечение G_2

Итак, для любого графа $G\in O(\mathbf{f})$ определение 16 дает ряд графов $G_1,G_2,\ldots,G_{L(G)}\in O(\mathbf{f})$, первый из которых представляет собой “простейшую“ веерную организацию, последний совпадает с графом G.

То есть в графах $G_1, G_2, \mathbf{K}, G_{L(G)}$ последовательно “появляются” новые уровни управляющих (неначальных) вершин до тех пор, пока не будет получена исходная организация G.

Определение 17. Для $l \geq 1$ l-управлением структурой Ψ_l назовем простейшее управление, которое к каждый момент времени $t = \overline{1,T}$ имеет вид $\Psi_l^t(\mathbf{f}^t) = G_l^t$, где $G_l^t \in O(\mathbf{f}^t)$ – l-усечение оптимальной на $O(\mathbf{f}^t)$ организации $G_*^t \in O(\mathbf{f}^t)$ набора групп $\mathbf{f}^t$, то есть организации, минимизирующей функционал P: $G_*^t = \arg\min_{G \in O(\mathbf{f}^t)} P(G)$.

В каждый момент времени 1-управление Ψ_1 определяет веерную организацию заданного внешней средой набора групп. В [16] показано, что в этом случае стоимость реорганизации минимальна, то есть Ψ_1 минимизирует затраты на реорганизацию (вторую часть результата $r(\Psi_1)$).

При достаточно большом $l = l\max$ управление $\Psi_{l\max}$ определяет оптимальную (в статике) организацию заданного набора групп. То есть управление $\Psi_{l\max}$ минимизирует суммарные затраты на функционирование системы (первую часть результата $P(\Psi_{l\max})$).

Итак, при минимальном и максимальном l получаем в некотором смысле противоположные управления, которые соответствуют минимуму и максимуму уровней иерархии, минимизируют и максимизируют затраты на реорганизацию, максимизируют и минимизируют затраты на функционирование. Если стоимость реорганизации r нулевая, то оптимально управление $\Psi_{l\max}$, если функционал P нулевой, то оптимально управление Ψ_1. В общем случае оптимально некоторое “промежуточное” управление Ψ_l, $1 < l < l\max$, при котором структуры содержат l уровней иерархии. Таким образом, построен ряд простейших управлений.

4. Описание параметров численного моделирования

В работе [5] построены алгоритмы поиска оптимальной на $O_p(\mathbf{f})$ последовательной организации произвольного набора групп $\mathbf{f}$. Для вычисления l-управлений ниже используем эти алгоритмы. То есть в каждый момент времени t вычисляем оптимальную на $O_p(\mathbf{f}^t)$ организацию G_*^t, а затем ее l-усечения. Как показано в [7] для так называемых существенно выпуклых функционалов организация G_*^t будет оптимальна и на $O(\mathbf{f}^t)$.

Для моделирования рассмотрим следующий пример. Количество исполнителей (элементов) $n = 30$, соответственно множество исполнителей $N = \{a_1, \ldots, a_{30}\}$. Определим тридцать групп $f_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_{12}\}$, $f_2 = \{a_2, a_3, \ldots, a_{13}\}, \ldots, f_{30} = \{a_{30}, a_1, a_2, \ldots, a_{11}\}$. Группы $f_1, \ldots, f_{30}$ имеют мощность 12. Группа f_{i+1} отличается от группы f_i тем, что в нее добавлен один исполнитель, а один наоборот убран.

Определим наборы групп $\mathbf{f}_1 = \{f_1, \ldots, f_{10}\}$, $\mathbf{f}_2 = \{f_2, \ldots, f_{11}\}, \ldots$, $\mathbf{f}_{30} = \{f_{30}, f_1, \ldots, f_9\}$. То есть $\mathbf{f}_1$ включает группы с первой по десятую, $\mathbf{f}_2$ – со второй по одиннадцатую, и т. д. Рассмотрим организационную систему на протяжении тридцати единиц времени, $T = 30$. Введем параметр скорости изменения внешней среды $0 \le s \le 1$. Тогда в качестве набора групп, организуемых в момент времени t, определим набор $\mathbf{f}^t = \mathbf{f}_{1+\lfloor s(t-1) \rfloor}$, $t = \overline{1, T}$.

При максимальной скорости $s = 1$ выполнено $\mathbf{f}^1 = \mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}^2 = \mathbf{f}_2, \ldots$, $\mathbf{f}^{30} = \mathbf{f}_{30}$, то есть внешней средой последовательно определяются наборы $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{30}$. При $s = 0.5$ последовательно определяются наборы $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_{15}$, $\mathbf{f}_{15}$. То есть содержательно s – количество новых групп, появляющихся в наборе в течение единицы времени, и количество старых групп, которые удаляются из набора в течение единицы времени. Причем максимальной скоростью изменения мы считаем появление и удаление одной группы по истечению каждой единицы времени. При меньших скоростях в конце некоторых единиц времени организуемый набор не меняется, в конце остальных появляется и удаляется по одной группе.

Расчеты проводились при скоростях изменения внешней среды $s = 0.04; 0.07; 0.1; 0.2; \ldots; 1.0$. При минимальной скорости набор организуемых групп меняется один раз на протяжении рассматриваемого промежутка времени $t = \overline{1, T}$. При максимальной скорости – 30 раз.

В рассматриваемом примере уровень любой последовательной организации из $O_p(\mathbf{f}^t)$ равен 11. То есть для оптимальной последовательной организации $G_*^t \in O_p(\mathbf{f}^t)$ выполнено $L(G_*^t) = 11$. При $l = l\max = 11$ l-усечение G_l^t организации G_*^t совпадает с G_*^t. В результате получаем ряд управлений $\Psi_1, \Psi_2, \mathbf{K}, \Psi_{11}$, при которых структура организации соответственно имеет от одного до одиннадцати иерархических уровней.

Таким образом, описана динамика внешней среды. Будет считать ее заданной, обозначая через $R(\Psi_l)$ результат l-управления, через $P(\Psi_l)$ и $r(\Psi_l)$ – соответственно первую и вторую его части.

Проведем расчеты на примере функционала, который имеет вид $(I)\ P(g_1, \mathbf{K}, g_k) = \left[|g_1| + \mathbf{K} + |g_k| - \max(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|)\right]^b$, где $b \in (0;+\infty)$ – параметр. Как показано в работе [7], при $b \le 1$ функционал (I) – вогнутый, при $b \ge 1$ – существенно выпуклый[1]. В последовательной организации любая неэлементарная группа g организуется из подгруппы h и элементарной подгруппы $\{a\}$. Стоимость такой организации равна единице. То есть стоимость последовательной организации от b не зависит.

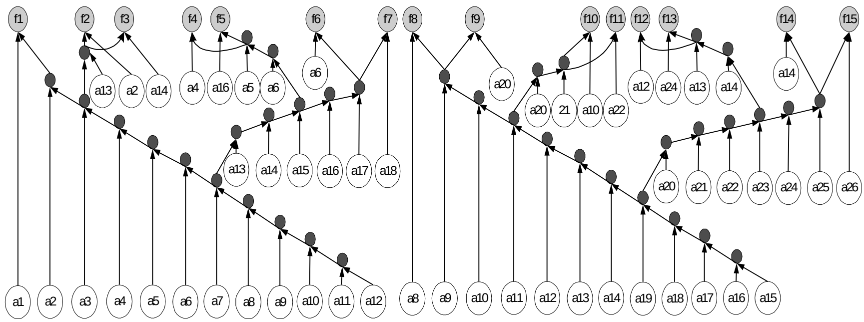

Рис. 3. Оптимальная организация групп $f_1, \mathbf{K}, f_{15}$ для функционала (I)

На рис. 3 приведен пример оптимальной на $O_p(\mathbf{f})$ последовательной организации набора групп $\mathbf{f} = \{f_1, \mathbf{K}, f_{15}\}$ ($f_1 = \{a_1, a_2, \mathbf{K}, a_{12}\}$, $f_2 = \{a_2, a_3, \mathbf{K}, a_{13}\}, \ldots, f_{15} = \{a_{15}, a_{16}, \mathbf{K}, a_{26}\}$). При $b \ge 1$ изображенная организация оптимальна также и на $O(\mathbf{f})$ в силу существенной выпуклости. Элементарные группы повторены несколько раз, так как иначе рисунок становится весьма громоздким. То есть рисунок представляет собой некоторую схему оптимальной последовательной организации.

---

[1] *Определения выпуклости и вогнутости функционала см. в* [7]. *При их выполнении оптимальны соответственно 2-организация* (*каждая группа организуется из двух подгрупп*) *и веерная организация одной группы*.

Их рис. 3 видна последовательность организации элементов в каждой из групп $f_1, \mathbf{K}, f_{15}$. При последовательной организации группы f_i, $i = \overline{1{,}15}$ необходимо организовать 10 промежуточных групп. Если все группы $f_1, \mathbf{K}, f_{15}$ организовывать независимо, то потребуется 150 промежуточных групп. Однако некоторые промежуточные группы могут быть использованы несколько раз. За счет этого в найденной алгоритмом оптимальной организации содержится только 38 промежуточных групп, что снижает стоимость организации в три раза.

Стоимость реорганизации структуры определяется величинами $r'(a)$ и $r''(a)$ – стоимостями включения исполнителя (элемента) $a \in N$ в группу и исключения a из группы. Исполнителей считаем однородными и симметричными по отношению к включению/ исключению, то есть для всех $a \in N$ положим $r'(a) = r''(a) = r$, где $r > 0$ – некоторая величина, определяющая масштаб стоимости реорганизации по отношению к стоимости функционирования (они должны быть соизмеримы).

Напомним, что результат управления структурой имеет вид $R(\Psi) = \left\lfloor \sum_{t=\overline{1,T}} (P(G^t) + r(G^{t-1}, G^t)) \right\rfloor / T$. При достаточно большом r (достаточно высокой стоимости реорганизации) первое слагаемое становится несущественным. В этом случае при достаточной скорости изменения внешней среды оптимальным среди l-управлений становится управление Ψ_1, определяющее веерную структуру. Максимальна скорость изменения внешней среды $s = 1$. Эмпирически установлено, что при $r(\varnothing, G_{веер}) = 2P(G_{веер})$ ($G_{веер} \in O(\mathbf{f}^t)$ – веерная организация) в рассматриваемом примере значение $s = 1$ действительно приводит к оптимальности управления Ψ_1, а меньшие значения s приводят к оптимальности Ψ_{lopt} при $lopt > 1$. То есть полагаем, что стоимость создания “с нуля” простейшей веерной организации в 2 раза превосходит затраты на ее функционирование в течение единицы времени. Из соотношения $r(\varnothing, G_{веер}) = 2P(G_{веер})$, которое и понимается под соизмеримостью затрат, можно выразить r .

5. Затраты на функционирование и на реорганизацию в зависимости от числа уровней иерархии

Зафиксируем $b = 1$ и проанализируем поведение первой и второй части затрат $P(\Psi_l)$ и $r(\Psi_l)$ при различных l-управлениях, $l = \overline{1{,}11}$.

$P(\Psi_l)$ не зависит от скорости s изменения внешней среды, так как для всех t организуемый набор групп $\mathbf{f}^t$ состоит из групп с одинаковой структурой пересечений. То есть, кривая зависимости $P(\Psi_l)$ от l никак не меняется при изменении s. Она изображена на рис. 4 толстой линией.

Кривая зависимости $r(\Psi_l)$ от l существенно трансформируется при изменении s. На рис. 4 приведены кривые для значений $s = 0.04; 0.07; 0.1; 0.2; \mathbf{K}; 1.0$. При $s = 0.04$ затраты на реорганизацию $r(\Psi_l)$ минимальны (нижняя кривая). При увеличении s кривая $r(\Psi_l)$ “поднимается” вверх и переходит в следующую кривую.

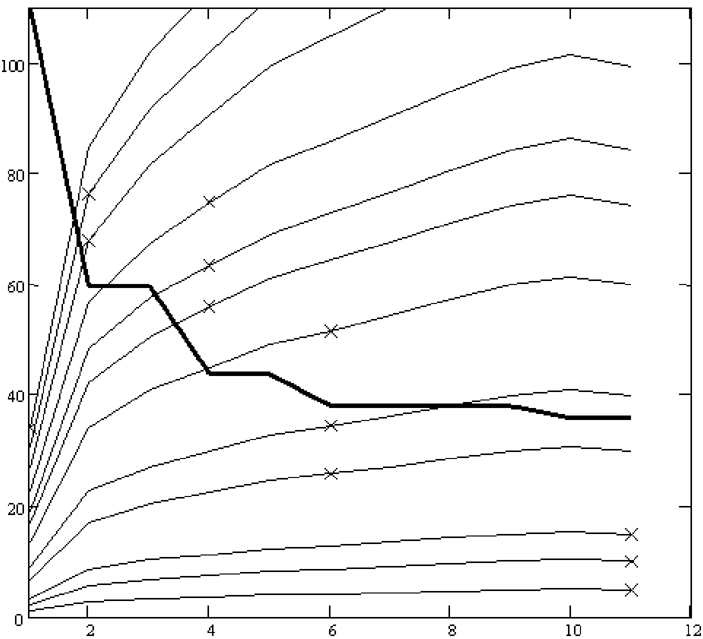

Рис.4. Кривые зависимости $r(\Psi_l)$ от l при различных s (тонкие линии) и кривая зависимости $P(\Psi_l)$ от l (толстая линия) при $b = 1$

Из рис. 4 видно, что стоимость реорганизации возрастает при “усложнении” структуры, то есть при увеличении количества уровней иерархии, за исключением $l = 11$ (при приближении количества уровней иерархии к критическому наблюдается “краевой эффект”).

Общий характер кривых $r(\Psi_l)$ позволяет заключить, что в рассмотренном примере они вогнуты. Максимальный рост затрат на перестроение наблюдается при увеличении l от 1 до 2, то есть при переходе от наиболее простой (веерной) организации к организации, которая имеет два уровня управления.

Из рис. 4 видно, что стоимость $P(\Psi_l)$ затрат на функционирование уменьшается при усложнении структуры, то есть при увеличении количества уровней иерархии. Таким образом, в статике минимум затрат (максимум “эффективности”) достигается для последовательной организация с максимальным количеством уровней иерархии. Кривая $P(\Psi_l)$ в рассмотренном примере выпукла (максимальное уменьшение затрат на функционирование наблюдается при увеличении l от 1 до 2).

То есть кривые $P(\Psi_l)$ и $r(\Psi_l)$ ведут себя в некотором смысле противоположным образом при увеличении l. Для поиска оптимального управления структурой необходимо выбрать $l = lopt$, для которого результат $R(\Psi_l) = P(\Psi_l) + r(\Psi_l)$ минимален. Значение $lopt$ на каждой кривой $r(\Psi_l)$ обозначено крестиком. При возрастании l от 1 до $lopt$ возрастание $r(\Psi_l)$ компенсируется убыванием $P(\Psi_l)$, после $lopt$ – уже нет.

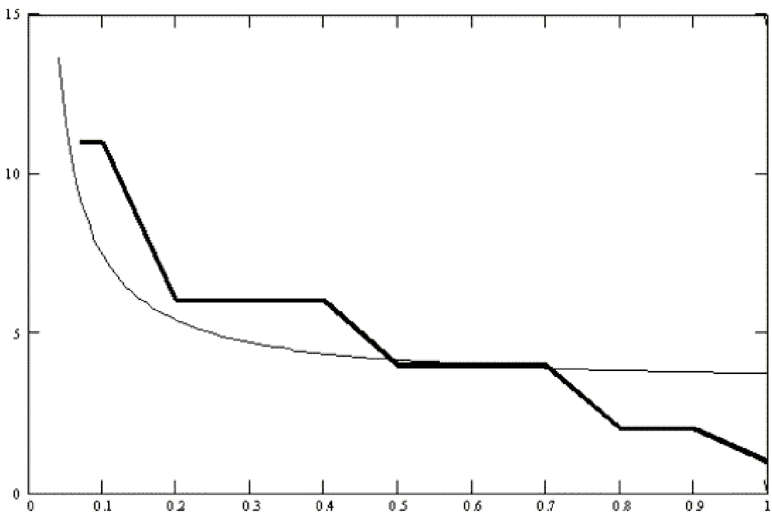

Рис. 5. Кривая зависимости $lopt$ *от* s *при* $0 < s \le 1$ (*толстая линия*) *и ее оптимальное гиперболическое приближение* $lopt(s) = a + b/s$

Перейдя к соответствующим координатам, получим приведенную на рис. 5 зависимость оптимального числа $lopt$ уровней иерархии от скорости изменения внешней среды (интенсивности внешних воздействий). Гиперболическое приближение (оптимальная по a и b в среднеквадратичном смысле кривая $lopt(s) = a + b / s$) достаточно наглядно аппроксимирует полученную эмпирическую зависимость.

Из рис. 5 можно сделать следующий вывод: при жестких (интенсивных) внешних изменениях выгодно поддерживать простую (веерную) структуру системы, усложняя ее по мере смягчения внешних воздействий (увеличивая число уровней иерархии). Качественно это соответствует тому, что в нестабильной внешней среде могут "выживать" лишь организационные системы с максимально простой структурой за счет приспособляемости, в стабильной же среде наоборот доминируют системы со сложной иерархической структурой за счет высокой эффективности.

6. Оптимальное число уровней иерархии при различных параметрах функционала и скоростях изменения среды

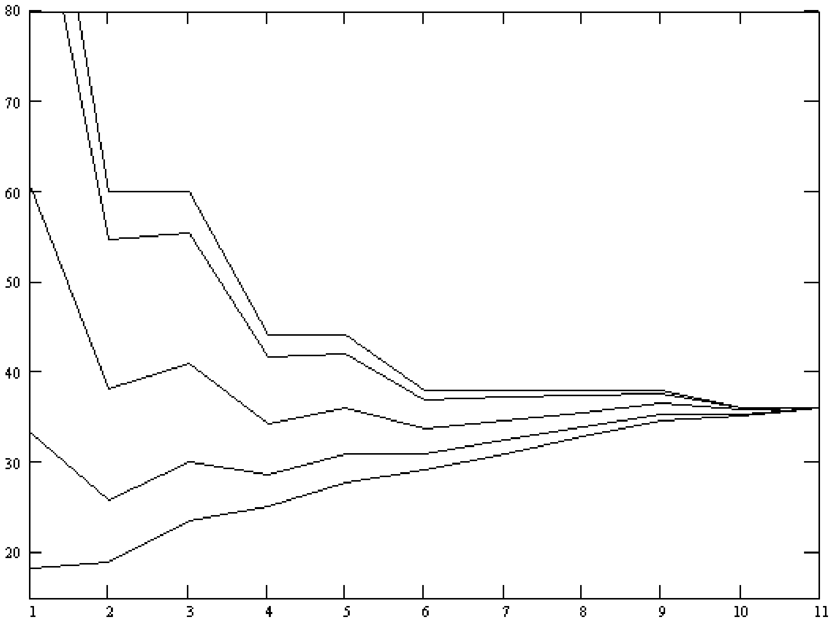

Рис. 6. Кривые зависимости $P(\Psi_l)$ *от* l *при различных* $0.25 \le b \le 1$

Кривые зависимости $r(\Psi_l)$ от l, приведенные на рис. 4, при изменении b умножаются на постоянный коэффициент в силу изменения r (чтобы затраты на функционирование и на реорганизацию оставались соизмеримыми), но характер кривых и взаимное расположения не меняются. Кривая же зависимости $P(\Psi_l)$ от l при изменении b существенно изменяется. На рис. 6 приведены кривые зависимости $P(\Psi_l)$ от l при $b = 0.25; 0.5; 0.75; 0.95; 1$ (нижняя линия – $b = 0.25$, верхняя – $b = 1$).

Стоимость последовательной организации одинакова для любого b. Поэтому при приближении к "критической точке" (максимально возможному количеству уровней иерархии) все кривые сходятся в одну точку.

При $b < 1$ функционал (*I*) вогнут. То есть последовательная организация, вообще говоря, неоптимальна даже в статике. При минимальном $b = 0.25$ вогнутость "ярко выражена": минимальна стоимость функционирования веерной организации, даже несмотря на то, что группы набора $\mathbf{f}^t$ весьма существенно пересекаются (создание промежуточных групп не оправдано). Таким образом, кривая $P(\Psi_l)$ возрастает при увеличении количества уровней иерархии l от 1 до 11 (см. рис. 6 нижняя линия). Так как $l = 1$ доставляет также минимум второй части результата управления $r(\Psi_l)$ (см. рис. 4), то в этом случае $lopt = 1$ при любом s.

При $b = 0.5$ введение промежуточного уровня иерархии уже дает выигрыш (промежуточные группы используются для организации нескольких групп набора $\mathbf{f}^t$). Таким образом, минимум $P(\Psi_l)$ достигается при $l = 2$. Аналогично, при $b = 0.75$ минимум $P(\Psi_l)$ достигается при $l = 6$, при $b = 0.95$ – при $l = 10$ (см. рис. 6).

При $b \geq 1$ в статике оптимальна последовательная организация. То есть минимум $P(\Psi_l)$ достигается в "критической точке" $l = 11$. На рис. 6 верхняя кривая соответствует зависимости $P(\Psi_l)$ от l при $b = 1$. При дальнейшем увеличении b кривая $P(\Psi_l)$ более "круто" возрастает при приближении l к 1, сохраняя свой монотонный характер.

В таблице 1 приведены значения $lopt$ в зависимости от s и b. В связи с их целочисленностью более наглядную картину дают оптимальные гиперболические приближения кривых зависимости $lopt$ от s, которые при $b = 0.25; 0.5; 0.75; 0.95; 1; 2$ изображены на рис. 7. Значение $b = 0.25$ соответствует нижней линии, значение $b = 2$ – верхней линии.

При “ярко выраженной” вогнутости функционала ($b = 0.25$) “сложная” организация с несколькими уровнями иерархии не выгодна даже при постоянной внешней среде. Содержательно это можно интерпретировать следующим образом. Уровень развития “организационных отношений” в системе таков, что наиболее эффективна ”стихийная” организацию исполнителей для выполнения каждой конкретной работы под руководством одного “управляющего звена” (веерная организация).

Таблица 1. Значения $lopt$ *в зависимости от* s *и* b

s\ b	0.25	0.50	0.75	0.95	1.00	2.00
0.04	1	2	6	11	11	11
0.07	1	2	6	6	11	11
0.1	1	2	4	6	11	11
0.2	1	2	4	6	6	11
0.3	1	2	4	6	6	6
0.4	1	2	2	4	6	6
0.5	1	2	2	4	4	6
0.6	1	2	2	2	4	4
0.7	1	2	2	2	4	4
0.8	1	2	2	2	2	2
0.9	1	1	2	2	2	2
1.0	1	1	1	1	1	1

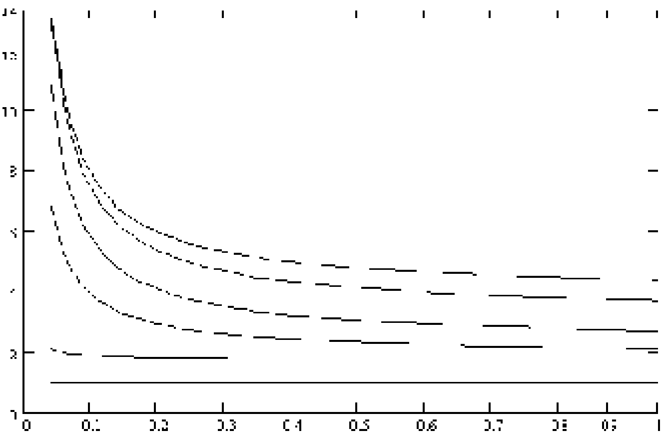

Рис. 7. Гиперболические приближения кривых зависимости $lopt$ *от* s *при* $0 < s \le 1$ *и различных* $b = 0.25; 0.5; 0.75; 0.95; 1; 2$

При ослаблении вогнутости ($b = 0.5$) “в статике” становится выгодным введение двух уровней управления (см. рис. 6), при которых минимизируется первая часть результата $P(\Psi_l)$. При $s < 0.9$ выполнено $lopt = 2$, то есть такая структура управления оптимальна и в динамике.

При дальнейшем ослаблении вогнутости ($b = 0.75$) в достаточно стабильной ситуации ($s \le 0.3$) становятся выгодными более сложные структуры управления. Здесь “эффект” от координации взаимодействия исполнителей промежуточными звеньями уже превосходит “дороговизну” функционирования самих промежуточных звеньев.

Стоимость функционирования промежуточных звеньев уменьшается (относительно общего результата) при $b = 0.95$, что для постоянной внешней среды делает выгодной уже последовательную организацию с максимальным количеством уровней иерархии.

При $b \ge 1$ стоимость функционирования P становится существенно выпуклой, и организация с максимальным количеством уровней иерархии будет оптимальной не только при минимальных изменениях внешней среды, но и при б*о*льших s (см. таблицу 1). То есть по мере ”усиления выпуклости” возрастает “сопротивляемость” организации внешним изменениям и упрощение (“деградация”) происходит при более сильных внешних изменениях (см. рис. 7 и таблицу 1). Содержательно это можно интерпретировать, например, следующим образом. Уровень развития “организационных отношений” в системе достаточно высок, чтобы успешно противостоять нестабильности внешней среды за счет высокой эффективности системы управления, не допуская упрощения (“деградации”) организации.

Заключение

Кратко охарактеризуем полученные результаты. Введено понятие внешней среды, которая в каждый момент определяет, какой набор групп должен быть организован. Под структурой понимается граф организации заданного внешней средой набора групп. Управление структурой определяется как произвольное отображение текущей структуры и известной информации об изменении внешней среды в структуру на следующем шаге. Результат управления – суммарные затраты на функционирование (функционал стоимости) и на реорганизацию (в смысле метрики [16]) – минимален при оптимальном управлении.

Исследован ряд простейших управлений, которые названы l-усечениями, где l – количество уровней иерархии в структуре, определяемой соответствующим управлением. Приведен пример расчетов оптимального l-управления на одном из примеров функционала P. Проанализирована зависимость оптимального управления от параметра функционала (степени развития “организационных отношений”) и скорости изменения внешней среды, определенной как число вновь появляющихся групп в единицу времени. Результаты расчетов показывают, что построенная модель структурных изменений позволяет “уловить” некоторые тенденции, наблюдаемые “на практике”. Этот факт позволяет надеяться, что в дальнейшем изложенный в работах [5, 6, 7, 8] аппарат оптимизации иерархических структур может быть использован при моделировании структуры реальных организационных систем.

Литература

1. АЙЗЕРМАН М.А., ГУСЕВ Л.А., ПЕТРОВ С.В. и др. *Динамические подходы к анализу структур, описываемых графами* (*основы графодинамики*) // Автоматика и телемеханика. 1979. №7. С. 135–151. №9. С. 123–136.

2. БАЗИЛЕВИЧ Л.А. *Обоснование нормативов управляемости на модели трудоемкости руководства*. – В кн.: Повышение эффективности управления объединениями и отраслями промышленности. Новосибирск, 1977.

3. БУРКОВ В.Н., КОНДРАТЬЕВ В.В. *Механизмы функционирования организационных систем*. М.: Наука, 1981.

4. ВОРОНИН А.А. *Устойчивое развитие – миф или реальность?* // Математическое образование. 2000. №1(12). С. 59–67.

5. ВОРОНИН А.А., МИШИН С.П. *Алгоритмы поиска оптимальной структуры организационной системы* // Автоматика и телемеханика. 2002. №5. С. 120–132.

6. ВОРОНИН А.А., МИШИН С.П. *Моделирование структуры организационной системы. Об алгоритмах поиска оптимального дерева* // Вестн. Волг. ун-та. 2001. Сер. 1: Математика. Физика. С. 93–113.

7. ВОРОНИН А.А., МИШИН С.П. *Модель оптимального управления структурными изменениями организационной системы* // Автоматика и телемеханика. 2002. №8. С. 136–150.

8. ГУБКО М.В. *Структура оптимальной организации континуума исполнителей* // Автоматика и телемеханика. 2002. №12.

9. ГУБКО М.В., МИШИН С.П. *Оптимальная структура системы управления технологическими связями* / Материалы международной научной конференции «Современные сложные системы управления». Старый Оскол: СТИ, 2002. С. 50–54.

10. ДЕМЕНТЬЕВ В.Т., ЕРЗИН А.И., ЛАРИН Р.М. и др. *Задачи оптимизации иерархических структур*. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1996.

11. ДРУЖИНИН В.В., КОНТОРОВ Д.С. *Проблемы системологии*. М.: Сов. радио, 1976.
12. ДУБОВСКИЙ С.В., УЗДЕМИР А.П. *Критерии оптимальности и вариационные подходы в динамических моделях экономики* // Автоматика и телемеханика. 1974. №6.
13. ЛЕЙБКИНД А.Р., РУДНИК Б.Л., ЧУХНОВ А.И. *Математические методы синтеза организационных структур управления*. Препринт. М., Всесоюзный научно-исследовательский институт системных исследований, 1978.
14. МЕСАРОВИЧ М., МАКО Д., ТАКАХАРА И. *Теория иерархических многоуровневых систем*. М.: Мир, 1973.
15. МИШИН С.П. *Оптимизация иерархических структур* / Материалы международной научной конференции «Современные сложные системы управления». Старый Оскол: СТИ, 2002. С. 100–105.
16. МИШИН С.П. *Стоимость реорганизации структуры системы* // Тр. кафедры математ. анализа и теории функций Волг. ун-та. 2002. С. 178–198.
17. НОВИКОВ Д.А. *Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем*. М.: Фонд «Проблемы управления», 1999.
18. ОВСИЕВИЧ Б.И. *Модели формирования организационных структур*. Л.: Наука, 1979.
19. ЦВИРКУН А.Д. *Основы синтеза структуры сложных систем*. М.: Наука, 1982.
20. CARZO R.J., JANOUZAS J.N. *Effects of flat and tall organization structure*. – Administrat. Sci. Quart., 1969, vol. 14, №2.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГОСУДАРСТВЕННОЙ СТРАТЕГИИ ПЕНСИОННОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Нижегородцев Р.М.
(*Институт проблем управления РАН, Москва*)
bell44@rambler.ru

Одна из типовых задач, связанных с социальной проблематикой, — это задача выбора правил начисления пенсий, относительно хорошо формализуемая и содержащая достаточно понятные и естественно возникающие ограничения.

Рассмотрим функцию $f(t)$, неотрицательную и непрерывную на достаточно большом промежутке $[0, N]$. Игроку № 1 задается константа T, $0 < T < N$. Его задача — зная функцию $f(t)$, выбрать t_0 ($0 \le t_0 \le N - T$), для которого максимально значение выражения

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt.$$

Иными словами, его задача в том, чтобы выбрать интервал заранее заданной длины, на котором среднее значение функции $f(t)$ было бы максимальным (рис. 1).

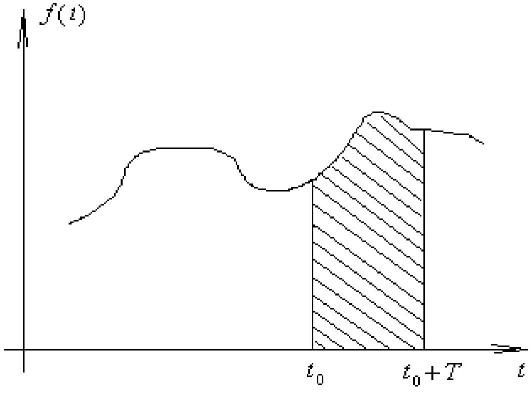

Рис. 1. Максимизация средних значений

Если предположить, что t — параметр времени (возраст), а $f(t)$ — функция заработной платы, то задача приобретает ясный экономический смысл: найти промежуток времени заданной длины, в течение которого средняя зарплата была максимальной. Эта задача носит весьма прикладной характер; в частности, она была актуальна в нашей стране для работников, выходивших на пенсию в течение последнего десятилетия: согласно прежнему законодательству, размер пенсии работника (игрока № 1) зависит от объема доходов, полученных им за пять наиболее высоко оплачиваемых лет подряд в его трудовом стаже. Легко понять, что T в данном случае равно пяти годам.

В рассматриваемой задаче интересно встать на позицию государства и задаться вопросом: какой должна быть эта заданная длина промежутка (T)? Предположим, что игрок № 2 (государство) варьирует T с целью минимизации пенсионных выплат; в этом случае «совокупные» усилия двух игроков реализуют минимаксную стратегию:

$$\min_{T} \max_{t_0} \left(\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt \right).$$

Ясно, что, независимо от вида функции $f(t)$, слишком малое T невыгодно игроку № 2: в этом случае задача игрока № 1 сведется к поиску глобального максимума функции $f(t)$, и близкое к нему значение будет объявлено средним значением $f(t)$ за «очень короткий» промежуток времени. Если T велико (сопоставимо с N), то максимальная средняя зарплата приближается к средней за всю жизнь. Выгодна ли такая ситуация игроку № 2? Ответ зависит от вида функции $f(t)$.

Функция зарплаты от возраста на самом деле может иметь различный вид, но наиболее типичны и распространены функции двух типов (рис. 2).

Первый тип – функция, близкая к параболической, с единственной точкой максимума, приходящейся (в среднем) на конец третьей четверти трудовой биографии работника. Такая функция зарплаты характерна для государственных служащих, для работников высокой квалификации (инженеров, ученых), а также для трудящихся, формально гарантированных от потери рабочего места независимо от текущего состояния экономической конъюнктуры (большинство занятых в плановой экономике; работники, охваченные системой пожизненного найма в современной Японии).

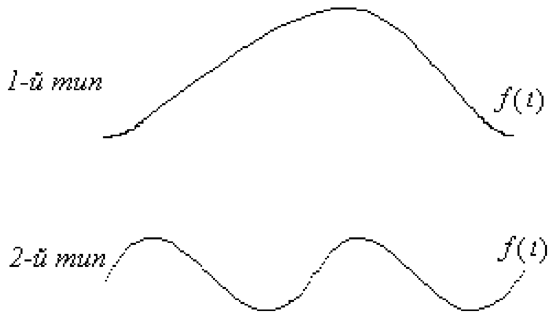

Рис. 2. Два типа функции заработной платы

Второй тип – функция, близкая к периодической, в которой минимумы и максимумы чередуются с частотой, близкой к продолжительности промышленного цикла, выступающего общественной формой движения индустриальных технологий. Такая функция зарплаты характерна для низкоквалифицированных работников частного сектора, подверженных фрикционной или циклической безработице, для дискриминируемых слоев трудящихся, а также для некоторых типов мелких предпринимателей, работающих на условиях самозанятости и в силу структурных причин подверженных колебаниям экономической конъюнктуры.

В любой экономике можно найти работников как первого, так и второго типа, однако в целом чем сильнее социальная политика государства, чем глубже патерналистские традиции функционирования рынка труда, чем эффективнее антициклическое регулирование экономики, чем выше технологический уровень производственных процессов, тем выше доля работников первого типа по сравнению со вторым. Между тем, было бы неверно утверждать, что увеличение доли государственных расходов в ВВП автоматически приводит к росту доли работников первого типа.

Если предположить, что большинство работников имеет функцию зарплаты первого типа, то увеличение ***T*** выгодно игроку № 2. Идеальной для него была бы ситуация, когда размер пенсии определяется объемом трудового дохода, полученного работником в течение всей его жизни. Именно такой вариант исчисления размеров пенсий предусмотрен вступающим в силу пенсионным законодательством. Причина этого факта в том, что большинство работников, выходящих на пенсию в ближайшие годы, имеет функцию зарплаты первого типа.

Если предположить, что в обществе преобладают работники с периодической функцией зарплаты, то игрок № 2 окажется в выигрыше, когда T близко к периоду. Так, если $f(t)$ = s*in* $t + R$, константа R>1, то, каково бы ни было t_0,

$$\frac{1}{2p}\int_{t_0}^{t_0+2p}(sint+R)dt=R.$$

Если же T чуть больше или чуть меньше периода, то игрок № 1 может увеличить искомый результат по сравнению с «математическим ожиданием» значения $f(t)$. Иначе говоря, T=2p есть точка локального минимума функции

$$V_f(T)=\max_{t_0}\left(\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)dt\right).$$

Приведем более общий **пример**. Пусть $f(t)$ — синусоида с периодом ω: $f(t) = A\cos(\omega t+\varphi) + R$, константы $\omega\neq 0$, $R>A>0$. Тогда

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)dt=\frac{2A}{wT}sin\frac{wT}{2}cos\left(\frac{wT}{2}+wt_0+j\right)+R.$$

Поскольку область изменения t_0 намного превосходит период функции $f(t)$, то за счет подходящего выбора t_0 можно добиться, чтобы косинус в последнем равенстве равнялся 1 или –1 в зависимости от знака s*in*(ωT/2). Таким образом,

$$V_f(T)=\frac{2A}{wT}\left|sin\frac{wT}{2}\right|+R.$$

Локальные минимумы функции $V_f(T)$, равные R, будут периодически повторяться, достигаясь в точках T_{min} = 2pn/ω при целых n. Локальные максимумы этой функции непериодически повторяются, монотонно убывая с бесконечным ростом T. Таким образом, и при периодической функции $f(t)$ существенное увеличение T, во всяком случае, не противоречит эффективной стратегии игрока № 2, хотя близость T к периоду функции $f(t)$ также соответствует его интересам. ♦

В свете отмеченных закономерностей можно обнаружить, что значение T, равное пяти годам, отнюдь не выглядит случайностью. Как показывает мировая статистика, в последние 30 лет именно такова средняя продолжительность промышленного цикла в большинстве стран, обнаруживающих отчетливые среднесрочные колебания экономической конъюнктуры. В качестве примеров укажем, что в экономике ФРГ за период 1971-1989 г. (до ее объединения с ГДР в октябре 1990 г.) четко прослеживаются, причем по всем видам конъюнктурных индикаторов, три хозяйственных цикла продолжительностью 4-7 лет [2, с. 430-431]. За 20 лет реформ (с 1978 по 1998 год) китайская экономика пережила 4 цикла, каждый продолжительностью 4-5 лет [1, с. 38]. Естественно, что таков же и период функции $f(t)$ для большинства работников второго типа в соответствующих странах, поскольку периодичность функции зарплаты в решающей степени обусловлена циклическим характером экономической динамики.

Пусть теперь $N = +\infty$, а функция $f(t)$ такова, что существует конечный предел

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\int_0^N f(t)dt,$$

равный k_1, и пусть $k_2 = \max f(t)$ по всем $t\in[0; +\infty)$. Вообще говоря, в случае разрывной измеримой функции $f(t)$ k_2 есть ее существенный супремум. Введем параметр $\theta = -\ln T$ и обозначим $y(\theta) = V_f(T)$. В ряде случаев закон роста этой функции удается представить в виде дифференциального уравнения

$$\frac{dy(q)}{dq} = w(q)(y-k_1)(k_2-y)$$

при некоторой ограниченной на Р функции $w(\theta)$, положительной вблизи обеих бесконечностей. Скорость роста функции $y(\theta)$ замедляется пропорционально близости ее значений как к верхнему пределу k_2, так и к нижнему k_1. Эта функция есть обобщенная логистическая кривая с двумя горизонтальными асимптотами и достаточно сложным поведением, предопределяемым видом функции $w(\theta)$, зависящим от $f(t)$. В частности, обобщенная логиста может не быть монотонной функцией и даже иметь бесконечное множество экстремумов. Тем не менее, свойства некоторых классов обобщенных логистических кривых достаточно хорошо изучены [3], что позволяет применить известный аналитический аппарат к исследованию данной задачи.

В приведенном выше примере с $f(t) = A\cos(\omega t+\varphi) + R$ существует и конечен предел

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\int_0^N f(t)dt = R + \lim_{N\to+\infty}\frac{2A}{wN}\cos\left(\frac{wN}{2}+j\right)\sin\frac{wN}{2} = R,$$

поэтому $k_1=R$, а максимальное значение $f(t)$, как легко видеть, равно $k_2=R+A$. Однако функция $V_f(T)$ недифференцируема в своих точках минимума. В частности, как нетрудно убедиться,

$$V_f'\left(\frac{2p}{w}\pm 0\right)=\pm\frac{Aw}{2p}.$$

Следовательно, соответствующая функция

$$y(q\ )=\frac{2Ae^q}{w}\left|sin\frac{w}{2e^q}\right|+R$$

не может быть решением дифференциального уравнения, определяющего обобщенную логистическую кривую. Тем не менее,

$$\lim_{q\to-\infty} y(q\ )=R,\quad \lim_{q\to+q} y(q\ )=R+A,$$

и асимптотика функции $y(\theta)$ вблизи бесконечностей вполне соответствует поведению обобщенной логистической кривой.

К сказанному следует добавить, что в целом предположение относительно «минимаксной» стратегии государства является достаточно сильным упрощением. На самом деле государство преследует множество целей, важнейшая из которых заключается в том, чтобы уравновесить задачи реализации социальных гарантий (обеспечение работнику прожиточного минимума независимо от реального вклада в национальный доход страны, сделанного им в течение жизни) и задачи стимулирования труда (соответствие большего размера пенсий более высокому уровню трудового дохода). Соотношение между этими целями может меняться (иногда достаточно быстро) в зависимости от общего объема распределяемых средств, находящихся в распоряжении органов пенсионного обеспечения.

Литература

1. ЛИНЬ ИФУ, ЦАЙ ФАН, ЛИ ЧЖОУ. *Китайское чудо: стратегия развития и экономическая реформа*. М., 2001.
2. *Мировая экономика* / Под ред. А.С. Булатова. М.: Юристъ, 1999.
3. ПОСТАН М.Я. *Обобщенная логистическая кривая: ее свойства и оценка параметров* // Экономика и математические методы. 1993. Т. 29. Вып. 2.

МЕХАНИЗМ СТИМУЛИРОВАНИЯ ПОСТАВЩИКОВ ЗА КАЧЕСТВО РАБОТЫ УВЕЛИЧЕНИЕМ ОБЪЁМА ЗАКАЗА

Павлов О.В.
(*Самарский государственный аэрокосмический университет, Самара*)
pavlov@ssau.ru

Введение

Качество сложного технического изделия во многом определяется качеством поставок комплектующих и материалов. В данной работе на примере ОАО «АВТОВАЗ» рассматривается проблема управления качеством снабжения. В соответствии методологией теории активных систем [1], производственную систему сборочный завод – поставщики можно рассматривать как сложную активную систему, в которой у каждого участника имеются собственные цели. Традиционный подход к системе стимулирования поставщиков за качество работы основан на введении функций стимулирования (денежных премий) за качество работы или увеличения договорных цен [2]. Оба метода требуют дополнительных финансовых расходов головной организации. В данной работе предлагается подход в котором в качестве стимула за качество работы поставщика используется увеличение объёма заказа. АО «АВТОВАЗ» работает более, чем с 5000 поставщиками, при чем многие комплектующие изделия и материалы поставляют несколько альтернативных поставщиков. Для многих поставщиков заказ АО "АВТОВАЗ" является основным в их производственной деятельности и следовательно уменьшение объёма заказа АО "АВТОВАЗ" приведет к существенному уменьшению прибыли поставщиков. Каждый поставщик характеризуется ценой комплектующих изделий, материалов и качеством работы. В АО «АВТОВАЗ» существует система оценки качества работы поставщиков [3], в соответствии с которой для каждого поставщика ежемесячно вычисляется количественная бальная оценка. В соответствии с рассчитанной оценкой все поставщики разделяются на категории: A – отличные, B – надежные, C- ненадежные, D-неудовлетворительные. Существуют рекомендации по мерам воздействия на поставщиков. Так для поставщиков категории C, D рекомендуется изменение объёма заказа, для категории D – отказ от поставщика. В данной работе рассматривается задача определения объёма заказа для каждого поставщика с учетом цены за комплектующие и качество работы.

1.Система оценки качества работы поставщиков АО «АВТОВАЗ»

Общая (интегральная) оценка работы поставщика в области качества складывается из четырех частных оценок: оценки совокупного уровня качества поставок $B_{1å}$, оценки уровня организации поставок B_2, оценки лояльности поставщика B_3 и оценки перспективности поставщика B_4.

(1) $$B = k_1 B_{1\Sigma} + k_2 B_2 + k_3 B_3 + k_4 B_4$$

где k_1, k_2, k_3, k_4 – коэффициенты относительной значимости частных оценок, определяются в соответствии с [3].

Каждая из частных оценок $B_{1å}$, $B_{2б}$, B_3, B_4 определяется по совокупности пяти оценочных показателей. Оценка уровня качества поставленной продукции зависит от показателей: b_{11} – качества продукции в состоянии поставки; b_{12} – качества продукции при переработке; b_{13} – уровня отказов в гарантийный период эксплуатации; b_{14} – стабильности входного уровня качества; b_{15} – нормативного уровня несоответствия продукции.

Бальные значения оценочных показателей b_{1i} подсчитываются по формулам или определяются по графикам приложений Б, В [3]. Все комплектующие изделия, металлы и неметаллические материалы разделены на шесть групп значимости. Расчет оценки уровня качества поставок продукции одной группы осуществляется по формуле

(2) $$B_1 = 100 - \sum_{i=1}^{5} b_{1i} \cdot$$

Расчет оценки совокупного уровня качества поставок нескольких групп производится по формуле:

(3) $$B_{1\Sigma} = \frac{\sum_j \left(K_j \; B_{1j}\right)}{\sum_j K_j},$$

где K_j – коэффициент значимости группы j, определяемый по таблице из [3].

Оценка уровня организации поставок B_2 зависит от пяти оценочных показателей: b_{21} – выполнение объёма поставок; b_{22} – соблюдение графика поставок; b_{23} – своевременное возмещение потерь от брака в состоянии поставки и при переработке; b_{24} – выполнение требований АО «АВТОВАЗ» по сопроводительной документации с каждой партией; b_{25} – гарантийное обслуживание поставляемой продукции.

Бальные значения оценочных показателей b_{2i} определяются по таблице приложения Д [3]. Расчет оценки уровня организации поставок осуществляется по формуле:

(4) $$B_2 = 100 - \sum_{i=1}^{5} b_{2i} \cdot$$

Оценка лояльности поставщика $В_3$ зависит от пяти оценочных показателей: b_{31} – полноты включения в контракт требований АО «АВТОВАЗ» по качеству; b_{32} – оперативности реакции на претензии и эффективности принимаемых мер; b_{33} – выполнения анализа и устранения причин дефектов; b_{34} – дисциплины восполнения средств по гарантийному обслуживанию; b_{35} – доступности информации о выходных испытаниях и принимаемых мерах у поставщика.

Бальные значения оценочных показателей b_{3i} определяются по таблице приложения Е [3]. Расчет оценки лояльности поставщика осуществляется по формуле:

(5) $$B_3 = 100 - \sum_{i=1}^{5} b_{3i}\ .$$

Оценка перспективности поставщика $В_4$ зависит от пяти оценочных показателей: B_{41} – использование одобренной АО «АВТОВАЗ» системы качества; B_{42} – инициативность поставщика в ужесточении нормативов по качеству; B_{43} – соответствие политики поставщика по качеству целям АО «АВТОВАЗ»; B_{44} – способность быть эффективным партнером в разработке продукции и технологии; B_{45} – уровень подготовки и обучения персонала.

Бальные значения оценочных показателей b_{4i} определяются по таблице приложения Ж [3]. Расчет оценки перспективности поставщика осуществляется по формуле:

(6) $$B_4 = 100 - \sum_{i=1}^{5} b_{4i}\ .$$

3. Механизм стимулирования

Осуществление процесса закупок в АО “АВТОВАЗ” производят несколько снабженческих подразделений, которые являются центрами ответственности на предприятии. Данный статус означает, что службы наделены обособленным платежным бюджетом и правом расходования средств в пределах утвержденного бюджета, заключения договоров. Исходя из интересов головного предприятия, снабженческие подразделения должны решать следующие задачи:

1) снижение цен поставок;

2) обеспечение высокого качества комплектующих изделий и материалов;

3) строгое соблюдение бюджета закупок;

4)обеспечение своевременности поставок при поддержании оптимального уровня запасов.

Каждое снабженческое подразделение закупает n комплектующих изделий или материалов. По каждому комплектующему есть m альтернативных поставщиков. В качестве целевой функции головной организации рассматривается минимизация затрат снабженческих подразделений на покупку комплектующих, а также затрат на устранение брака поставщиков, затрат из-за организации поставок:

$$(7)\ Z = \sum_{i}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left[c_{ij}\ x_{ij} + a_k\left[\left(100 - B_{kij}\right)x_{ij}\right]^2\right] \to \min, \qquad k = 1{,}4$$

где c_{ij} – цена i-го комплектующего у j-го поставщика; x_{ij} – объём закупок i-го комплектующего у j-го поставщика; a_k – размерные, весовый коэффициенты; B_{1ij} – оценка уровня качества поставок i-го комплектующего у j-го поставщика; B_{2ij} – оценка уровня организации поставок i-го комплектующего у j-го поставщика; B_{3ij} – оценка лояльности j-го поставщика; B_{4ij} – оценка перспективности j-го поставщика; В случае если по данному комплектующему изделию i число альтернативных поставщиков s меньше, чем m, принимается $c_{ij} = 0$, *для* $s < j < m$.

Объём комплектующих i-го вида X_i связан с производственной программой предприятия N соотношением:

$$(8)\ \sum_{i-1}^{m} x_{ij} = b_i N,\ i = 1, n,$$

где b_{ij} – количество комплектующих i-го вида в готовом изделии; N – производственная программа предприятия.

На стоимость всех закупаемых комплектующих наложены следующие финансовые ограничения

$$(9)\ \sum_{i-1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \le A,$$

где A – финансовые средства снабженческого подразделения.

В качестве целевой функции j-го поставщика рассматривается максимизация его прибыли

$$(10)\ z_j = c_{ij}\ x_{ij} - З(x_{ij}, B_{kij}) \to \max, i = 1, n,\ j = 1, m,$$

где $З(x_{ij}, B_{kij})$ - затраты j-го поставщика на производство комплектующих i-го типа, которые зависят от объёма выпуска и качества работы.

В статье предлагается следующий механизм стимулирования поставщиков взависимости от качества работы. Снабженческое подразделение решая задачу нелинейного программирования (7), (8), (9) определяет оптимальный объём поставок x_{ij} по i-му типу комплектующих для j-го поставщика, исходя из интересов сборочного завода. Те поставщики, которые обеспечивают более выгодное соотношение между ценой комплектующих и качеством работы получают больший объём заказа и следовательно большую прибыль. Предложенный механизм стимулирования заинтересовывает поставщиков в повышении качества работы и снижения цены путем создания между ними конкуренции за заказ головного предприятия.

Литература

1. БУРКОВ В.Н. *Основы математической теории активных систем*. М.: Наука, 1977. – 256 с.

2. АНИСИМОВ В.М. ГРИШАНОВ Г.М. *Согласованное взаимодействие по уровню качества поставок в промышленном комплексе/* Сб. научных трудов «Актуальные проблемы производства: технология, организация, управление”. Самара: ИПО СГАУ, 1997. с. 128-137.

3. СТАНДАРТ ПРЕДПРИЯТИЯ СТП 37.101.9763-2000 *"Система качества. Автомобили. Оценка работы поставщиков по обеспечению качества поставок комплектующих изделий и материалов"*, АО «АВТОВАЗ», 2000. – 40 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫМ БИЗНЕС-ПРОЦЕССОМ В РАЗЛИЧНЫХ ОРГАНИЗАЦИОННЫХ СТРУКТУРАХ

Тарасюк Е.С., Вязгин В.А.
(*Московский физико-технический институт*)
tessa@yandex.ru

Введение

Данная работа посвящена исследованию эффективности управления производственным бизнес-процессом в различных организационных структурах.

1. Описание модели

Была построена математическая модель производственного бизнес-процесса (БП): БП включает несколько субпроцессов; каждым из субпроцессом управляет менеджер; горизонтальное управление осуществляется менеджером процесса.

Для описания производственных операций использовались следующие параметры и ограничения:

1) масштаб операции;

2) эффективный выпуск;

3) ограничение на максимальный масштаб операции (минимальный принимается равным нулю);

4) количество ресурсов, необходимых для производства комплекта продукции данной операцией в натуральных единицах в единицу времени – трудовых, технологических и материальных;

5) цены на заданные виды ресурсов;

6) используя эти параметры вычислялись: количество производимой продукции (в комплектах) в единицу времени, ресурсные затраты в стоимостном выражении для каждой операции в единицу времени.

На уровне субпроцесса определяются:

1) ограничение на масштаб операций для субпроцесса (векторная величина);

2) эффективный выпуск для операций субпроцесса (векторная величина);

3) ограничения для каждого типа ресурсов субпроцесса (для трудовых, технологических и материальных ресурсов) в натуральных и денежных единицах;

4) матрицы, описывающие затраты в единицу времени всех видов ресурсов для всех операций субпроцесса.

Рассматривались синхронные бизнес-процессы.

2. Постановка и решение задач оптимизации

Суть исследования состояла в том, что менеджер процесса получал определенную долю профицита ресурсов всех субпроцессов, что позволяло ему, используя эти ресурсы, получить дополнительный выпуск продукции.

Первым этапом являлась постановка и решение задачи нахождения максимального синхронного выпуска для каждого из субпроцессов при заданных ограничениях. Такая задача при использовании свойств синхронных процессов решается аналитически. Таким образом, мы смогли вычислить профицит каждого вида ресурсов для каждого из субпроцессов.

Количество продукции, производимой всем процессом, определяется минимальным количеством продукции, произведенной входящими в него субпроцессами. "Узкое место" определяет производственные возможности всего процесса.

Таким образом, для увеличения количества продукции, производимой в результате реализации всего процесса необходимо максимизировать минимальный из выпусков субпроцессов. В поставленной задаче изменение выпуска осуществляется за счет добавления синхронному выпуску величины, полученной за счет использования профицитных ресурсов.

В полученном в итоге выражении для максимального синхронного выпуска процесса явным образом присутствовал параметр $a = (a)_i : a_i \in [0,1]$, $i = 1..k$, где k – количество субпроцессов. Данный параметр определяет долю профицита ресурсов, находящихся в распоряжении менеджера процесса.

Таким образом, значения:

$a^i = 0, \ \forall i$ соответствуют функциональной оргструктуре предприятия, на котором реализуется производственный процесс, и централизованному управлению предприятием.

$a^i = 1, \ \forall i$ соответствуют процессной оргструктуре предприятия и децентрализованному управлению.

$a^i = (0,1), \ \forall i$ соответствуют матричной оргструктуре.

Для вычисления значения выпуска процесса при заданных ограничениях на Visual C++ написана программа.

Наблюдая значение выпуска при различных значениях параметров альфа, мы обнаружили, что не всегда увеличение коэффициента a^i приводит к увеличению выпуска процесса. Это определяется тем, в каком именно из субпроцессов находится профицит недостающего для увеличения выпуска ресурса.

Но также очевидно, что при любых ограничениях на количество ресурсов, максимальное значение выпуска будет достигаться при $a^i = 1$, для $\forall i$, т.е. процессной оргструктуре предприятия и децентрализованному управлению.

Но не всегда структуру организации предприятия можно приблизить к процессной.

Поэтому, выполнив подобные вычисления, мы можем получить значение увеличения выпуска процесса при конкретных ограничениях на ресурсы. Таким образом, можно определить, рационально ли выполнять реорганизацию структуры предприятия, связанную с кадровыми перестановками и прочими трудностями, в какой мере ограничить или увеличить полномочия отдельных управляющих и т.д., т.е. дать рекомендации по реструктуризации управления.

Итак, мы определили выпуск синхронного процесса при условии выполнения наложенных ограничений, исследовали возможность его увеличения за счет перераспределения профицита ресурсов между субпроцессами при различных организационных структурах предприятия, на котором этот бизнес-процесс реализуется.

В рамках модели ставилась также задача минимизации переменных затрат при определенном минимальном выпуске. Ее решение показывает, что затраты на производство достигают своего минимального значения при синхронности бизнес-процесса.

Производственный процесс, близкий по своей структуре к синхронному, возникает на предприятиях стихийно, но, управляя масштабами операций, можно стремиться к максимальному приближению структуры процесса к синхронному.

Но приближение структуры процесса к синхронной – не единственный способ минимизировать затраты на производство.

Ставились также задачи минимизации переменных затрат за счет распределения выполняемых работ внутри операций по различным способам производства (использовалась несколько усложненная модель бизнес-процесса): задача минимизации затрат при заданном выпуске для субпроцесса и задача минимизации затрат при заданном выпуске для операции. Это задачи линейного программирования, которые решаются симплекс-методом.

Такой подход позволяет выполнять многоступенчатую оптимизацию – на уровне операции выполняется минимизация переменных затрат

Заключение

В ходе работы была построена модель синхронного производственного процесса, поставлены и решены задачи оптимизации выпуска процесса и его переменных затрат, рассмотрены альтернативные оргструктуры предприятия и исследована роль менеджера процесса, осуществляющего горизонтальное управление несколькими субпроцессами, вплоть до производственно-коммерческого процесса полного цикла.

Такой подход позволяет получить рекомендации по оптимизации оргструктуры при всех реальных ограничениях.

Существует несколько направлений дальнейшего расширения исследования и разработок в этом вопросе – это:

1. Моделирование и исследование синхронного бизнес-процесса для нестационарного спроса.
2. Учет оптимальной загрузки в производственном процессе различного технологического оборудования.
3. Постановка и решение задачи выбора нового оборудования при инжиниринге новых бизнес-процессов и техперевооружения предприятия.
4. Возможность разработки и внедрения новых программных продуктов, для управления бизнес-процессами, практически отсутствующих на российском рынке программного обеспечения.

Литература

1. ВАГНЕР Г. *Основы исследования операций*. М.: Мир, 1972. – 335 с.
2. ВЕНДРОВ А.М. *Проектирование программного обеспечения экономических информационных систем*. М.: Финансы и статистика 2000. – 347 с.
3. ЛЭСДОН Л.С. *Оптимизация больших систем*. М. Наука, 1975. – 432 с.

БАЗОВЫЕ МЕХАНИЗМЫ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОГРАММ В ОБЛАСТИ БЕЗОПАСНОСТИ

Уандыков Б.К.
(*Институт проблем управления РАН, Москва*)

Существует базовое положение, о том, что "Обеспечение национальной безопасности Российской Федерации – это деятельность государства и всего общества, направленная на осуществление общенациональной идеи, на защиту национальных ценностей и национальных интересов, а также на упреждение и ликвидацию угроз развитию и укреплению прав и свобод личности, материальным и духовным ценностям общества, конституционному строю, суверенитету и территориальной целостности страны" [1].

Отсюда становится понятным необходимость разработать вероятностные модели развития общества и основных процессов окружающей среды с учетом риска возникновения природных и техногенных аварий и катастроф.

При этом учитываются не только радикальные и быстрые изменения, которые и принято считать "виновниками" возникновения аварий и катастроф, но также медленно нарастающие факторы, угрожающие в результате качественного скачка перейти в неуправляемую стадию с катастрофически негативными последствиями для человека и природы.

В последнем случае имеется ввиду не только влияние глобальных изменений, а также, пока мало учитываемая, но грозная опасность, которую несут "медленные" катастрофы, порождаемые разного рода промышленными выбросами, несвойственными природе (или свойственными в меньших концентрациях) веществ, которые всё более реально и необратимо воздействуют на окружающую среду, до такой степени меняя природные биогеохимические процессы, что они радикально нарушают эволюционный характер, приводят к изменениям целого ряда показателей жизнедеятельности.

При разработке моделей хозяйствования и управления, несомненно, полезен мировой опыт, который иллюстрирует "силу" и "слабость" экономических систем, базирующихся на рыночных отношениях.

Так, с одной стороны, рыночные механизмы экономически более благоприятны при решении проблем безопасной жизнедеятельности и хозяйственных объектов, так как лучше отражают естественной ограниченности природных ресурсов, диктуют более высокий уровень цен на них относительно цен конечной продукции. С другой стороны, социально-политическая значимость обеспечения безопасности, особенно, чистоты окружающей среды, предопределяют централизованное управление, при котором результаты труда потребляются коллективно.

Поэтому вполне закономерно, что по мере обострения проблем обеспечения природно-техногенной безопасности во всех странах с развитой рыночной экономикой идет процесс создания и развития централизованных административных систем управления охраной окружающей среды.

Примером могут служить американские "командно-контрольные системы", которые базируются на законодательном ограничении вредных воздействий на природу, человека и хозяйственные объекты, государственном нормировании и контроле за ними, использовании различного рода санкций к нарушителям, государственном субсидировании мер по улучшению безопасности жизнедеятельности.

Однако, по мере усложнения задач и роста затрат на обеспечение безопасности всё в большей мере начинает выявляться малая эффективность директивных мер и слабая восприимчивость такой системы к достижениям научно-технического прогресса.

В связи с этим, в европейских странах, например, наблюдается преобразование систем управления в сторону всесторонней подготовки к внедрению в промышленности, сельском хозяйстве, на транспорте, в строительстве и в торговле единых стандартов, правил и мероприятий по прогнозированию, предотвращению и минимизации последствий чрезвычайных ситуаций, готовится переход на систему обязательной сертификационной подготовки и переподготовки специалистов.

Естественно, что в этих условиях научные и инженерно-технические разработки, в основном, посвящались решению задач повышения надежности машин и механизмов, сложных технических систем и связанных с этим проблема также повышению ресурса безотказной работы оборудования.

Однако, нарастающее число и тяжесть крупных аварий и катастроф, результаты объективного анализа причин их возникновения, динамики развития и характера последствий заставили ученых и специалистов иначе оценивать ситуацию, перейти на концепцию управляемого (приемлемого) риска.

Концепция приемлемого риска допускает возможность чрезвычайной ситуации при условии, что риск ее возникновения оправдан с точки зрения заранее обусловленных экономических и социальных факторов. Данный подход широко используется в развитых странах и положен в основу современной научно-технической политики в области безопасности в России.

Его применение ученым учесть и исследовать весь спектр воздействий на техносферы и окружающую среду по всему жизненному циклу объектов и природных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. БУРКОВ В.Н., ГРАЦИАНСКИЙ Е.В., ДЗЮБКО С.И., ЩЕПКИН А.В. *Модели и механизмы управления безопасностью*. М.: Синтег, 2001.

ИНФОРМАЦИОННОЕ РАВНОВЕСИЕ

Чхартишвили А.Г.
(*МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва*)
alexch@spa.msu.ru

1. Теория игр и информационное управление

Одной из центральных проблем философии и науки является проблема адекватного описания человеческого поведения, в частности – поведения в ситуации с несовпадающими интересами. Математические подходы к ее решению разрабатывались еще в первой половине XIX в., а к середине прошлого века окончательно сформировалась теория игр, и некоторые важные аспекты поведения были формализованы в терминах целевых функций, стратегий и пр. С тех пор различные теоретико-игровые модели широко применяются для анализа социально-экономических систем (см., напр., [1, 7, 11]).

С теоретико-игровой точки зрения задача управления состоит в следующем: создать для управляемых субъектов игру с такими правилами, чтобы исход этой игры был по возможности благоприятен для управляющего органа. Для формирования нужных правил игры можно применять различные способы: накладывать ограничения на допустимые стратегии игроков (разрешать или запрещать какие-либо действия), изменять их целевые функции (например, платить зарплату или взыскивать штрафы), влиять на информированность в момент принятия решения (подробнее о классификации типов управления см. [3, 6]). Последний способ называется информационным управлением (см. также определения информационного управления в [4]).

Ясно, что для осуществления информационного управления необходимо представлять, каков будет результат игры в зависимости от информированности ее участников. Информированность эта может быть различной, поэтому получающееся равновесие не будет, вообще говоря, «обычным» равновесием, которое принимается в качестве решения игры с полной информированностью (см, напр., [3, 10, 12]). Это будет особое – информационное – равновесие. Определение информационного равновесия для некоторых частных случаев информированности участников игры можно найти в [2, 6].

Целью данной работы является определение информационное равновесия в максимально общем виде. Для этого сначала (в п. 2) проводится различие между информационной и стратегической рефлексией, вторая из которых обычна для любой теоретико-игровой модели, в то время как первая характеризует модели с особой ролью «информационной составляющей». Далее, в п. 3 описывается структура информированности, на основании которой принимаются решения участниками игры; определяется понятие сложности структуры информированности. В п. 4 в качестве концепции решения игры дается определение информационного равновесия. Наконец, в п. 5 на качественном уровне обсуждаются некоторые виды информационного управления, то есть воздействия на информированность субъекта на момент принятия решения.

2. Информационная и стратегическая рефлексия

Рассмотрим теоретико-игровую модель взаимодействия между n субъектами (будем называть их *агентами*). i-й агент осуществляет выбор действия $x_i \in X_i$, $i \in N = \{1, \ldots, n\}$. В результате одновременного и независимого выбора действия агентами i-й агент получает выигрыш, описываемый действительнозначной функцией $f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i \in N$.

Для выбора действия в описанной ситуации каждый агент должен так или иначе смоделировать действия других агентов, чтобы самому выбрать действие, максимизирующее целевую функцию (предположение о том, что агент, выбирая свое действие, пытается максимизировать целевую функцию с учетом всей имеющейся у него информации, называется *гипотезой рационального поведения* [3]). Это моделирование агентом хода мысли других агентов называется *рефлексией*. И здесь весьма существенную роль играет информированность агентов, под которой понимается совокупность той информации, которой обладает агент на момент принятия решения.

Наиболее простым и естественным является предположение о том, что каждому агенту известен состав N участников игры, целевые функции $\{ f_i \}$, множества $\{X_i\}$, а также известно, что это известно остальным агентам, и им известно также о его информированности и т. д. В таких случаях говорят, что упомянутые составляющие игры являются *общим знанием* (common knowledge – см., напр., [10, 12]). Можно сказать так: все агенты знают, в какую игру они играют, т. е. условия игры (правила, возможности и интересы участников) являются общим знанием.

Размышления агента о выборе своего действия включают в себя *стратегическую рефлексию* – какие действия выберут остальные? Размышления такого рода можно проводить различным образом, и исход игры, соответственно, будет разный. В настоящей работе мы будем исходить из наиболее распространенной на сегодняшний день концепции решения игры – равновесия Нэша. Равновесие Нэша – это ситуация, в которой каждый агент выбирает наилучшее для себя действие при фиксированных действиях остальных (или, иначе говоря, от которой каждому агенту невыгодно отклоняться в одиночку). Более строго: вектор действий $(x_1^*,...,x_n^*)$ называется равновесным по Нэшу, если

$$\forall i \in N \quad x_i^* = \arg\max_{x_i \in X_i} f_i(x_1^*,...,x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*...,x_n^*).$$

Для нас существенным является следующее соображение: чтобы вычислить свое действие i-й агент должен знать целевые функции $\{f_i\}$, множества $\{X_i\}$ и быть уверенным, что и остальные игроки их знают, и что они знают, что все остальные их знают и т. д. Таким образом, концепция равновесия Нэша существенно опирается на то обстоятельство, что условия игры являются общим знанием.

Теперь усложним ситуацию. Пусть выигрыши агентов зависят не только от их действий, но и от некоторого неизвестного параметра $q \in \Theta$ – состояния природы, т. е. целевая функция i-го агента имеет вид $f_i(q, x_1,..., x_n)$. Тогда стратегической рефлексии логически предшествует *информационная рефлексия* – размышления агента о том, что каждый агент знает (предполагает) о параметре q, а также о предположениях других агентов и пр. Тем самым, мы приходим к понятию *структуры информированности* агента.

3. Структура информированности

Если в ситуации присутствует неопределенный параметр $q \in \Theta$ (будем считать, что множество Θ является общим знанием), то структура информированности i-го агента I_i включает в себя следующие элементы. Во-первых, представление i-го агента о параметре q – обозначим его q_i, $q_i \in \Theta$. Во-вторых, представления i-го агента о представлениях других агентов о параметре q – обозначим их q_{ij}, $q_{ij} \in \Theta$, $j \in N$. В третьих, представления i-го агента о представлении j-го агента о представлении k-го агента – обозначим их q_{ijk}, $q_{ijk} \in \Theta$, $j,k \in N$. И так далее.

Таким образом, *структура информированности* I_i i-го агента задается набором всевозможных значений вида $q_{ij_1...j_l}$, где $q_{ij_1...j_l} \in \Theta$, l – целое неотрицательное число и $j_1,\ldots,j_l \in N$.

Аналогично задается структура информированности игры в целом I – набором значений $q_{i_1...i_l}$, где $q_{i_1...i_l} \in \Theta$, l – целое неотрицательное число и $i_1,\ldots,i_l \in N$. Подчеркнем, что структура информированности I «недоступна» наблюдению агентов, каждому из которых известна лишь некоторая ее часть.

Совокупность связей между элементами информированности можно наглядно изобразить в виде дерева (рис. 1). При этом структура информированности i-го агента изображается поддеревом, исходящим из вершины q_i.

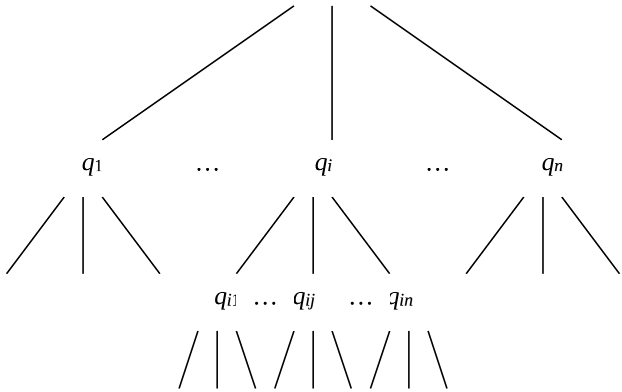

Рис. 1

Сделаем важное замечание: в данной работе мы ограничимся рассмотрением «точечной» структуры информированности, состоящей лишь из элементов множества Θ. Более общим случаем является, например, интервальная либо вероятностная информированность. Последний случай обсуждается в [12], однако приводимые там математические объекты настолько сложны, что, по-видимому, их конструктивное применение вряд ли возможно.

Для формулировки некоторых определений и свойств нам понадобятся следующие обозначения: Σ_+ – множество всевозможных конечных последовательностей индексов из N; Σ – объединение Σ_+ с пустой последовательностью; $|s|$ – количество индексов в последовательности s (для пустой последовательности принимается равным нулю).

Если q_i – представления i-го агента о неопределенном параметре, а q_{ii} – представления i-го агента о собственном представлении, то естественно считать, что $q_{ii}=q_i$. Иными словами, i-й агент правильно информирован о собственных представлениях, а также считает, что таковы и другие агенты и т. д. Формально это означает, что выполнена *аксиома автоинформированности*, которую далее будем предполагать выполненной.

Аксиома автоинформированности: $\forall i \in N\ \forall t, s \in \Sigma \quad q_{tiis} = q_{tis}$.

Эта аксиома означает, в частности, что, зная q_t для всех $t \in \Sigma_+$, таких что $|t| = g$, можно однозначно найти q_t для всех $t \in \Sigma_+$, таких что $|t| < g$.

Наряду со структурами информированности I_i, $i \in N$, можно рассматривать структуры информированности I_{ij} (структура информированности j-го агента в представлении i-го агента), I_{ijk} и т. д. Отождествляя структуру информированности с характеризуемым ею агентом, можно сказать, что, наряду с n *реальными* агентами (i-*агентами*, где $i \in N$) со структурами информированности I_i, в игре участвуют *фантомные* агенты (t-*агенты*, где $t \in \Sigma_+$, $|t| \geq 2$) со структурами информированности $I_t := \{q_{ts}\}$, $s \in \Sigma$. Фантомные агенты, существуя в сознании реальных агентов, влияют на их действия, о чем пойдет речь далее.

Определим фундаментальное для дальнейших рассмотрений понятие тождественности структур информированности.

Определение 1. Структуры информированности I_l и I_m (l, $m \in \Sigma_+$) называются тождественными, если выполнены два условия:

1. $q_{ls} = q_{ms}$ для любого $\sigma \in \Sigma$;
2. последние индексы в последовательностях l и m совпадают.

Будем обозначать тождественность структур информированности следующим образом: $I_l = I_m$.

Первое из двух условий в определении 1 прозрачно, второе же требует некоторых пояснений. Дело в том, что далее (в п. 4) мы будем обсуждать действие t-агента в зависимости от его структуры информированности I_t и целевой функции f_i, которая как раз определяется последним индексом последовательности t. Поэтому удобно считать, что тождественность структур информированности означает в том числе и тождественность целевых функций.

Утверждение 1. $I_l = I_m \Leftrightarrow \forall s \in \Sigma \qquad I_{ls} = I_{ms}$.

Доказательство. $I_l = I_m \Rightarrow \forall s, k \in \Sigma \quad q_{lsk} = q_{msk} \Rightarrow \forall s \in \Sigma \qquad I_{ls} = I_{ms}$.

Обратная импликация очевидна: достаточно положить s равной пустой последовательности.•

Содержательный смысл утверждения 1 состоит в том, что тождество двух структур информированности в точности означает тождество всех их подструктур.

Следующее утверждение является, по сути, иной формулировкой аксиомы автоинформированности.

Утверждение 2. $\forall i \in N\ \forall t, s \in \Sigma \quad I_{tiis} = I_{tis}$.

Доказательство. $\forall i \in N \quad \forall t, s \in \Sigma \qquad q_{tiis} = q_{tis} \Leftrightarrow \forall i \in N \quad \forall t, s, k \in \Sigma$ $q_{tiisk} = q_{tisk} \Leftrightarrow \forall i \in N\ \forall t, s \in \Sigma \quad I_{tiis} = I_{tis}$.•

Определение 1 (как и последующие) можно переформулировать так, чтобы соответствующее свойство структуры информированности выполнялось не объективно, а t-*субъективно* – в представлении t-агента ($t\in\Sigma_+$).

Определение 2. Структуры информированности I_l и I_m (l, $m\in\Sigma_+$) называются t-субъективно тождественными, если $I_{tl}=I_{tm}$.

В дальнейшем мы будем формулировать определения и утверждения сразу t-субъективно для $t\in\Sigma$, имея в виду, что если t – пустая последовательность индексов, то «t-субъективно» означает «объективно».

Определение 3. l-агент называется t-субъективно *адекватно информированным* о представлениях m-агента (или, короче, о m-агенте), если

$I_{tlm} = I_{tm}$ $\quad$ (l, $m\in\Sigma_+$, $t\in\Sigma$).

Будем обозначать t-субъективную адекватную информированность l-агента о m-агенте следующим образом: $I_l >_t I_m$.

Утверждение 3. Каждый реальный агент t-субъективно считает себя адекватно информированным о любом агенте, то есть

$\forall i\in N\ \forall t\in\Sigma\ \forall s\in\Sigma_+\quad I_i >_{ti} I_s$.

Доказательство. В силу утверждения 2 справедливо тождество $I_{tiis}=I_{tis}$, что по определению 3 означает, что $I_i >_{ti} I_s$.•

Содержательно утверждение 3 отражает тот факт, что рассматриваемая точечная структура информированности подразумевает наличие у каждого агента уверенность в своей адекватной информированности о всех элементах этой структуры.

Определение 4. l-агент и m-агент называются t-субъективно *взаимно информированными*, если одновременно выполнены тождества

$I_{tlm} = I_{tm}$, $\quad I_{tml} = I_{tl}$ $\qquad$ (l, $m\in\Sigma_+$, $t\in\Sigma$).

Будем обозначать t-субъективную взаимную информированность l-агента и m-агента следующим образом: $I_l ><_t I_m$.

Определение 5. l-агент и m-агент называются t-субъективно *одинаково информированными о s-агенте*, если

$I_{tls} = I_{tms}$ $\quad$ (s, l, $m\in\Sigma_+$, $t\in\Sigma$).

Будем обозначать t-субъективную одинаковую информированность l-агента и m-агента о s-агенте следующим образом: $I_l >_s<_t I_m$.

Определение 6. l-агент и m-агент называются t-субъективно *одинаково информированными*, если $\forall i\in N$ $\qquad I_{tli} = I_{tmi}$ (l, $m\in\Sigma_+$, $t\in\Sigma$).

Будем обозначать t-субъективную одинаковую информированность l-агента и m-агента следующим образом: $I_l \sim_t I_m$.

Отметим, что отношения одинаковой информированности о каком-либо агенте (определение 5) и одинаковой информированности (определение 6) являются отношениями эквивалентности (то есть рефлексивны, симметричны и транзитивны на множестве агентов).

Покажем, что одинаковая информированность (см. определение 6) равносильна одинаковой информированности о любом агенте (см. определение 5).

Утверждение 4. $I_l \sim_t I_m \Leftrightarrow \forall s \in \Sigma_+ \quad I_l >_s <_t I_m$.

Доказательство. $I_l \sim_t I_m \Leftrightarrow$ {по определению 6} $\Leftrightarrow \forall i \in N \quad I_{tli} = I_{tmi}$ $\Leftrightarrow$ {в силу утверждения 1} $\Leftrightarrow \forall i \in N \ \forall k \in \Sigma \ I_{tlik} = I_{tmik} \Leftrightarrow$ {полагая $s = ik$} $\Leftrightarrow \forall s \in \Sigma_+ \quad I_{tls} = I_{tms} \Leftrightarrow \forall s \in \Sigma_+ \qquad I_l >_s <_t I_m$.•

Определения 3-6 показывают, что описание ситуации в содержательных терминах адекватной, взаимной и одинаковой информированности могут быть описаны через тождество соответствующих структур информированности. Следующее утверждение касается связи введенных понятий друг с другом.

Утверждение 5. Для любого $t \in \Sigma$ следующие три условия равносильны:

1. любые два реальных агента t-субъективно являются взаимно информированными;
2. все реальные агенты t-субъективно являются одинаково информированными;
3. для любого $i \in N$ значение I_{si} t-субъективно зависит только от i.

То есть для любого $t \in \Sigma$ имеем:

$(\forall\, i, j \in N \ \ I_i >\!<_t I_j) \Leftrightarrow (I_1 \sim_t \ldots \sim_t I_n) \Leftrightarrow (\forall i \in N \ \ \forall s \in \Sigma \quad I_{tsi} = I_{ti})$.

Доказательство. Докажем для трех условий утверждения импликации 1⇒2, 2⇒3, 3⇒1.

1⇒2. Для любых $i,j,m \in N$ имеем $I_i >_t I_m$, $I_j >_t I_m$, что означает выполнение тождеств $I_{tim} = I_{tm}$, $I_{tjm} = I_{tm}$. Отсюда $I_{tim} = I_{tjm}$, что доказывает условие 2 (с учетом определения 5 и утверждения 4).

2⇒3. Для пустой последовательности s условие 3 тривиально, поэтому возьмем произвольную непустую последовательность $s \in \Sigma_+$. Тогда $s = i_1 \ldots i_l$ ($i_k \in N$, $k = 1, \ldots, l$), при этом для любого $i \in N$ справедливы следующие соотношения:

I_{ti} ={в силу утверждения 2} = I_{tii} = {поскольку $I_i \sim_t I_{i_l}$} = $I_{ti_l i}$ = {в силу утверждения 2} = $I_{ti_l i_l i}$ = {поскольку $I_{i_l} \sim_t I_{i_{l-1}}$ и в силу утверждения 4} = $I_{ti_{l-1} i_l i}$ = … = $I_{ti_1 \ldots i_l i}$ = I_{tsi}.

3⇒1. Для любых $i,j \in N$ имеем $I_{tij} = I_{tj}$, $I_{tji} = I_{ti}$, что означает $I_i >\!<_t I_j$.•

Понятие тождественности структур информированности позволяет определить их важное свойство – сложность. Заметим, что наряду со структурой I мы имеем счетное множество структур I_t, $t \in \Sigma_+$, среди которых можно, при помощи отношения тождественности, выделить классы попарно нетождественных структур. Количество этих классов естественно считать *сложностью структуры информированности*.

Определение 7. Будем говорить, что структура информированности I имеет конечную сложность $n = n(I)$, если существует конечный набор попарно нетождественных структур $\{I_{t_1}, I_{t_2}, \ldots, I_{t_n}\}$, $t_l \in \Sigma_+$, $l \in \{1,\ldots,n\}$, такой, что для любой структуры I_s, $s \in \Sigma_+$, найдется тождественная ей структура I_{t_l} из этого набора. Если такого конечного набора не существует, будем говорить, что структура I имеет бесконечную сложность: $n(I)=\infty$.

Ясно, что минимально возможная сложность структуры информированности в точности равна числу участвующих в игре реальных агентов.

Определение 8. Любой набор (конечный или счетный) попарно нетождественных структур I_t, $t \in \Sigma_+$, такой, что любая структура I_s, $s \in \Sigma_+$, тождественна одной из них, назовем *базисом* структуры информированности I.

Если структура информированности I имеет конечную сложность, то можно определить максимальную длину последовательности индексов g такую, что, зная все структуры I_t, $t \in \Sigma_+$, $|t| = g$, можно найти и все остальные структуры. Эта длина в определенном смысле характеризует *глубину* рефлексии, необходимую для описания структуры информированности.

Определение 9. Будем говорить, что структура информированности I, $n(I)<\infty$, имеет конечную глубину $g = g(I)$, если

1. для любой структуры I_s, $\sigma \in \Sigma_+$, найдется тождественная ей структура I_t, $t \in \Sigma_+$, $|t| = g$;
2. для любого целого положительного числа x, $x<g$, существует структура I_s, $\sigma \in \Sigma_+$, нетождественная никакой из структур I_t, $t \in \Sigma_+$, $|t| = x$.

Если $n(I)=\infty$, то и глубину будем считать бесконечной: $g(I) = \infty$.

4. Информационное равновесие

Если задана структура информированности игры, то тем самым задана и структура информированности каждого из агентов (как реальных, так и фантомных). Выбор t-агентом своего действия x_t в рамках гипотезы рационального поведения определяется его структурой информированности I_t, поэтому, имея перед собой эту структуру, можно смоделировать его рассуждения и определить это его действие. Выбирая свое действие, агент моделирует действия других агентов (осуществляет рефлексию). Поэтому при определении исхода игры необходимо учитывать действия как реальных, так и фантомных агентов.

Определение 10. Набор действий x_t^*, $t \hat{I} \Sigma_+$, назовем *информационным равновесием*, если выполнены следующие условия:

1. структура информированности I имеет конечную сложность n;
2. $\forall\, l, m \in \Sigma_+ \quad I_l = I_m \Rightarrow x_l^* = x_m^*$; (*)
3. $\forall i \in N\ \forall s \in \Sigma$

$$x_{si}^* = \arg\max_{x_i \in X_i} f_i(q_{si}, x_{si1}^*, ..., x_{si,i-1}^*, x_i, x_{si,i+1}^* ..., x_{si,n}^*)\ . \qquad (**)$$

Необходимость третьего условия в определении 10, по-видимому, не вызывает сомнений. Приведем два примера, показывающих важность первых двух условий.

Примеры 1-2. В этих примерах участвуют два агента с целевыми функциями следующего вида:

$$f_1(q, x_1, x_2) = (q - x_2)x_1 - \frac{x_1^2}{2},\ \ f_2(q, x_1, x_2) = (q - x_1)x_2 - \frac{x_2^2}{2},$$

где $x_i \in R$, i=1, 2. Различие лишь в структурах информированности.

Пример 1. Пусть структура информированности имеет следующий вид (напомним, что в силу аксиомы автоинформированности можно не расматривать элементы с идущими подряд одинаковыми индексами):

$$q_1=1,\ q_{12}=3,\ q_{121}=5,\ q_{1212}=7,\ \ldots;$$
$$q_2=2,\ q_{21}=4,\ q_{212}=6,\ q_{2121}=8,\ \ldots$$

Она имеет бесконечную сложность. Система уравнений (**) в данном случае принимает следующий вид:

$x_1=1–x_{12}$,	$x_2=2–x_{21}$,
$x_{12}=3–x_{121}$,	$x_{21}=4–x_{212}$,
$x_{121}=5–x_{1212}$,	$x_{212}=6–x_{2121}$,
$x_{1212}=7–x_{12121}$,	$x_{2121}=8–x_{21212}$,
и.т.д.;	и.т.д.

Видно, что в системе счетное число уравнений, причем решений у нее бесконечно много – произвольно выбирая значения x_1 и x_2, можно выразить через них остальные переменные.●

Пример 2. Пусть структура информированности имеет следующий вид: q_s=1 для любого $s \in \Sigma_+$. Если при этом условие (*) не выполнено, то в системе (**) оказывается счетное число уравнений:

$x_1=1–x_{12}$,	$x_2=1–x_{21}$,
$x_{12}=1–x_{121}$,	$x_{21}=1–x_{212}$,
$x_{121}=1–x_{1212}$,	$x_{212}=1–x_{2121}$,
$x_{1212}=1–x_{12121}$,	$x_{2121}=1–x_{21212}$,
и.т.д.;	и.т.д.

И здесь, как и в примере 1, решений бесконечно много – произвольно выбирая значения x_1 и x_2, можно выразить через них остальные переменные.•

В соответствии с условием (**), для определения информационного равновесия требуется решить бесконечное (счетное) число уравнений и получить столько же значений x_t^*. Однако оказывается, что на самом деле число уравнений и значений конечно.

Утверждение 6. Если информационное равновесие x_t^*, $t\,\hat{I}\,\Sigma_+$, существует, то оно состоит из не более чем n попарно различных действий, а в системе (**) содержится не более чем n попарно различных уравнений.

Доказательство. Пусть x_t^*, $t\,\hat{I}\,\Sigma_+$, – информационное равновесие. Тогда из конечности структуры информированности и условия (*) сразу следует, что попарно различных чисел x_t^* не более n.

Рассмотрим две любые тождественные структуры информированности: I_l=I_m . Соответственно, имеем q_l=q_m и x_l^*=x_m^* . Далее, для любого $i \in N$ справедливо I_{li}=I_{mi} , следовательно x_{li}^*=x_{mi}^* . Поэтому два уравнения системы (**), у которых в левой части стоят действия x_l^* и x_m^*, тождественно совпадают. •

Таким образом, для нахождения информационного равновесия x_t^*, $t\,\hat{I}\,\Sigma_+$, достаточно записать n условий (**) для каждого из n попарно различных значений x_t^*, отвечающих попарно различным структурам информированности I_t .

Если у всех агентов одинаковые представления о параметре q , и притом все агенты являются одинаково информированными, то сложность структуры информированности минимальна и равна числу игроков. В этом случае система (**) переходит в «обычную» систему для расчета равновесия Нэша (см. п. 2), а информационное равновесие – в равновесие Нэша.

Если структура информированности имеет конечную сложность, можно построить *граф информационного равновесия*, наглядно показывающий взаимосвязь между действиями агентов (как реальных, так и фантомных), участвующих в равновесии. Вершинами этого ориентированного графа являются действия x_t, $t\,\hat{I}\,\Sigma_+$, отвечающие попарно нетождественным структурам информированности I_t. Между вершинами проведены дуги по следующему правилу: к каждой вершине x_{si} проведены дуги от (n–1) вершин, отвечающих структурам I_{sij}, $j \in N \backslash \{i\}$. Если две вершины соединены двумя противоположно направленными дугами, будем изображать одно ребро с двумя стрелками.

Подчеркнем, что граф информационного равновесия соответствует системе уравнений (**), в то время как решения ее может и не существовать.

Рассмотрим несколько примеров нахождения информационного равновесия.

Примеры 3-5. В этих примерах участвуют три агента с целевыми функциями следующего вида: $f_i(q, x_1, x_2, x_3) = (q - x_1 - x_2 - x_3)x_i - \frac{x_i^2}{2}$, где $x_i \geq 0$, $i \in N = \{1, 2, 3\}$; $q \in \{1, 2\}$. Для краткости будем называть агента, считающего, что $q = 1$, пессимистом, а считающего, что $q = 2$, – оптимистом. Таким образом, в примерах 3-5 ситуации различаются лишь вследствие различных структур информированности.

Пример 3. Пусть первые два агента оптимисты, а третий – пессимист, причем все трое одинаково информированы. Тогда, в соответствии с утверждением 5, для любого $s \in \Sigma$ выполняются тождества
$I_{s1} = I_1$, $I_{s2} = I_2$, $I_{s3} = I_3$.

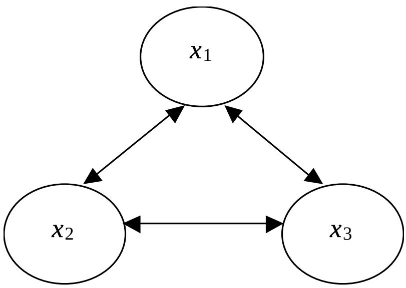

Рис. 2

В соответствии с (*), аналогичные соотношения выполняются для равновесных действий x_s^*. Видно, что любая структура информированности тождественна одной из трех, образующих базис: $\{I_1, I_2, I_3\}$. Поэтому сложность данной структуры информированности равна 3, а глубина равна 1. Граф информационного равновесия изображен на рис. 2.

Для нахождения информационного равновесия надо решить систему уравнений (**), которая в данном случае (с учетом утверждения 6) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{2 - x_2^* - x_3^*}{3}, \\ x_2^* = \dfrac{2 - x_1^* - x_3^*}{3}, \\ x_3^* = \dfrac{1 - x_1^* - x_2^*}{3}, \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x_1^* = \dfrac{1}{2}, \\ x_2^* = \dfrac{1}{2}, \\ x_3^* = 0. \end{cases}$$

Таким образом, действия реальных агентов в ситуации информационного равновесия будут следующими: $x_1^* = x_2^* = 1/2$, $x_3^* = 0$.•

Пример 4. Пусть первые два агента оптимисты, а третий – пессимист, который считает всех трех агентов одинаково информированными пессимистами. Первые два агента одинаково информированы, причем оба они адекватно информированы о третьем агенте.

Имеем: $I_1 \sim I_2$, $I_1 > I_3$, $I_2 > I_3$, $I_1 \sim_3 I_2 \sim_3 I_3$.

Эти условия можно записать в виде следующих тождеств, выполняемых для любого $s \in \Sigma$ (мы воспользовались определениями 3, 6 и утверждениями 1,2,5): $I_{12s}=I_{2s}$, $I_{13s}=I_{3s}$, $I_{21s}=I_{1s}$, $I_{23s}=I_{3s}$, $I_{3s1}=I_{31}$, $I_{3s2}=I_{32}$, $I_{3s3}=I_3$.

Аналогичные соотношения выполняются для равновесных действий x_s^*.

Левые части этих тождеств показывают, что любая структура I_s при $|\sigma|>2$ тождественна некоторой структуре I_t, $|\tau|<|\sigma|$. Поэтому глубина структуры I не превосходит 2 и, следовательно, она имеет конечную сложность. Правые части показывают, что базис образуют следующие структуры: $\{I_1, I_2, I_3, I_{31}, I_{32}\}$ (нетрудно убедиться, что они попарно различны).

Таким образом, сложность данной структуры информированности равна 5, а глубина равна 2. Граф информационного равновесия изображен на рис. 3.

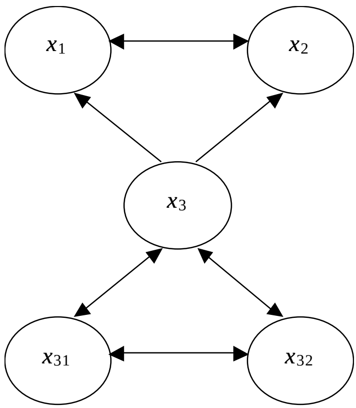

Рис. 3

Для нахождения информационного равновесия надо решить систему уравнений (**), которая в данном случае имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{2 - x_2^* - x_3^*}{3}, \\ x_2^* = \dfrac{2 - x_1^* - x_3^*}{3}, \\ x_3^* = \dfrac{1 - x_{31}^* - x_{32}^*}{3}, \\ x_{31}^* = \dfrac{1 - x_{32}^* - x_3^*}{3}, \\ x_{32}^* = \dfrac{1 - x_{31}^* - x_3^*}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^* = \dfrac{9}{20}, \\ x_2^* = \dfrac{9}{20}, \\ x_3^* = \dfrac{1}{5}, \\ x_{31}^* = \dfrac{1}{5}, \\ x_{32}^* = \dfrac{1}{5}. \end{cases}.$$

Таким образом, действия реальных агентов в ситуации информационного равновесия будут следующими: $x_1^* = x_2^* = 9/20$, $x_3^* = 1/5$.•

Пример 5. Пусть все трое агентов оптимисты, первый и второй взаимно информированы, второй и третий также взаимно информированы. По мнению первого агента, третий считает всех троих одинаково информированными пессимистами; также и первый агент, по мнению третьего, считает всех троих одинаково информированными пессимистами.

Имеем: $I_1 >< I_2$, $I_2 >< I_3$, $I_1 \sim_{13} I_2 \sim_{13} I_3$, $I_1 \sim_{31} I_2 \sim_{31} I_3$.

Эти условия можно записать в виде следующих тождеств, выполняемых для любого $s \in \Sigma$ (мы воспользовались определениями 4, 6 и утверждениями 1, 2, 5):

$$I_{12s} = I_{2s}, \quad I_{13s1} = I_{131}, \quad I_{13s2} = I_{132}, \quad I_{13s3} = I_{13}, \quad I_{21s} = I_{1s},$$

$$I_{23s} = I_{3s}, \quad I_{31s1} = I_{31}, \quad I_{31s2} = I_{312}, \quad I_{31s3} = I_{313}, \quad I_{32s} = I_{2s}.$$

Аналогичные соотношения выполняются для равновесных действий x_s^*.

Левые части этих тождеств показывают, что любая структура I_s при $|\sigma|>3$ тождественна некоторой структуре I_t, $|\tau|<|\sigma|$. Поэтому глубина структуры I не превосходит 3 и, следовательно, она имеет конечную сложность. Правые части тождеств показывают, что в базис могут входить лишь следующие структуры информированности: I_1, I_2, I_3, I_{31}, I_{13}, I_{131}, I_{132}, I_{312}, I_{313}.

Далее, из условия следует, что для любого $s \in \Sigma$ справедливы соотношения $q_{131s} = q_{31s} = q_{313s} = q_{13s} = q_{123s} = q_{213s} = 1$, из которых вытекают тождества $I_{131}=I_{31}$, $I_{313}=I_{13}$, $I_{123}=I_{213}$.

Таким образом, базис образуют следующие попарно различные структуры: $\{I_1, I_2, I_3, I_{31}, I_{13}, I_{132}\}$. Сложность данной структуры информированности равна 6, а глубина равна 3. Граф информационного равновесия изображен на рис. 4.

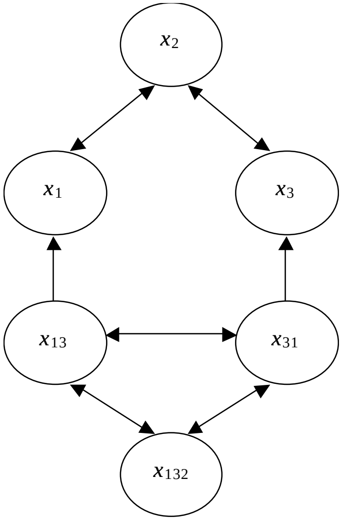

Рис. 4

Для нахождения информационного равновесия надо решить систему уравнений (**), которая в данном случае имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{2 - x_2^* - x_{13}^*}{3}, \\ x_2^* = \dfrac{2 - x_1^* - x_3^*}{3}, \\ x_3^* = \dfrac{2 - x_{31}^* - x_2^*}{3}, \\ x_{31}^* = \dfrac{1 - x_{132}^* - x_{13}^*}{3}, \\ x_{13}^* = \dfrac{1 - x_{31}^* - x_{132}^*}{3}, \\ x_{132}^* = \dfrac{1 - x_{31}^* - x_{13}^*}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^* = \dfrac{17}{35}, \\ x_2^* = \dfrac{12}{35}, \\ x_3^* = \dfrac{17}{35}, \\ x_{31}^* = \dfrac{1}{5}, \\ x_{13}^* = \dfrac{1}{5}, \\ x_{132}^* = \dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

Таким образом, действия реальных агентов в ситуации информационного равновесия будут следующими: $x_1^* = x_3^* = 17/35$, $x_2^* = 12/35$. •

5. Виды информационного управления

Если управляющий орган (который далее будем называть *центром*) знает структуру информированности игры I, то он может рассчитать информационное равновесие и, тем самым, действия реальных агентов. Сделав это, то есть установив связь между структурой информированности и исходом игры, центр может осуществить информационное управление – повлиять на структуру информированности с целью добиться нужных действий агентов.

Детальное рассмотрение проблематики информационного управления выходит за рамки данной работы. Мы ограничимся упоминанием некоторых его видов, в основном опираясь на работу [6] (где, в частности, исследован ряд частных теоретико-игровых моделей).

В [6] выделены три вида информационного управления:

1. *информационное регулирование* – целенаправленное влияние на информацию о состоянии природы;

2. *рефлексивное управление* – целенаправленное влияние на информацию о моделях принятия субъектами решений;

3. *активный прогноз* – целенаправленное сообщение информации о будущих значениях параметров, зависящих от состояния природы и действий субъектов.

Приведем иллюстративные примеры осуществления этих трех видов информационного управления.

В [9, с. 235] описан эксперимент, проведенный изучавшим психологию бизнесменом, владельцем компании, импортирующей в США говядину. «Торговые агенты позвонили, как обычно, постоянным клиентам компании – закупщикам говядины для супермаркетов и других точек, торгующих продуктами в розницу, и одним из трех способов предложили им сделать заказ. Одни клиенты услышали предложение, сделанное в стандартной форме. Другим клиентам дополнительно была предоставлена информация о том, что поставки импортной говядины будут сокращены в ближайшие несколько месяцев. Третья группа клиентов получила те же сведения, что и вторая группа, а также информацию о том, что мало кто узнает о предстоящем сокращении поставок, так как эти сведения поступили из надежного, но засекреченного источника.

…По сравнению с клиентами, которым было сделано торговое предложение в стандартной форме, те клиенты, которым было также сказано о дефиците говядины, заказали ее в два раза больше… Клиенты, которые решили, что владеют «исключительной» информацией… приобрели в шесть раз больше говядины, чем клиенты, которым было сделано торговое предложение в стандартной форме».

В этом примере отчетливо видно осуществление информационного регулирования («поставки импортной говядины будут сокращены») и рефлексивного управления («поставки импортной говядины будут сокращены… мало кто узнает о предстоящем сокращении поставок»).

В [5, с. 162] описывается следующий эффект. «Вечером 6 января 1981 года Джозеф Гранвилл, известный советник по капиталовложениям во Флориде, отправил своим клиентам телеграмму: «Цены на акции резко упадут; продавайте завтра». Очень скоро все узнали о совете Гранвилла, и 7 января стало самым черным днем во всей истории Нью-Йоркской фондовой биржи. По общему мнению, акции потеряли в цене где-то 40 миллиардов долларов». Здесь мы, очевидно, имеем дело с активным прогнозом – сам факт прогноза, доведенный до сведения агентов, повлиял на его реализацию.

Еще пример активного прогноза [8, с. 51]: «Если влиятельные эксперты, выполняя заказ главы государства, находящегося в конфликтных отношениях с высшим органом законодательной власти, спрогнозировали неизбежность досрочного роспуска парламента, то это могло подвигнуть заказчика именно к такому развитию событий, хотя реально оставались возможности для реализации иного сценария».

Приведенные примеры, разумеется, носят качественный характер. Разработка и исследование формальных (теоретико-игровых, имитационных и др.) моделей информационного управления в социально-экономических системах представляется перспективным направлением дальнейших исследований. Целью данной работы является совершенствование инструментария, позволяющего подходить к информационному управления с теоретико-игровой точки зрения.

Литература

1. БУРКОВ В.Н., ИРИКОВ В.А. *Модели и методы управления организационными системами*. М.: Наука, 1994. – 270 с.
2. ГОРЕЛИК В.А., КОНОНЕНКО А.Ф. *Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах*. М.: Радио и связь, 1982. – 144 с.
3. ГУБКО М.В., НОВИКОВ Д.А. *Теория игр в управлении организационными системами*. М.: СИНТЕГ, 2002. – 148 с.
4. *Информационное общество: Информационные войны. Информационное управление. Информационная безопасность* / Под ред. М.А. Вуса. – СПб.: Издательство С.-Петербургского университета, 1999. – 212 с.
5. МАЙЕРС Д. *Социальная психология*. СПб.: Питер, 2001. – 752 с.
6. НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Активный прогноз*. М.: ИПУ РАН, 2002. – 101 с.
7. ПИНДАЙК Р.С., РУБИНФЕЛЬД Д.Л. *Микроэкономика*. М.: Дело, 2001. – 808 с.
8. СИМОНОВ К.В. *Политический анализ*. – М.: Логос, 2002. – 152 с.
9. ЧАЛДИНИ Р. *Психология влияния*. СПб.: Питер, 2001. – 288 с.
10. FUDENBERG D., TIROLE J. *Game theory*. Cambridge: MIT Press, 1995.–579 p.
11. MAS-COLLEL A., WHINSTON M.D., GREEN J.R. *Microeconomic theory*. N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995. – 981 p.
12. MYERSON R.B. *Game theory: analysis of conflict*. London: Harvard Univ. Press, 1991. – 568 p.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МЕХАНИЗМОВ СНИЖЕНИЯ УРОВНЯ РИСКА

Щепкин Д.А.
(*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

Ухудшение экологического состояния в регионе может явиться причиной возникновения чрезвычайной ситуации (ЧС). Здесь предполагается, что уровень риска возникновения ЧС определяется деятельностью предприятия и зависит от объема выпуска продукции u на этом предприятии и средств v, направляемых на снижение риска, путем совершенствования технологии, установки очистных сооружений и т.д. [1]. Естественно положить, что чем выше объемы выпуска или чем меньше средства на природоохранную деятельность, тем хуже экологическое состояние региона и, соответственно, выше уровень риска возникновения ЧС. Обозначим через y уровень риска, вызванный деятельностью предприятия. Будем считать, что

$$(1)\quad y = Y\,\frac{wu^2}{wu^2 + pv + T},$$

где w – коэффициент, характеризующий влияние объема выпуска продукции на уровень риска; p – коэффициент, характеризующий эффективность использования средств, направляемых на снижение риска; Y – максимальный уровень риска, который может вызвать деятельность предприятия; T – показатель, характеризующий технологический процесс на предприятии с позиции безопасности.

Методы оценки экологического состояния региона достаточно хорошо разработаны, поэтому условия возникновения ЧС, связанные с загазованностью, задымленностью, загрязнением могут быть заранее просчитаны. А отсюда следует, что показатели экологического состояния региона могут использоваться при определении параметров экономических механизмов, применяемых для снижения уровня риска [2].

Предположим, что требования, которые предъявляются к предприятию местные органы власти (Центр), заключаются в том, что уровень риска в регионе не может превышать $y^{\text{п}}$. Рычагами, которыми Центр может влиять на функционирование предприятия – это формирование цены за уровень риска.

Рассмотрим модель предприятия. Введем следующие обозначения: q - объем продукции, обеспечивающий предприятию минимальную себестоимость; r - минимальная себестоимость; u - объем продукции, выпускаемый на предприятии; s - себестоимость выпускаемой продукции;

(2) $s = \frac{1}{2} r\left(\frac{u}{q} + \frac{q}{u}\right)$.

Обозначим через c – цену продукции, выпускаемой на предприятии, тогда прибыль предприятия f может быть представлена в виде

(3) $f = cu - su = cu - \frac{1}{2} rq\left(\frac{u^2}{q^2} + 1\right)$.

Тогда остаточная прибыль предприятия, т.е. прибыль, которая остается в распоряжении предприятия после оплаты уровня риска, определяется выражением

(4) $\Pi = f - l\, y - v$,

где l плата за риск. Подставляя в (4) выражения (1) и (3), получаем

(5) $\Pi = cu - \frac{1}{2} rq\left(\frac{u^2}{q^2} + 1\right) - l Y \frac{wu^2}{wu^2 + pv + T} - v$.

Задача Центра заключается в выборе минимально возможной цены l, которая обеспечила бы получение требуемого уровня риска в регионе $y^{\text{п}}$. Установление именно минимальной цены за риск связано с тем, что назначение более высоких цен может привести к снижению объемов выпуска, как следствие – снижению прибыли, и, наконец, к уменьшению налоговых поступлений в Центр.

Будем считать, что при назначенной цене l предприятие стремится получить максимум прибыли (5). Так как средства на снижение уровня риска предприятие выделяет из своей прибыли, то оптимальный объем выпуска и оптимальный объем средств, обеспечивающих максимальную прибыль, находится из условий

(6) $\frac{\partial \Pi}{\partial u} = c - \frac{r}{q} u - l w Y \frac{2u\left(wu^2 + pv + T\right) - 2wu^3}{\left(wu^2 + pv + T\right)^2} = 0$,

(7) $\frac{\partial \Pi}{\partial v} = l w Y u^2 \frac{p}{\left(wu^2 + pv + T\right)^2} - 1 = 0$.

Решая систему уравнений (6)-(7) получаем

(8) $u^* = q \frac{2\sqrt{Y l wp} - cp}{2wq - pr}$.

Соответственно

(9) $$v^* = \frac{q}{2}\frac{2\sqrt{Y l wp} - cp}{2wq - pr}\left(c - r\frac{2\sqrt{Y l wp} - cp}{2wq - pr}\right) - \frac{T}{p}.$$

Таким образом, стремясь получить максимум прибыли, предприятие будет выпускать продукции в объеме (8) и выделять средства на снижение уровня риска в объеме (9). Рассмотрим следующий пример:

$w = 0{,}01;\ p = 0{,}7;\ Y = 0{,}8;\ T = 300;\ q = 200;\ r = 100;\ c = 200.$

Если Центр назначит цену l=*200000*, то u^*=*221*, v^*=*9456,77*, $П^*$=*1984,45*, а y^*=*0,0529*. То есть требуемый уровень риска не достигнут.

Если же l=*240000*, то u^*=*202*, v^*=*9570,37*, $П^*$=*52,08*, а y^*=*0,0441*. В этом случае достигнуто более низкое значение уровня риска, но за это достижение достаточно дорого заплачено. Объем выпуска продукции сократился на *8,6%*, а прибыль упала в *38* раз.

Минимальная плата за риск, которую должен установить Центр находится из условия

(10) $$y^{п} = Y\,\frac{w\left(u^*\right)^2}{w\left(u^*\right)^2 + pv^* + T}.$$

Подставляя в (10) выражения (8) и (9) получаем

(11) $$l^* = \frac{c_i^2 q_i^2 p_i w_i Y_i}{\left[2q_i w_i\left(Y_i - y_i^{п}\right) + y_i^{п} p_i r_i\right]^2}.$$

Для рассмотренного выше примера l=*212071*. В этом случае u^*=*2215*, v^*=*9512,26*, $П^*$=*1363,68*, а y^*=*0,05*.

Выбирая, таким образом, цену за риск, можно уменьшить нагрузку на предприятие до минимального уровня. Эту нагрузку можно сделать еще меньше, если Центр смог бы использовать централизованные фонды для поддержания предприятий, обеспечивающих снижение риска в регионе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Разработка системы экономических механизмов регулирования, обеспечивающих выполнение требований безопасности населения и снижение риска возникновения чрезвычайных ситуаций и ответственности за нанесенный ущерб в процессе социально-экономического развития страны и отдельных регионов* / Отчеты по НИР по проекту 5.2 ФП «Безопасность». М.: ИПУ РАН, 1991 – 2001.

2. БУРКОВ В.Н., ГРАЦИАНСКИЙ Е.В., ДЗЮБКО С.И., ЩЕПКИН А.В. *Модели и механизмы управления безопасностью*. М.: Синтег, 2001.