Российская Академия Наук
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова

А.П. Караваев

МОДЕЛИ И МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ СОСТАВОМ АКТИВНЫХ СИСТЕМ

Москва-2003

УДК 519
ББК 22.18
Караваев А.П. **Модели и методы управления составом активных систем.** Москва: ИПУ РАН (научное издание), 2003. - 151 с.

Приводится обзор основных результатов отечественных и зарубежных авторов по исследованию математических задач управления составом активных систем.

Рассматриваются вопросы управления составом как в статических, так и в динамических моделях. Подробно исследуются унифицированные системы стимулирования. Приводится ряд результатов по управлению руководящим составом.

Работа рассчитана на специалистов (теоретиков и практиков) по управлению организационными системами.

Рецензенты: д.т.н., проф. А.В. Щепкин, д.т.н., проф. Д.А. Новиков

Текст воспроизводится в виде, представленным автором

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Динамичные изменения всей общественной жизни, характеризующие нашу российскую действительность в течение последних десяти лет — социальная переструктуризация, многоукладность экономики, появление принципиально новых социальных организаций — привели к существенному повышению роли и усложнению систем управления. При этом все более очевидным становится факт зависимости успешности процессов социально-экономических преобразований, обеспечения стабилизации развития и функционирования всей общественной системы не только от оптимизации самого механизма управления, но и от повышения эффективности деятельности субъектов исполнения управленческих функций (см. [**53**]).

Актуальность проблемы управления составом (персоналом) определяется, с одной стороны, изменением самих принципов управления на уровне государственных систем, заключающимся прежде всего в перераспределении ответственности между высшими и нижележащими уровнями управления; появлением нового типа социальных организаций, руководство которыми осуществляется на основе частичного или полного делегирования ответственности собственниками. Это существенно повысило требования к уровню профессионализма работников управления, их общим и специальным способностям, знаниям и умениям.

Согласно [**53**], более 80% опрошенных руководителей высшего управленческого звена фирм, предприятий, организаций, административных управленческих структур на первое место в числе проблем, с которыми им приходится сталкиваться, ставят подбор членов управленческой команды, поиск людей, способных к эффективному взаимодействию в ходе реализации управленческих функций. 64% руководителей считают, что успех возглавляемой организационной структуры определяется тем, насколько эффективно подобраны ближайшие помощники, каждый третий опрошенный руководитель отмечает, что имеет определенные трудности в их подборе, 77% не владеют навыками оценки управленческого потенциала, 52% отмечают у себя отсутствие специальных психологических знаний, а 47% считают необходимым специально подготавливать специалистов управления для правильно выбора ими своего ближайшего окружения и правильной их расстановки.

Актуальность проблемы управления составом определяется также тем, что если ранее традиционно центральной фигурой в исследованиях вопроса повышения эффективности управленческой деятельности выступал руководитель, то теперь все большее значение приобретает изучение его окружения, которое в значительной мере определяет и специфику управленческих воздействий, и стиль управления, и характер взаимоотношений в организации, а в конечном счете и стабильность организационной структуры, и эффективность деятельности учреждения или организации в целом.

Все это позволяет говорить о том, что при создании эффективно действующей управленческой команды важной составляющей в структуре профессионализма руководителей различного уровня выступает способность оптимально формировать ближайшее окружение в организации, на основе реальной оценки личностных и производственных качеств работников, их управленческого потенциала и личностных характеристик.

Задачу управления персоналом можно условно разбить на три части: задача управления структурой, задача управления составом и задача управления фиксированным составом.

В *задаче управления структурой* в предположении фиксированного состава (набор сотрудников с известными характеристиками) требуется найти оптимальную структуру активной системы (связи и взаимодействия между сотрудниками).

В *задаче управления составом* определяется наилучший состав работников (в предположении заданной структуры, т.е. штатного расписания, и множества возможных сотрудников).

В *задаче управления фиксированным составом* находятся оптимальные функции стимулирования для получения максимальной прибыли, при условии фиксированного состава и структуры (при решении данной задачи предполагается, что задача управления составом решена).

Все три задачи управления персоналом должны решаться одновременно, что в силу сложности каждой из задач не представляется возможным. Наиболее простой с точки зрения независимости от других является задача управления составом, поскольку она представляет собой набор оптимизационных и теоретико-игровых задач. Равновесием в данном случае будет являться такое решение задач, при котором изменяя решение одной из них нельзя добиться увеличения прибыли.

В силу того, что все три задачи решить одновременно не представляется возможным, естественно решать каждую из задач в отдельности.

В большинстве работ по теории управления организационными и социально-экономическими системами (активными системами — АС) рассматриваются задачи управления (планирования, стимулирования и др. [**11**]) в предположении, что *состав участников системы* (далее для краткости — *состав*), то есть набор управляющих органов — центров — и управляемых субъектов — активных элементов[1] (АЭ), фиксирован. Коль скоро известно решение задачи управления для фиксированного состава АС, появляется возможность рассмотрения *задачи управления составом активной системы*, то есть задачи определения оптимального (в оговариваемом ниже смысле) набора АЭ, которых следует включить в систему, и тех их действий, выбор которых наиболее выгоден для центра[2] (или центров,

[1]В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением двухуровневых активных систем, содержащих один или нескольких центров на верхнем уровне иерархии и один или нескольких активных элементов на нижнем. Многоуровневые АС исследовались в [**44**]. Изучение задач синтеза оптимальной структуры многоуровневой АС должно использовать результаты решения задач управления составом двухуровневых АС и является перспективным направлением дальнейших исследований.

[2]Побуждение АЭ к выбору определенных действий является "классической" задачей управления АС, то есть задачей управления фиксированным составом.

если последних несколько). Если имеется решение задачи управления составом, то следующим шагом может быть решение задачи синтеза оптимальной структуры АС (см. рисунок 1) — определения числа уровней иерархии, распределения участников АС по уровням, определения связей между ними и т.д.

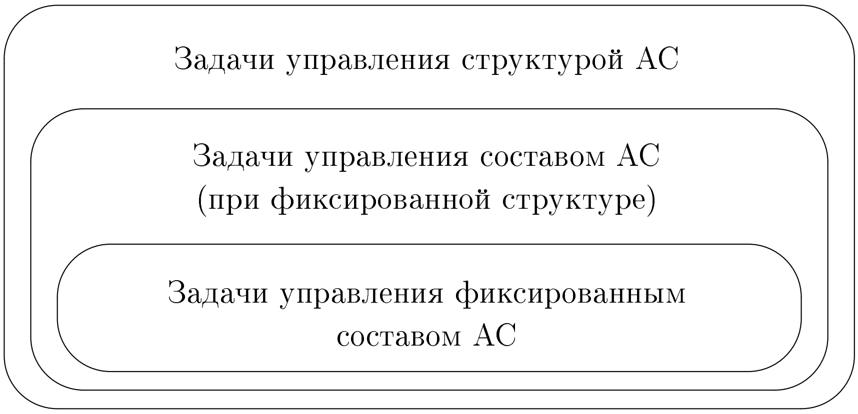

Рис. 1. Вложенность задач управления АС

Таким образом, как уже было сказано, задачу управления работой фирмы можно разбить на следующие составляющие: задачу управления фиксированным составом, задачу управления составом составом, задачу управления структурой.

(1) **Задача управления фиксированным составом** заключается в назначении оптимальной системы стимулирования для достижения наилучшего результата при фиксированном составе и структуре АС. Сюда, в частности, входит задача синтеза оптимальной системы стимулирования. Во многом решение данной задачи зависит от активной системы в целом: информированности участников, наличия разного вида неопределенностей, и т.д.

(2) **Задача управления составом** заключается в определении оптимального набора сотрудников АС при условии, что структура всей активной системы задана, и задача управления уже решена (для определения оптимального состава мы должны уметь определять эффективность того или иного состава работников).

(3) **Задача управления структурой** заключается в определении оптимальной структуры фирмы. Уже в соответствии с этой структурой будут определены связи и исполнители. Данная задача, как правило, решается после решения задач о назначении, формирования состава и управления составом.

Приведем краткий обзор основных направлений исследований задач управления составом АС.

Модели и механизмы формирования состава системы рассматривались в таких разделах теории управления [3] как теория активных систем (ТАС) и теория контрактов, а также в экономике труда и экономике организаций.

В теории контрактов [**7**] исследовались модели определения оптимального числа работников (в основном, однородных) при ограничениях согласованности стимулирования и резервной заработной платы [**45**]. Обычно в работах зарубежных авторов по теории контрактов считается, что на момент заключения контракта будущее значение состояния природы (внешнего неопределенного фактора, определяющего условия функционирования АС) неизвестно ни центру, ни потенциальным работникам, но они имеют о нем информацию в виде вероятностного распределения. Задача центра заключается в определении зависимости вознаграждения работников от результатов их деятельности или действий (причем работники, как правило, считаются однородными) и числа работников, нанимаемых в зависимости от состояния природы, которые максимизировали бы математическое ожидание целевой функции центра при условии, что всем принятым на работу гарантируется уровень полезности не меньший резервной заработной платы (при этом может добавляться условие обеспечения центром определенных гарантий для безработных). Отметим, что сформулированная задача существенно проще (так как не учитывается активность работников), чем базовая модель теории контрактов, в которой фигурирует дополнительное условие выбора АЭ действия, максимизирующего его ожидаемую полезность при заданной системе стимулирования [**50**]. В настоящей работе нас будут интересовать постановки задач формирования состава АС, учитывающие активность всех ее участников.

В рамках экономики труда [**55**] основной результат, определяющий оптимальное количество работников, отражает равенство производимого ими предельного продукта (предельной производительности) и предельных затрат на их привлечение и удержание (см. обсуждение взаимосвязи между экономикой труда и задачами управления организационными системами в [**2**]). Количество дополнительной продукции (дохода) $\Delta H(n)$, которое получает фирма, нанимая одного дополнительного (сверх n уже работающих) работника (единицу труда), называется предельным продуктом труда[4]. Обычно считается ("закон уменьшения предельной отдачи" или "предельного дохода"), что предельный продукт труда убывает с ростом числа нанятых работников (то есть функция дохода центра вогнута). Содержательные интерпретации подобных предположений очевидны.

Предельные издержки $\Delta\sigma(n)$ есть затраты центра на стимулирование при приеме на работу $n+1$-го работника. Обычно считается ("закон возрастания предельных издержек"), что предельные издержки возрастают с ростом числа нанятых работников (то есть функция затрат центра на стимулирование выпукла).

[3] Мы не будем проводить обзора и анализа обширного класса задач о назначении и их модификаций, решаемых в исследовании операций [**15**], в том числе применительно к задачам управления составом организационных систем [**9**].

[4] Следует отметить, что предельный продукт любого индивида не является результатом только лишь его качеств, а зависит от числа уже нанятых работников, общего капитала фирмы, используемой технологии и т.д.

Условие максимизации прибыли (разности между доходом центра и его затратами на стимулирование) требует, чтобы прибыль была максимальна. Для этого следует[5] изменять число занятых (увеличивать, если предельный доход превышает предельные издержки, и уменьшать в противном случае) до тех пор, пока предельный доход не будет равен предельным издержкам.

В экономике организаций принят следующий общий подход к определению оптимального размера организации (см. ссылки в [**45**]). С одной стороны, существует рынок — как система обмена прав собственности. С другой стороны, экономические агенты объединяются в организации, взаимодействующие на рынке. Объяснением существования экономических организаций служит необходимость компромисса между транзакционными издержками и организационными издержками (организационные издержки связаны с образованием организаций, транзакционные — с необходимостью осуществления транзакций между агентами).

К *транзакционным издержкам* относят:

- издержки вычленения, связанные с невозможностью точного определения индивидуального вклада каждого элемента большой системы, то есть организация осуществляет агрегирование информации;
- информационные издержки: организация сокращает этот вид издержек путем сокращения объема перерабатываемой информации;
- издержки масштаба: в случае рынка институциональные ограничения требуют настолько высокого уровня детализации регламентирования деятельности, что последний неизбежно приводит к специализации в рамках организаций;
- издержки поведения: согласование интересов, наказание за отклонения и т.д. связаны с определенными затратами;
- издержки стабилизации, связанные с необходимостью координации в условиях невозможности эффективного прогнозирования будущего поведения системы, внешней среды и их взаимодействия.

Организационные издержки определяются "затратами на координацию" внутри организации, которые растут с увеличением ее размеров.

Транзакционные издержки препятствуют рынку заместить собой организацию, а организационные издержки препятствуют организации заместить собой рынок. Основная идея (качественная), используемая в экономике организаций при обсуждении задач формирования состава заключается в том, что так как и первые, и последние издержки зависят от размера организации и ее структуры, то, теоретически, должны существовать оптимальные параметры организации, при которых достигается уравновешивание упомянутых тенденций замещения.

Остановимся более подробно на результатах, полученных в рамках теории активных систем.

---

[5] Если отказаться от экономической терминологии, то в рамках введенных предположений целевая функция центра имеет единственный максимум по числу АЭ (как разность между вогнутой функцией дохода и выпуклой функцией затрат на стимулирование). Следовательно, для ее максимизации необходимо и достаточно обращения в ноль производной, что и соответствует равенству абсолютных значений производных слагаемых, то есть равенству предельного дохода и предельных издержек.

Впервые в теории активных систем задачи формирования состава АС рассматривались в работе [**3**] для случая назначения проектов. Вообще, задача о назначении с неизвестными центру и сообщаемыми ему активными элементами параметрами эффективности их деятельности на различных должностях неоднократно привлекала внимание исследователей, особенно в области управления проектами — так называемые сложные конкурсы исполнителей и др. (см. [**12**]).

В работе [**14**] рассмотрена модель динамики трудовых ресурсов между несколькими предприятиями в зависимости от условий оплаты труда и неденежных факторов вознаграждения работников.

Несколько моделей, в которых определялось оптимальное с точки зрения информационной нагрузки на центр число АЭ, которых следует включать в АС, рассматривались в работе [**44**] при изучении факторов, определяющих эффективность управления многоуровневыми организационными системами.

Широкое распространение в задачах управления АС нашли методы теории графов [**4**]. Задачи определения оптимальной последовательности выполнения операций (сокращение производственного цикла, коммерческого цикла, задачи снабжения и др. [**9**]) условно могут рассматриваться как задачи формирования состава.

Наиболее представительным классом механизмов управления АС, которые могут рассматриваться как задачи формирования состава, являются *конкурсные и аукционные механизмы*, в которых ресурс или работы распределяются между претендентами на основании упорядочения эффективностей их деятельности. Примерами являются прямые, простые и двухэтапные конкурсы [**8**], конкурсы исполнителей в управлении проектами [**12**], задачи назначения исполнителей (так называемые сложные конкурсы) и др.

Первые систематические постановки задач формирования состава АС (отметим, что речь идет именно о задачах формирования состава, а не управления составом, так как в большинстве известных моделей речь идет о формировании состава АС "с нуля" — см. классификацию ранее в данном введении) появились недавно — см. монографию [**50**]. На основании проведенных исследований выделяются три общих подхода к решению задач формирования состава АС на основании рассмотрения задач стимулирования. Первый подход заключается в "лобовом" рассмотрении всех возможных комбинаций потенциальных участников АС. Его достоинство — нахождение оптимального решения, недостаток — высокая вычислительная сложность.

Второй подход основывается на методах локальной оптимизации (перебора составов АС из некоторой окрестности определенного состава). Используемые при этом эвристические методы в общем случае не дают оптимального решения и поэтому требуют оценивания их гарантированной эффективности.

И, наконец, третий подход заключается в исключении заведомо неэффективных комбинаций АЭ на основании анализа специфики задачи стимулирования (см. упорядочение АЭ, имеющих сепарабельные затраты, в задачах формирования состава АС). При этом вычислительная сложность резко сокращается и удается получить точное (оптимальное) решение[6], но, к сожалению, данный подход

[6]Решение при этом, как правило, задается простым и содержательно интерпретируемым алгоритмом. Например, в задаче, описанной в [**36**], предлагается исполнителю с большей оценкой вероятности

применим далеко не всегда, и в каждом конкретном случае возможность его использования требует соответствующего обоснования.

Рассматриваемые в большинстве работ по теории активных систем задачи управления фиксированным составом (в том числе, в первую очередь, задачи стимулирования) заключались в определении зависимости поощрения или наказания каждого конкретного АЭ от результатов его деятельности. Такие системы стимулирования, состоящие из набора функций стимулирования — каждой для соответствующего АЭ, в **[11]** было предложено называть *индивидуальным стимулированием.*

В отличие от индивидуального стимулирования, управляющий орган — центр — может использовать одну и ту же для всех АЭ зависимость поощрения от результатов деятельности (выбираемые различными АЭ действия при этом, естественно, могут быть различными). Если зависимость выплат от действий и/или результатов деятельности одинакова для всех АЭ (или их части), то такую систему стимулирования называют *унифицированной.* Унифицированное управление широко используется на практике, и иногда при рассмотрении задач формирования состава предполагается, что всем участникам АС (принадлежащим определенной их группе) должны быть обеспечены одинаковые условия. Поэтому в настоящей работе проблемы унифицированного управления рассматриваются в комплексе с задачами управления составом АС.

Привлекательность унификации управления заключается в снижении информационной нагрузки на управляющие органы. В то же время, использование "уравниловки" может привести к снижению эффективности управления (так как максимум эффективности ищется по меньшему множеству — множеству унифицированных систем стимулирования). Поэтому возникает необходимость исследования преимуществ и недостатков унифицированных систем стимулирования.

Данная работа организована следующим образом.

В первой главе рассматриваются проблемы управления составом активных систем.

В разделе 1.1 "Классификация задач формирования состава" анализируется место задачи управления составом АС в совокупности задач управления АС. Показывается, что для решения задачи управления составом АС необходимо уметь решать задачу управления фиксированным составом АС, которая фактически является задачей об оптимальном стимулировании АЭ.

В разделе 1.2 осуществляется постановка основных задач исследования. Производится общая постановка задачи управления составом АС. Выделяется задача управления составом исполнительного звена АС и задача управления составом управляющего звена АС. Данные задачи различны с точки зрения проявляющихся эффектов при поиске равновесий: при решении задачи формирования исполнительного звена основной акцент делается на производительность каждого АЭ, на влияние так называемого неблагоприятного отбора. При поиске равновесий в

успешного выполнения им работы поручать работу максимальной внешней стоимости; в **[38]** предлагается распределять работы между исполнителями в порядке возрастания удельных затрат их деятельности, и т.д.

задаче формирования управляющего звена существенную роль играет игра, возникающая между центрами за действие, реализуемое подчиненными АЭ.

Описывается основная модель и порядок функционирования АС. Анализируются задачи формирования состава исполнительного звена. Основным ограничением при решении данных задач является использование унифицированной системы стимулирования, применение которой объясняется необходимостью одинаковой политики стимулирования всех АЭ или невозможностью точно определить типы АЭ в системе. Вводится классификация исследуемых АС. Исходя из классификации, выделяются семь типов АС, и показывается, что решения для одних типов АС сводятся к решениям для других типов АС.

Производится постановка задачи управления составом управляющего звена. А именно, рассматривается АС, состоящая из одного АЭ и нескольких центров. Основной упор в данной задаче делается на исследование получающихся равновесий, стратегий, при которых ни одному из центров было бы не выгодно изменять свою стратегию.

Во второй главе "Унифицированные системы стимулирования" проводится анализ унифицированных систем стимулирования.

В разделе 2.1 рассматриваются свойства возможных производственных функций активных элементов, под которыми понимается зависимость выполненного действия (количества произведенной продукции) от типа АЭ и затрат. В разделе 2.2 для случая унифицированных функций стимулирования проводится исследование свойств функции действия, которые описывают зависимость реализуемого активным элементом действия от типа данного активного элемента при фиксированной унифицированной функции стимулирования.

В разделе 2.3 приводится решение задачи синтеза оптимальной унифицированной системы стимулирования для дискретной АС. Оптимальной называется функция стимулирования, при которой затраты на реализацию некоторого фиксированного действия (или среднее действие в непрерывном случае) минимальны. Приводится алгоритм нахождения оптимальной функции стимулирования. Находятся условия, при которых активные элементы с разными типами будут реализовывать разные действия.

В разделе 2.4 рассматривается задача поиска оптимальной унифицированной системы стимулирования для непрерывного случая (когда АС состоит из континуума различных АЭ). Приводится алгоритм нахождения оптимальной функции стимулирования для непрерывного случая.

В третьей главе "Модели и методы формирования состава исполнителей" на основании проведенного во второй главе исследования оптимальных функций стимулирования (задача управления при фиксированном составе) рассматриваются вопросы управления (исполнительным) составом АС — множеством АЭ.

В разделе 3.1. рассматривается задача динамического формирования состава. В динамике большую роль играют ожидания о будущих изменениях в составе АС и коэффициент дисконтирования. Именно, сегодняшнее решение о приеме на работу или увольнении зависит от ожидания будущих прибылей, или от ожидания увеличения прибыли за счет изменения состава АС.

В разделе 3.2 на основании рассмотренной модели АС с несколькими АЭ анализируются вопросы изменения типов имеющихся АЭ путем обучения.

В четвертой главе "Задача формирования управляющего состава АС с одним АЭ и несколькими центрами" исследуются свойства АС, состоящей из нескольких центров и одного АЭ в достаточно общих предположениях (накладываются только условия непрерывности и неотрицательности всех функций, компактность множества действий АЭ). В качестве одного АЭ может выступать агрегированный коллектив предприятия. Проблема заключается в исследовании вопроса роли каждого из центров в управлении активным элементом, в исследовании получающихся равновесий и распределении прибыли между различными участниками данной АС.

В разделе 4.1 приводятся основные определения (равновесие, оптимальность, угроза). В качестве равновесия используется концепция совершенных к подыграм равновесий Нэша. Подыгра в данном случае - выбор активным элементом его действия. Т.к. в данном разделе мы ограничиваемся рассмотрением статических игр, то активный элемент будет выбирать наилучшее для себя действие, поскольку ни один из центров не сможет в следующих периодах (которых нет) наказать его за неблагоприятный для центра выбор.

Проводится характеризация получающихся равновесий Нэша. Показывается, что вместо сложной стратегии — функции стимулирования в зависимости от каждого из реализуемых действий каждый из центров может использовать простую стратегию — перечислить несколько действия и выплаты при их реализации.

Показывается, что в некоторых играх невозможны равновесия без угроз (т.е. невозможны кооперативные равновесия).

В разделе 4.2 исследуется вопрос оптимальности различных получающихся равновесий. Показывается, что в АС с двумя центрами для любого неоптимального равновесия всегда существует равновесие, (слабо) доминирующее неоптимальное.

В разделе 4.3 исследуется вопрос существования равновесий в системе. Многие авторы замечали, что, несмотря на возможность доказать некоторые факты о существующих равновесиях в играх (даже сильных равновесий), схожих с играми в рассматриваемой работе, существование равновесия представляется хоть и вполне ожидаемым, однако является трудно доказываемым, особенно при большом количестве центров в системе. Поэтому теоремы о существовании равновесий, как правило, накладывают существенные ограничения на условия задачи. В данной работе доказывается, что в АС с двумя центрами всегда существует равновесие.

В разделе 4.4 проводится анализ кооперативных равновесий (сотрудничества) и соревновательных (с угрозами) равновесий. Приводятся достаточные и необходимые условия их существования.

В разделе 4.5 на основании результатов разделов 4.1-4.4 рассматривается задача формирования руководящего звена. Именно, задача формулируется следующим образом. Путь некий метацентр хочет назначить центры в активной системе и распределить между ними доходы от функционирования системы. При этом он сам не может (или не хочет) выступать в роли центра. Подобная ситуация встречается довольно часто в реальной жизни, когда некоторый чиновник отвечает за формирование штата управляющего звена и распределение полномочий, но не может напрямую влиять на решения об управляемом элементе (в качестве активного элемента может, например, выступать некоторое предприятие, в качестве управляющих центров — совет директоров).

Приложение 1 содержит доказательства сформулированных в работе утверждений, лемм и теорем.

Приложение 2 содержит обзор известных моделей унифицированных систем стимулирования.

Приложение 3 содержит обзор известных моделей АС с несколькими центрами.

Приложение 4 содержит обзор известных методов и моделей формирования состава АС.

В Приложении 5 рассматриваются персонифицированные системы стимулирования как в непрерывном, так и в дискретном случаях, для которых решается задача нахождения оптимальной системы стимулирования (задача минимизации затрат при фикси-рованном среднем действии).

В Приложении 6 решается задача динамического формирования состава фирмы.

Глава 1

ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ СОСТАВОМ АКТИВНЫХ СИСТЕМ

1.1. Классификация задач управления составом

В настоящем разделе рассматриваются возможные задачи управления составом АС. Анализируется место задачи управления составом АС в совокупности задач управления АС. Рассматриваются три подхода к решению задачи формирования состава АС. Показывается, что для решения задачи управления составом АС необходимо уметь решать задачу управления фиксированным составом АС, которая фактически является задачей об оптимальном стимулировании АЭ.

Приводится классификация задач управления составом АС.

Рассмотрим возможные постановки задач управления составом АС. Для этого введем следующие обозначения:

$I_0 = \{1, 2, \ldots, n\}$ — фактический (начальный) состав АС, состоящей из n АЭ, $|I_0| = n$;

I — конечный состав АС (результат решения задачи управления составом);

I' — множество потенциальных (фактических и претендентов) участников АС — универсальное множество: $I \subseteq I'$, $I_0 \subseteq I'$;

$\Delta^+(I, I_0) = I \setminus I_0$ — множество АЭ, принятых на работу (включенных в состав АС);

$\Delta^-(I, I_0) = I_0 \setminus I$ — множество АЭ, уволенных с работы (исключенных из состава АС);

$\Delta(I_0, I')$ — множество кандидатов на включение в состав АС;

$\Phi(I, I_0)$ — функционал, ставящий в соответствие начальному и конечному составу действительное число — *эффективность управления составом*.

Остановимся на обсуждении природы функционала эффективности управления составом чуть более подробно. Как отмечалось выше, существует задача управления фиксированным составом АС (см. рисунок 1). Ее решением является набор стратегий центра (центров), которые максимизируют эффективность управления, определяемую как гарантированное значение целевой функции центра на множестве решений игры АЭ (то есть — на множестве их стратегий, являющихся равновесными при заданном управлении).

Задача формирования состава АС формулируется как задача поиска допустимого состава, эффективность управления которым была бы максимальна. При этом явно или по умолчанию подразумевается, что АС как бы формируется заново. Если же речь идет о формировании нового состава для уже существующей АС, то есть об *оптимизации состава* — переходе от состава I_0 к составу I, то критерий эффективности должен зависеть и от начального, и от конечного состава, так как часть увольняемых работников необходимо трудоустраивать, обеспечивать их пособиями и т.д.

В зависимости от необходимого действия в задаче управления составом можно рассматривать следующие подзадачи:

(1) **Формирование состава 'с нуля'**, т.е. из предлагаемых на рынке труда специалистов требуется сформировать наилучший состав для фирмы. Как правило, в связи с большими затратами на начальное обучение (работы, создания коллектива, наработки клиентской базы и т.п.) таким образом состав формируется только при создании фирмы, когда нет других альтернатив.

(2) **Увеличение состава — прем сотрудников на работу**, т.е. увеличение численности сотрудников. Здесь же надо решать вопрос о том, насколько эффективным будет поиск и принятие на работу новых сотрудников, какие это должны быть сотрудники.

(3) **Сокращение состава — увольнение сотрудников**, то есть уменьшение численности персонала фирмы. При этом надо решать, надо ли увольнять сотрудников, какое количество сотрудников надо увольнять, каких сотрудников надо увольнять. Очевидно, что при этом должны увольняться худшие сотрудники. Данный процесс происходит, если на фирме наблюдается избыток кадров, нет возможности для принятия новых сотрудников.

(4) **Изменение состава сотрудников**, т.е. решение задач о принятии и увольнении сотрудников одновременно. Данный процесс происходит если на фирме происходит, например, серьезное перепрофилирование или имеющийся состав не удовлетворяет необходимым требованиям, а последовательное увольнение и принятие на работу невозможно (деятельность должна осуществляться постоянно).

Если мы учтем то, что решаемая подзадача зависит от количества работающих на фирме сотрудников, то классификацию задач лучше всего представить в форме таблицы (см. таблицу 1).

Таблица 1. Задачи управления составом АС

	Расширение состава	Сокращение состава	Изменение состава
Нет сотрудн.	Формирование состава	—	—
Есть сотрудн.	Рекрутинг	Увольнение	Реорганизация

Таким образом, из множества задач управления составом АС можно выделить задачи формирования состава и задачи оптимизации состава (критерий классификации — наличие или отсутствие начального состава) — см. рисунок 2. Среди задач оптимизации состава выделим как частные случаи *задачи расширения состава* ($|I| > |I_0|$), *задачи сокращения состава* ($|I| < |I_0|$) и *задачи замены состава* ($|I| = |I0|$, $I \neq I_0$) — см. рисунок 2.

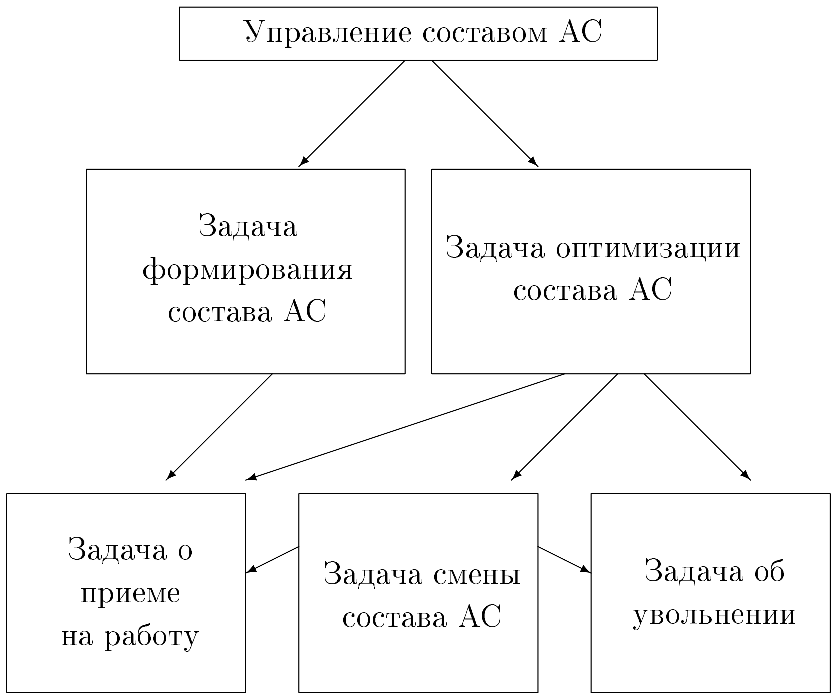

Рис. 2. Задачи управления составом АС

Приведем формальные постановки задач управления составом АС.

Задача формирования состава характеризуется отсутствием начального состава ($I_0 = \emptyset$):

$$\Phi(I, \emptyset) \to \max_{I \in 2^{I'}}. \quad (1.1)$$

Задача оптимизации состава[1] (при фиксированном начальном составе I_0) в общем случае имеет вид:

$$\Phi(I, I_0) \to \max_{I \in 2^{I'}}. \quad (1.2)$$

Задача расширения состава (иногда ее называют *задачей о приеме на работу*) отличается от 1.2 тем, что $\Delta^- = \emptyset$, и может решаться при ограничении (сверху или снизу) на число вновь включаемых в состав АС элементов. Например, если первоначальный состав включал n АЭ и задано ограничение m на максимальное число вновь принимаемых на работу АЭ, то задача примет вид:

$$\Phi(I, I_0) \to \max_{I \in 2^{I'}, I_0 \subseteq I, |I| \leq n+m}. \quad (1.3)$$

[1]Понятно, что задача оптимизации состава может рассматриваться как общая задача управления составом, а все остальные задачи (формирования состава, его изменения и т.д.) — как ее частные случаи. Выделение задачи формирования состава обусловлено исторической традицией.

Задача сокращения состава (иногда ее называют *задачей об увольнении*) формулируется аналогичным образом (отличие в том, что новый состав не может превышать первоначальный) — найти множество $\Delta^- \subseteq 2^{I_0}$, максимизирующее эффективность. Например, если первоначальный состав включал n АЭ и задано ограничение m на минимальное число сокращаемых сотрудников, то задача примет вид:

$$\Phi(I, I_0) \to \max_{I = I_0 \setminus \Delta^-, |\Delta^-| \geq m}. \tag{1.4}$$

Задача замены состава заключается в поиске возможных множеств увольняемых и нанимаемых сотрудников, максимизирующих эффективность. Например, если первоначальный состав включал n АЭ и задано число m заменяемых сотрудников, то задача примет вид:

$$\Phi(I, I_0) \to \max_{I \in 2^{I'}, |\Delta^+| = |\Delta^-| = m}. \tag{1.5}$$

В зависимости от того, насколько изменяется состав АС при изменении состава, будем различать "индивидуальные" и "пакетные" изменения.

В качестве одного из оснований классификации задач формирования состава выберем наличие динамики. Будем различать статические задачи, т.е. задачи, в которых не учитывается влияние времени, оперативное управление, т.е. задачи, в которых затрагиваются краткосрочные процессы формирования состава (до нескольких лет), и стратегическое управление, т.е. задачи, в которых принимается во внимание достаточно большой промежуток времени, в течение которого на производстве происходит смена поколений (десятки лет). Естественно, что решения статической задачи и задач оперативного и стратегического управления значительно различаются.

При решении задач формирования состава большую роль играет уровень , для которого решается задача. Будем отдельно рассматривать исполнителей (нижнее звено) и управляющие органы.

Важными параметрами при решении задач будет пособие по безработице — сколько мы должны заплатить работнику за увольнение, и минимальный уровень благосостояния — какую минимальную полезность мы должны обеспечить вновь принимаемому сотруднику.

Индивидуальная или унифицированная система стимулирования выбирается исходя из свойств самой активной системы (когда центр знает хотя бы что-то об активном элементе, и имеет право использовать свое знание — индивидуальная система стимулирования, иначе — унифицированная система стимулирования). Также активной системой в целом определяется наличие или отсутствие неопределенности.

Необходимо особо оговорить тот факт, что на этапе формирования состава фирмы (имеется в виду среднее или высшее звено) под активным элементом можно (и нужно) понимать не только единичный элемент как таковой, но руководящий элемент вместе с подчиненными тоже. Это, вообще говоря, выполняется на практике, поскольку при приеме на новую работу какого-то сотрудника (бывшего на руководящей должности) он "тянет" за собой всю свою старую команду. В этом контексте данного сотрудника можно рассматривать как один активный элемент, причем его типом будет не только его тип как таковой, но будет отражать свойства сразу всей команды в целом.

Теперь после классификации задач управления составом АС и рассмотрения различных подходов к решению задач формирования состава АС перейдем к постановке задач исследования.

1.2. Постановка задач

В данном разделе описываются основные модели активных систем, для которых будет в дальнейшем решаться задача управления составом. В данной работе анализируются две АС: первая — АС, состоящая из одного центра и нескольких АЭ (для решения задачи управления составом исполнительного звена) и вторая — АС, состоящая из одного АЭ и нескольких центров (для решения задачи управления составом управляющего звена).

Принципиальное отличие данных АС состоит в том, что в отличии от АС с одним центром в АС с несколькими управляющими центрами возникает игра между центрами, и поэтому, кроме нахождения оптимальных функций стимулирования, в данной АС необходимо еще уметь находить равновесные состояния АС, т.е. такие стратегии центров (функции стимулирования), при которых ни одному из центров не будет выгодно менять свою стратегию с равновесной на какую-либо другую при условии, что другие центры используют равновесную стратегию.

Для модели АС с одним центром и несколькими АЭ будет проведена классификация АС по разным признакам и выделены семь основных классов АС. Леммы, которые приведены в данном разделе, утверждают, что решения для некоторых из классов рассмотренных АС сводятся к решениям для других классов АС. В целом в дальнейшем будут рассмотрены (без ограничения общности) два основных класса АС: с конечным числом АЭ и с бесконечным числом АЭ, причем центр не может определить тип каждого из АЭ и поэтому использует унифицированную систему стимулирования (или он не может применять персонифицированные системы стимулирования).

Сперва рассмотрим (см. **[11]**) двухуровневую АС, состоящую из одного центра и $n \geq 1$ АЭ.

Обозначим $H(x) : X \to \mathbb{R}^1_+$ — функция дохода центра, в зависимости от действия $x \in X$, реализованного всей системой в целом, где X — множество возможных действий системы, $c_i(x_i) = c(r_i, x_i)$ — функция затрат i-го активного элемента в зависимости от выбранного им действия $x_i \in X_i$ и его типа $r_i \in \Omega \subset \mathbb{R}^1$, где X_i — множество возможных действий i-го активного элемента, $i = \overline{1, n}$.

В дальнейшем будем считать, что типы АЭ упорядочены в соответствии с индексами, т.е. $r_1 \leq r_2 \leq \ldots \leq r_n$. В связи с этим "лучшим" будем называть АЭ с большим типом r_i, или, в соответствии с предположением об упорядоченности, с бóльшим номером. Данное название будет объяснено позднее при определении функций затрат АЭ. Соответственно "худшим" АЭ будем называть АЭ с меньшим типом, или, что то же самое, с меньшим порядковым номером.

Действие всей системы задается как некоторая функция от действий активных элементов $G: X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to X$ (заметим, что можно положить $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ и $G(\cdot)$ — тождественная функция).

Задачей центра является максимизация своей целевой функции

$$H(G(x_1, x_2, \ldots, x_n)) - \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(x_i)$$

путем выбора вектора функций $(\sigma_1(x_1), \ldots, \sigma_n(x_n))$, где $\sigma_i : X_i \to \mathbb{R}_1^+$ — стимулирование i-го активного элемента при выборе им действия x_i, $i = \overline{1,n}$.

Примем следующий порядок функционирования активной системы. Сначала центр, имея информацию о функциях $c_i(x_i)$, $i = \overline{1,n}$, и зная $H(x)$, задает вектор-функцию стимулирования

$$\sigma(x_1, \ldots, x_n) = (\sigma_1(x_1), \ldots, \sigma_n(x_n)).$$

Знания центра о функциях $c_i(x_i)$ может быть точным или вероятностным.

Активный элемент при известной функции стимулирования посредством выбора действия x_i максимизирует свою целевую функцию

$$\sigma_i(x_i) - c_i(x_i) \to \max_{x_i \in X_i}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{1.6}$$

В случае, если максимум (1.6) достигается в нескольких точках, будем предполагать, что активный элемент выбирает действие в соответствии с Гипотезой Благожелательности (ГБ, см. [**11**]), а именно, такое действие из множества

$$\operatorname*{Argmax}_{x_i \in X_i}(\sigma_i(x_i) - c_i(x_i)),$$

которое более выгодно центру. Заметим, что при вероятностной неопределенности типа реализуемое в зависимости от функции стимулирования действие с точки зрения центра является случайной величиной. В дальнейшем будем говорить, что АЭ *реализует* действие при заданной системе стимулирования, если он выбирает его в соответствии со своей целевой функцией.

Центр будет выбирать такие функции стимулирования, чтобы при рациональном выборе активными элементами своих действий доставить максимум своей целевой функции

$$\mathbf{E}\left(H(G(x_1, x_2, \ldots, x_n)) - \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(x_i)\right),$$

где $\mathbf{E}$ — оператор математического ожидания.

Обобщая сказанное, порядок функционирования активной системы следующий:

(1) Центр выбирает функции стимулирования;
(2) Активные элементы на основании функций стимулирования выбирают действия;
(3) Производятся выплаты.

Необходимо отметить, что в данной модели предполагается, что все участники АС сообщают друг другу только правду и всегда выполняют свои обещания (по выплатам).

Для дальнейшего изложения введем следующие предположения:

А1. $X = X_1 = X_2 = \ldots = X_n = \mathbb{R}^1_+$, $G(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$;

А2. Функции затрат $c(r_i, x_i)$ являются всюду дважды дифференцируемыми неотрицательными возрастающими и выпуклыми по x_i функциями, $i = \overline{1, n}$;

А3. Функция дохода центра есть всюду дважды дифференцируемая вогнутая функция,

$$H(0) \geq 0, \quad H'(0) > 0, \quad H''(x) < 0 \quad \forall x \in X.$$

Введем множество M' неотрицательных всюду определенных на X функций стимулирования:

$$M' = \{\sigma(x) : X \to [0, +\infty)\}.$$

Введем множество M'' полунепрерывных сверху функций стимулирования:

$$M'' = \{\sigma(x) : X \to \mathbb{R} : \quad \forall x_j \in X, x_j \to \bar{x}, \\ \sigma(x_j) \geq \sigma(\bar{x}) \Rightarrow \sigma(x_j) \to \sigma(\bar{x})\}$$

(для многих доказательств непрерывность является слишком жестким требованием, которое не позволит доказать многие результаты, в то время как полунепрерывности сверху будет достаточно. К тому же часто используемые квазикомпенсаторные функции стимулирования полунепрерывны сверху).

Будем считать, что класс возможных функций стимулирования ограничен пересечением множеств M' и M'':

$$M = M' \cap M'',$$

т.е. центр ничего не забирает у активного элемента (штрафы запрещены), а только может предложить ему стимулирование за выбор действия, и функции стимулирования являются полунепрерывными сверху.

Предположим также, что для функций затрат выполнены следующие свойства:

Р1. Затраты при выборе нулевого действия равны нулю:

$$c(r, 0) = 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}^1;$$

Р2. При увеличении выбираемого действия необходимые затраты увеличиваются:

$$c_x(r, x) > 0;$$

Р3. При улучшении типа активного элемента (увеличении r) необходимые затраты уменьшаются:

$$c_r(r, x) < 0;$$

Р4. При увеличении действия дополнительные затраты на увеличение действия увеличиваются:

$$c_{xx}(r, x) > 0;$$

Р5. Дополнительные затраты на реализацию действия уменьшаются при улучшении типа:

$$c_{rx}(r, x) < 0.$$

Предположения **А1**-**А3** и **Р1**-**Р5** будем считать выполненными в ходе всего последующего изложения при рассмотрении данной модели.

В связи с предположением **P2** теперь понятна суть названий "лучший" и "худший" АЭ. Именно, под лучшим АЭ понимается АЭ, который может реализовать действие, затратив на это меньше усилий. Соответственно под худшим АЭ понимается АЭ, который на реализацию того же действия тратит больше усилий. В АС с конечным числом АЭ можно выделить как самый лучший, так и самый худший АЭ.

Мы будем предполагать существование такой точки x^0, что

$$H(x) - c(r,x) < 0 \qquad \text{при } x > x^0$$

для любого r из множества возможных типов АЭ. Из этого, в частности, вытекает, что никогда не будет реализовано действие, большее x^0.

В силу предположения **P1** и условия на класс допустимых систем стимулирования M у каждого из АЭ есть *право участия*: он всегда может выбрать нулевое действие, при котором целевая функция будет неотрицательной.

В дальнейшем будем предполагать, что соответствующие множества Argmax непусты, минимумы и максимумы, которые встретятся, достижимы. Эти требования можно обосновать с помощью непрерывности (полунепрерывности сверху) соответствующих функций затрат и доходов и замкнутости множества X.

В соответствии со структурой описанной АС, информированностью центра и порядком выбора АЭ своих действий проведем классификацию АС. Во-первых, будем различать АС *с одним* или *несколькими* (возможно, случайным числом) АЭ. Во-вторых, будем различать *детерминированные* АС, т.е. те, в которых состав участников и их характеристики фиксированы и известны центру, и АС *с вероятностной неопределенностью*, т.е. те, в которых состав участников определяется некоторым вероятностным законом. В последних будем различать АС с фиксированным и случайным набором АЭ. В АС с вероятностной неопределенностью в дальнейшем будем считать, что типы АЭ независимы и одинаково распределены по некоторому вероятностному закону распределения на $\Omega = [r_0, r_1]$.

Дискретными будем называть АС (возможно, с вероятностной неопределенностью), в которых типы АЭ могут иметь только конечное число значений, а *непрерывными* будем называть АС, в которых типы АЭ имеют на Ω непрерывные функции распределения с ненулевой плотностью (заметим, что этим все возможные ситуации не исчерпываются).

Каждая из рассматриваемых активных систем описывается четверкой $(H(\cdot), I, \Omega', c(r,x))$, где

$H : X \to \mathbb{R}^1_+$ — функция дохода центра; удовлетворяет стандартным условиям;

I — множество активных элементов, их число может быть конечно и равно n, или случайно распределено по некоторому вероятностному закону $G(n)$, или бесконечно; в последнем случае записываем $I = [0, 1]$;

$\Omega' \subset \Omega$ — известное центру множество типов АЭ: конечное множество или бесконечное; центр может точно знать тип каждого активного элемента или знать только вероятностное распределение типов; обозначения: $(r_1, \ldots, r_n)$ — центр знает тип каждого АЭ при конечном числе элементов n, $\{r_i\}$ — центр знает только множество типов при конечном числе элементов; $r(i)$ — при бесконечном числе элементов центр знает тип каждого из активных элементов; $\{r(i)\}$ — при бесконечном числе элементов центр знает бесконечное множество типов АЭ; $F(r)$ — при конечном или бесконечном числе элементов центр знает функцию распределения типов АЭ;

$c(r, x)$ при бесконечном числе элементов и $c_i(x) = c(r_i, x)$ при бесконечном числе элементов — функции затрат активных элементов в зависимости от их типа.

Таким образом, мы (при ограничении на возможные сочетания параметров) рассматриваем следующие активные системы (см. табл. 2):

(1) $(H(\cdot), n, (r_1, \ldots, r_n), c(r, x))$ — Активная система с числом элементов n, центр знает тип каждого АЭ;
(2) $(H(\cdot), n, \{r_i\}, c(r, x))$ — Активная система с числом элементов n, центр знает множество типов АЭ;
(3) $(H(\cdot), n, F(r), c(r, x))$ — Активная система с числом элементов n, центр знает функцию распределения типов АЭ;
(4) $(H(\cdot), G(n), F(r), c(r, x))$ — Активная система со случайным конечным числом элементов, центр знает функцию распределения типов АЭ;
(5) $(H(\cdot), [0, 1], r(i), c(r, x))$ — Активная система с бесконечным числом элементов, центр знает тип каждого АЭ;
(6) $(H(\cdot), [0, 1], \{r(i)\}, c(r, x))$ — Активная система с бесконечным числом элементов, центр знает множество типов АЭ, но не знает, какой тип имеет конкретный АЭ;
(7) $(H(\cdot), [0, 1], F(r), c(r, x))$ — Активная система с бесконечным числом элементов, центр знает только функцию распределения типов АЭ.

Таблица 2. Типы рассматриваемых активных систем

	Дискретные АС (раздел 2.3)	Непрерывные АС (раздел 2.4)
Центр знает типы АЭ	АС1	АС5
Центр знает множество типов АЭ	АС2	АС6
Центр знает функцию распределения типов АЭ	АС3	АС7
Случайное кол-во АЭ, центр знает функцию распределения типов АЭ	АС4	

Заметим, что не может быть непрерывных АС со случайным количеством АЭ, поскольку непрерывность предполагает бесконечное множество АЭ (но не конечное, и задача будет выглядеть соответственно).

Сразу же можно доказать эквивалентность решения задач нахождения оптимальной функции стимулирования для различных типов АЭ.

Лемма 1.2.1. Решение задачи стимулирования для АС2 сводится к решению задачи стимулирования для АС3[2].

Лемма 1.2.2. Решение задачи стимулирования для АС6 сводится к решению задачи стимулирования для АС7.

Унифицированной будем называть систему стимулирования, при которой функция стимулирования одинакова для всех АЭ. При этом выплаты АЭ зависят только от действия, которое этот АЭ реализовал и никак не зависят от его типа, номера и т.д. При заданной системе стимулирования центр не знает типов АЭ (или не хочет использовать свое знание), но может иметь (истинную) информацию о функции распределения типов (или, например, интервальную оценку типов и т.п.).

Персонифицированной будем называть систему стимулирования, при которой центр знает (допустим, после выявления в результате тестов) тип каждого из активных элементов, и в зависимости от типа (или в зависимости от информации о типе) назначает функцию стимулирования. При этом центр должен быть способен выявить информацию о типе АЭ (например, по результатам предыдущей работы АЭ), активному же элементу при этом будет выгодно занижать свой тип, чтобы центр покрывал АЭ бóльшие затраты.

Рассмотрим дискретную (т.е. с конечным числом АЭ) активную систему, в которой центр знает множество типов. Пусть $\mathcal{Q}(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(y_i(\sigma))$ — затраты центра на стимулирование при выбранной им функции стимулирования и при условии рационального выбора активными элементами своих действий y_i (т.е. каждый активный элемент выбирает лучшее для себя действие): $y_i = y_i(\sigma)$. Напомним, что в при неопределенности (вероятностной) значения y_i являются случайными величинами. Задачей центра является максимизация функционала

$$\mathbf{E}\left(H\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \mathcal{Q}(\sigma)\right) \to \max_{\sigma}. \tag{1.7}$$

Заметим, что действия y_i выбираются активными элементами в зависимости от $\sigma(\cdot)$ (и, разумеется, в зависимости от типов), и поэтому можно считать, что они являются функциями (точнее — функционалами) от $\sigma(\cdot)$.

Мы здесь явно предположили, что центр не может использовать в своих действиях смешанных стратегий (назначать с некоторыми вероятностями различные системы стимулирования). В пользу этого предположения говорит тот факт, что в реально действующих фирмах не назначают стимулирования "с вероятностью". Это и естественно, поскольку в условиях неприятия активными Элементами риска центр, назначая различные стимулирования, вынужден будет оплачивать активным элементам большие суммы (они будут таким образом страховаться от риска).

Однако в пользу смешанных стратегий говорит тот факт, что, назначая их, центр получает большую свободу в выборе стратегий и, как следствие, может получить большую прибыль (большее среднее значение целевой функции). В дальнейшем вопрос о смешанной стратегии поведения центра будет изучен подробнее и

[2]Доказательства всех утверждений, лемм и теорем приведены в электронной версии данной работы, которая размещена на сайте www.mtas.ru.

будет показано, в каких случаях центр точно будет придерживаться чистых стратегий. Мы же пока ограничимся случаем фиксированной системы стимулирования (условия на использование только чистых стратегий в АС с конечным числом АЭ приводится в разделе 2.3).

Рассмотрим задачу максимизации целевой функции (1.7) в случае унифицированной системы стимулирования при конечном числе активных элементов и отсутствии неопределенности:

$$\begin{aligned}(1.8)\qquad &\max_{\sigma}\left(H\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)-\mathcal{Q}(\sigma)\right)=\\ &=\max_{\sigma, y=\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}\left(H(y)-\mathcal{Q}(\sigma)\right)=\\ &=\max_{y}\left(H(y)-\min_{\sigma: y=\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}\mathcal{Q}(\sigma)\right).\end{aligned}$$

Таким образом, если мы обозначим

$$(1.9)\qquad \mathcal{S}(y)=\min_{\sigma: y=\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}\mathcal{Q}(\sigma),$$

и научимся находить функцию $\mathcal{S}(y)$, задача (1.7) сведется к нахождению минимума функции скалярного аргумента.

Учитывая вышесказанное, задача синтеза оптимальной системы стимулирования выписывается в следующем виде:

$$(1.10)\qquad H(y)-\mathcal{S}(y)\to\max_{y};$$

$$(1.11)\qquad \mathcal{S}(y)\to\min_{\{y_i\}};$$

$$(1.12)\qquad y_i\in\operatorname*{Argmax}_{x\in X}(\sigma(x)-c(r_i,x));$$

$$(1.13)\qquad \sum_{i=1}^{n} y_i=y.$$

При этом основной (наиболее трудоемкой) задачей в (1.10)-(1.13) является задача (1.11)-(1.13).

Для всех активных систем (АС1)-(АС7) будем решать задачу, аналогичную (1.11)-(1.13). Вообще говоря, данный подход не совсем корректен, поскольку, например, в случае с неопределенностью мы должны решать задачу

$$(1.14)\qquad \mathbf{E}\left(H\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)-\mathcal{S}(\sigma)\right)\to\max_{\sigma},$$

которая отнюдь не эквивалентна задаче

$$(1.15)\qquad H\left(\mathbf{E}\sum_{i=1}^{n} y_i\right)-\mathbf{E}\,\mathcal{S}(\sigma)\to\max_{\sigma}$$

(для решения которой мы и должны решать (1.11)-(1.13)), однако при линейной функции $H(\cdot)$ такой подход справедлив, и именно этим оправдывается используемая замена задач.

Для изменения (1.11)-(1.13) (в соответствии с требованием каждой из активных систем (АС1)-(АС7)) необходимо заменить знак суммы на математическое ожидание, для учета вероятностной неопределенности необходимо поставить математическое ожидание перед знаком суммы, при полной информированности центра надо заменить унифицированную систему стимулирования на индивидуальные для каждого из активных элементов, для конечного случайного количества активных элементов необходимо усреднять по количеству элементов. Таким образом, для различных АС соответствующие задачи выглядят следующим образом:

Активная система 1 (АС1):

$$H(y) - \mathcal{S}(y) \to \max_{y}; \tag{1.16}$$

$$\mathcal{S}(y) \to \min_{\{y_i\}}; \tag{1.17}$$

$$y_i \in \operatorname*{Argmax}_{x \in X}(\sigma_i(x) - c(r_i, x)); \tag{1.18}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = y. \tag{1.19}$$

Активная система 2 (АС2):

$$H(y) - \mathcal{S}(y) \to \max_{y}; \tag{1.20}$$

$$\mathcal{S}(y) \to \min_{\{y_i\}}; \tag{1.21}$$

$$y_i \in \operatorname*{Argmax}_{x \in X}(\sigma(x) - c(r_i, x)); \tag{1.22}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = y. \tag{1.23}$$

Активная система 3 (АС3):

$$H(y) - \mathcal{S}(y) \to \max_{y}; \tag{1.24}$$

$$\mathcal{S}(y) \to \min_{\{y_i\}}; \tag{1.25}$$

$$y_i \in \operatorname*{Argmax}_{x \in X}(\sigma(x) - c(r_i, x)); \tag{1.26}$$

$$n\,\mathbf{E}\,y_i = y. \tag{1.27}$$

Активная система 4 (АС4):

$$H(y) - \mathcal{S}(y) \to \max_{y}; \tag{1.28}$$

$$\mathcal{S}(y) \to \min_{\{y_i\}}; \tag{1.29}$$

$$y_i \in \operatorname*{Argmax}_{x \in X}(\sigma(x) - c(r_i, x)); \tag{1.30}$$

$$\mathbf{E}\,n y_i = y. \tag{1.31}$$

Активная система 5 (АС5):

$$H(y) - \mathcal{S}(y) \to \max_y; \tag{1.32}$$

$$\mathcal{S}(y) \to \min_{\{y_r\}}; \tag{1.33}$$

$$y_r \in \operatorname*{Argmax}_{x \in X}(\sigma_r(x) - c(r, x)); \tag{1.34}$$

$$\mathbf{E}\, y_r = y. \tag{1.35}$$

Активная система 6 (АС6):

$$H(y) - \mathcal{S}(y) \to \max_y; \tag{1.36}$$

$$\mathcal{S}(y) \to \min_{\{y_r\}}; \tag{1.37}$$

$$y_r \in \operatorname*{Argmax}_{x \in X}(\sigma(x) - c(r, x)); \tag{1.38}$$

$$\mathbf{E}\, y_r = y. \tag{1.39}$$

Активная система 7 (АС7):

$$H(y) - \mathcal{S}(y) \to \max_y; \tag{1.40}$$

$$\mathcal{S}(y) \to \min_{\{y_r\}}; \tag{1.41}$$

$$y_r \in \operatorname*{Argmax}_{x \in X}(\sigma(x) - c(r, x)); \tag{1.42}$$

$$\mathbf{E}\, y_r = y. \tag{1.43}$$

В силу наличия неопределенности при фиксированной системе стимулирования значение функционала

$$H(y) - \mathcal{S}(y)$$

является случайной величиной (поскольку типы и, следовательно, действия случайны). Поэтому будем считать, что задачей центра является реализация некоторого действия $\bar{y}$ "в среднем", или, учитывая предположение **A1**, $\mathbf{E}\, y_i = \bar{y}$.

В соответствии с этим центр должен "в среднем" минимизировать затраты

$$\mathbf{E}\, \mathcal{Q}(\sigma) \to \min_{\sigma_i \in M} \tag{1.44}$$

при реализации среднего действия $\bar{y}$:

$$\mathbf{E}\, y_i = \bar{y}, \tag{1.45}$$

где M есть допустимое множество функций стимулирования.

Рациональное поведение АЭ заключается в выборе наилучшего y_i, т.е.

$$y_i \in \operatorname*{Argmax}_t(\sigma(t) - c_i(t)). \tag{1.46}$$

Решением задачи (1.44)-(1.46) является набор функций (или одна функция, если система унифицированная) $\{\sigma_i\}_{i=1}^n$ (оптимальных функций стимулирования) и (при данных типах активных элементов) набор действий АЭ $\{y_i\}_{i=1}^n$ (оптимальных действий активных элементов, согласованных с функциями стимулирования), а сама задача называется задачей синтеза оптимальной системы стимулирования.

Оптимальными будем называть функции стимулирования (системы стимулирования) активных элементов, которые являются решением задачи (1.44)-(1.46), реализуемые активными элементами действия при оптимальной системе стимулирования также называть *оптимальными*.

Лемма 1.2.3. Задача синтеза оптимальной системы стимулирования в АСЗ с вероятностной неопределенностью и количеством элементов n эквивалентна задаче синтеза оптимальной системы стимулирования в АСЗ с вероятностной неопределенностью и с одним элементом (и с увеличенным в n раз средним действием).

В дальнейшем без дополнительных пояснений мы будем использовать ту или иную модель активной системы в зависимости от простоты доказательства в той или иной модели.

Для унифицированных систем стимулирования определим *функцию действия* $f : \Omega \to X$, которая будет играть важную роль в последующем изложении, следующим (неоднозначным) образом:

$$f(r) \in \operatorname*{Argmax}_{x \geq 0}(\sigma(x) - c(r, x)).$$

Данная функция (точнее, одна из ее реализаций) есть соответствие между типом АЭ и действием, которое он реализует при данной (унифицированной) системе стимулирования.

Теперь перейдем к постановке задачи управления составом управляющего звена.

Прежде всего заметим, что при рассмотрении активных систем с несколькими управляющими центрами ситуация кардинально отличается от случая активной системы с одним центром. Основное отличие состоит в наличии игры между центрами, причем в силу их возможных противоположных интересов активному элементу отводится более важная роль: равновесия при наличии нескольких центров характеризуются тем, что активный элемент получает не только компенсацию своих затрат на реализацию действия, но и дополнительную ренту за то, что не выбирает действие, более выгодное какому-либо одному из центров.

При увеличении количества центров и при распределении доходов активной системы между ними множество реализуемых в активной системе с одним центром исходов может быть сильно изменено: с одной стороны, неизвестно, будут ли реализуемы (как равновесия) прежние действия, а, с другой стороны, за счет игры центров друг с другом множество равновесий может расшириться.

Специфика равновесий в модели с несколькими центрами заключается в следующем. Центры должны думать о стратегиях друг друга, и, отклоняясь от своей стратегии, должны понимать, что против них может быть образована коалиция, целью которой является сделать для активного элемента более привлекательным реализацию такого исхода, при котором доходы отклоняющегося центра были бы значительно меньше, чем раньше.

Итак, будем рассматривать двухуровневую активную систему (АС), состоящую из $n > 1$ центров и $m \geq 1$ активных элементов (АЭ).

Обозначим через $H_p(x) : X \to \mathbb{R}$ функцию дохода p-го центра, $p = \overline{1, n}$, в зависимости от действия $x \in X$, реализованного всей системой в целом, где X — множество возможных действий системы, $c_i(x_i)$ — функция затрат i-го АЭ в зависимости от выбранного им действия $x_i \in X_i$, где X_i — множество возможных действий i-го АЭ, $i = \overline{1,m}$.

Действие всей системы задается как некоторая функция G от действий всех АЭ $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m \to X$ (заметим, что в общем случае можно положить: $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m$ и $G(\cdot)$ — тождественная функция).

Задачей каждого из центров является максимизация своей целевой функции

$$H_p(G(x_1, x_2, \ldots, x_m)) - \sum_{i=1}^{m} \sigma_{pi}(x_i)$$

путем выбора вектора функций $(\sigma_{p1}(x_1), \ldots, \sigma_{pm}(x_m))$, где $\sigma_{pi} : X_i \to \mathbb{R}_1^+$ — стимулирования i-го АЭ при выборе им действия x_i, $p = \overline{1,n}$, $i = \overline{1,m}$.

Примем следующий порядок функционирования АС. Сначала p-й центр, зная функции $c_i(x_i)$, $i = \overline{1,m}$, и $H_p(x)$, но не зная, какие функции стимулирования выберут другие центры (т.е. центры выбирают свои функции стимулирования одновременно), задает вектор-функцию стимулирования $\sigma_p(x_1, \ldots, x_m) = (\sigma_{p1}(x_1), \ldots, \sigma_{pm}(x_m))$.

После сообщения функций стимулирования i-й АЭ на основании функций стимулирования $\sigma_{pi}(x_i)$ и функции затрат $c_i(x_i)$ выбирает некоторое действие (исход) x_i из множества своих возможных действий X_i. Считаем, что АЭ при известных функциях стимулирования посредством выбора действия x_i максимизирует свою целевую функцию

$$\sum_{p=1}^{n} \sigma_{pi}(x_i) - c_i(x_i) \to \max_{x_i}, \quad i = \overline{1,m} \tag{1.47}$$

и каждый из центров знает о правилах поведения всех АЭ.

В случае, если максимум (1.47) достигается в нескольких точках, будем предполагать, что АЭ выбирает действие в соответствии с некоторой функцией $\Psi_i : 2^{X_i} \to X_i$:

$$x_i = \Psi_i\left(\operatorname*{Argmax}_{x_i \in X_i}\left(\sum_{p=1}^{n} \sigma_{pi}(x_i) - c_i(x_i)\right)\right), \qquad \text{где}$$
$$\Psi_i(A) \in A \qquad \forall A \subseteq X_i.$$

Естественно предположить, что p-й центр будет выбирать такие функции стимулирования, чтобы при рациональном выборе АЭ своих действий доставить максимум своей целевой функции

$$H_p(G(x_1, x_2, \ldots, x_m)) - \sum_{i=1}^{m} \sigma_{pi}(x_i), \qquad p = \overline{1,n}.$$

Обобщая сказанное, запишем порядок функционирования АС следующим образом:

1) центры выбирают функции стимулирования;
2) АЭ на основании функций стимулирования выбирают действия;
3) в АС одновременно происходят все выплаты.

Необходимо отметить, что в данной модели предполагается, что все участники АС сообщают друг другу только правду и всегда выполняют свои обещания (по выплатам).

Для дальнейшего изложения ограничимся случаем $m = 1$ (в системе присутствует только один АЭ) и введем следующие предположения.

A1. $X = X_1$ есть компактное подмножество множества $\mathbb{R}^l_+$ $(l \geq 1)$, а $G(x_1)$ — тождественная функция:

$$G(x) = x.$$

A2. Функция затрат неотрицательна и всюду непрерывна.

A3. Функции дохода центров неотрицательны и всюду непрерывны.

Вместо предположения **A1** можно потребовать (наряду с **A2** и **A3**) замкнутость множества $X = X_1$ и существование такой точки x^0, что

$$\sum_{p=1}^{n} H_p(x) - c(x) < 0 \qquad \text{при } x > x^0.$$

Введем множество M' неотрицательных всюду определенных на X функций стимулирования (функций стимулирования, при которых центры не могут ничего забирать у АЭ):

$$M' = \{\sigma(x) : X \to [0, +\infty)\}.$$

Введем также множество M'' полунепрерывных сверху функций:

$$M'' = \{\sigma(x) : X \to \mathbb{R} : \\ \forall x_j \in X, x_j \to \bar{x}, \sigma(x_j) \geq \sigma(\bar{x}) \Rightarrow \sigma(x_j) \to \sigma(\bar{x})\}$$

(для многих случаев просто непрерывность является слишком жестким требованием, которое не позволит доказать многие результаты, в то время как полунепрерывности сверху будет достаточно. К тому же часто используемые квазикомпенсаторные функции стимулирования полунепрерывны сверху).

Будем считать, что класс возможных функций стимулирования ограничен пересечением множеств M' и M'':

$$M = M' \cap M'',$$

т.е. центры ничего не забирают у АЭ (штрафы запрещены), а только могут предложить ему стимулирование за выбор действия, и функции стимулирования являются полунепрерывными сверху.

Будем считать, что у АЭ есть право участия: если при любом действии его целевая функция меньше нуля (стимулирования заданы), то он может отказаться от участия в АС. В этом случае будем полагать выигрыши центров равными нулю (действие всей системы не определено). Для этого можно предположить наличия особой (возможно, изолированной) точки $\hat{x}$: $H_p(\hat{x}) = 0$, $p = \overline{1, n}$, $c(\hat{x}) = 0$. Выбрав эту точку, АЭ ничего не теряет (его затраты нулевые), и стимулирования в этой точке равны нулю (поскольку центры не могут предложить больше, чем сами получат в этой точке, а функции стимулирования не могут быть отрицательными). Часто в моделях в роли такой выделенной точки $\hat{x}$ выступает точка $x = 0$.

В дальнейшем вместо функции Ψ выбора АЭ будем указывать один элемент x^* множества X, который будет выбираться как наилучший с точки зрения АЭ при прочих равных возможностях: если он входит в множество

$$\operatorname*{Argmax}_{x \in X} \left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i(x) - c(x) \right)$$

оптимальных выборов АЭ, то АЭ выберет именно x^*. Этого будет достаточно, поскольку в данной статье мы будем рассматривать только равновесные стратегии (для которых и важен данный x^*), а при отклонении от равновесной стратегии, если АЭ может получить ненулевую выгоду, то он, увеличивая стимулирование, может сделать так, что множество лучших для АЭ точек будет тривиальным (состоять из одного элемента).

Заметим, что в данной модели бо́льшее количество центров не означает бо́льший контроль за АЭ (более точное знание исхода), как это бывает в жизни, поскольку мы предположили, что центр (центры) точно осведомлены о действии АЭ.

В дальнейшем будем предполагать, что соответствующие множества Argmax непусты, минимумы и максимумы, которые встретятся, достижимы. Эти требования можно обосновать с помощью непрерывности (полунепрерывности сверху) соответствующих функций затрат и доходов и замкнутости множества X.

Итак, кратко подведем итоги **первой главы.**

В разделе 1.1 рассмотрены возможные задачи управления составом АС и проанализировано место задачи управления составом АС в совокупности задач управления АС. Рассмотрены три различных подхода к решению задачи формирования состава АС. Показано, что для решения задачи управления составом АС необходимо уметь решать задачу управления фиксированным составом АС, которая фактически является задачей об оптимальном стимулировании АЭ.

В разделе 1.2 описаны основные модели активных систем, для которых будет в дальнейшем решаться задача управления составом. Как было сказано, нами анализируются две АС: первая — АС, состоящая из одного центра и нескольких АЭ (для решения задачи управления составом исполнительного звена) и вторая — АС, состоящая из одного АЭ и нескольких центров (для решения задачи управления составом управляющего звена). Среди АС с одним центром и несколькими АЭ выделяются два класса, которые в дальнейшем будем анализировать — АС с конечным числом АЭ и АС с бесконечным числом АЭ, причем в обоих случаях центр вынужден использовать унифицированную систему стимулирования.

Принципиальное отличие данных АС состоит в том, что в отличии от АС с одним центром в АС с несколькими управляющими центрами возникает игра между центрами, и поэтому, кроме отыскания оптимальных функций стимулирования, в данной АС необходимо еще уметь находить равновесные состояния АС, т.е. такие стратегии центров (функции стимулирования), при которых ни одному из центров не будет выгодно менять свою стратегию с равновесной на какую-либо другую при условии, что другие центры используют равновесную стратегию.

Глава 2

УНИФИЦИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ

Как было показано, для решения задачи управления исполнительным составом необходимо решать задачу управления фиксированным составом, т.е. уметь находить наилучшую функцию стимулирования для заданного состава.

В данной главе рассматривается задача синтеза оптимальной функции стимулирования для АС (как дискретных, так и непрерывных), в которой центр использует унифицированную систему стимулирования. Находятся свойства оптимальных функций стимулирования и описывается взаимосвязь действий активных элементов с различными типами. Приводятся алгоритмы нахождения оптимальной функции стимулирования как для случая АС с конечным числом элементов, так и для случая с бесконечным числом АЭ.

2.1. Функции затрат активных элементов

В данном разделе рассматривается взаимосвязь функции затрат и производственной функции активных элементов. Исходя из свойств производственной функции выводятся свойства функции затрат. Показывается, что свойства, которые нам потребуются в дальнейшем от функции затрат для рассмотрения задачи управления фиксированным составом, можно вывести исходя из разумных предположений о свойствах производственных функций.

Обозначим за $y > 0$ выпуск (действие) активного элемента, за $r > 0$ — некоторую его характеристику (тип), говорящую, например, о производительности в случае фирмы или образовании (таланте) в случае человека. Обозначим за c затраты активного элемента. Пусть выпуск y зависит от затрат и типа активного элемента следующим образом: $y = F(c, r)$, где F — некоторая дважды дифференцируемая производственная функция. Предположим, что функция $F(c, r)$ обладает следующими свойствами:

P 1.1. Затраты на реализацию нулевого действия (т.е. бездействие) равны нулю:

$$F(0, r) = 0;$$

P 1.2. При дополнительных затратах выпуск увеличивается:

$$F_c(c, r) \equiv \frac{\partial F(c, r)}{\partial c} > 0;$$

P 1.3. Дополнительный выпуск на единицу дополнительных затрат уменьшается при увеличении самих затрат (вогнутость по c):

$$F_{cc}(c, r) \equiv \frac{\partial^2 F(c, r)}{\partial c^2} < 0;$$

Р 1.4. Выпуск увеличивается при увеличении типа активного элемента:

$$F_r(c,r) \equiv \frac{\partial F(c,rT)}{\partial r} > 0;$$

Р 1.5. При улучшении типа активного элемента количество продукции, производимой на одну дополнительную единицу стимулирования, увеличивается:

$$F_{cr}(c,r) \equiv \frac{\partial^2 F(c,r)}{\partial c \partial r} > 0.$$

Пример 1. Всеми перечисленными свойствами обладают функции Кобба-Дугласа

$$F(c,r) = F_0 c^{\alpha} r^{1-\alpha}, \tag{2.1}$$

где $\alpha \in (0;1)$, $F_0 > 0$.•

Определим минимально необходимые затраты на реализацию действия y как

$$c(r,y) = \min\{c \geq 0 | F(c,r) \geq y\}.$$

Назовем функцию $c(\cdot,\cdot)$ функцией затрат активного элемента. В силу положительности $F_c(c,r)$ получаем, что $c(r,y)$ определяется по $F(c,r)$ как обратная функция по аргументу c.

Пример 2. Для функции Кобба-Дугласа затраты c как функция от r и y есть

$$\begin{aligned} c(r,y) &= \left(\frac{y r^{\alpha-1}}{F_0}\right)^{(1/\alpha)} \\ &= \left(\frac{1}{F_0}\right)^{1/\alpha} y^{1/\alpha} r^{(1-1/\alpha)} = c_0 y^{\beta} r^{1-\beta}, \end{aligned}$$

где $c_0 = F_0^{-1/\alpha}$, $\beta = 1/\alpha > 0$.•

Везде в дальнейшем будем предполагать, что производственная функция $F(c,r)$ обладает свойствами **Р 1.1-Р 1.5**.

Лемма 2.1.1. Функция затрат удовлетворяет следующим свойствам:

Р 2.1. Стимулирование для выбора нулевого действия равно нулю:

$$c(r,0) = 0;$$

Р 2.2. При увеличении желаемого действия необходимое стимулирование увеличивается:

$$c_y(r,y) > 0$$

(как легко видеть, данное свойство является следствием свойства **Р 2.4** и $c_y(r,0) > 0$);

Р 2.3. При улучшении типа активного элемента необходимое стимулирование уменьшается:

$$c_r(r,y) < 0;$$

Р 2.4. При увеличении действия затраты на дополнительное увеличение действия возрастают:

$$c_{yy}(r,y) > 0.$$

При дополнительном условии постоянства отдачи от масштаба смешанная производная

$$c_{yr}(r,y) < 0$$

(назовем это свойство **P 2.5**).

Заметим теперь, что смешанная производная по y и r есть

$$c_{yr}(r,y) = -\frac{c_y(r,y)F_{cr}(c,T) + F_{cc}(c,r)c_y^2(r,y)}{F_c(c,r)}$$

и, вообще говоря, не имеет постоянного знака (однако постоянный знак гарантируется условием постоянства отдачи от масштаба).

Пример 3. Рассмотрим функцию $F(r,c) = \sqrt{rc}$. Тогда $c(r,y) = y^2/r$, а производные, соответственно, равны:

$$c_r(r,y) = -y^2/r^2; \quad c_r(r,y) = 2y/r;$$

$$c_{yy}(r,y) = 2/r; \quad c_{ry}(r,y) = -2y/r^2. \bullet$$

Замечание. Естественно предположить, что производственная функция $F(c,r)$ удовлетворяет условиям Инадо:

$$F_c(0,r) = \infty, \qquad F_c(\infty,r) = 0,$$

$F(c,r)$ — вогнутая по c функция. Тогда $c(r,y)$ удовлетворяет, соответственно, условиям $c_y(r,0) = 0$, $c_y(r,\infty) = \infty$, $c(r,y)$ — выпуклая по y функция. Функция Кобба-Дугласа полностью удовлетворяет этим условиям.

Рассмотрим вопрос о том, как изменяются свойства функции затрат при монотонном преобразовании типов активных элементов. Ответ на этот вопрос дает следующая лемма.

Лемма 2.1.2. Если функция затрат $c(r,x)$ обладает свойствами **P 2.1–P 2.5**, то этими же свойствами обладает и функция затрат $\tilde{c}(r^*,x) = \ (F^{-1}(r^*),x)$, где $r^* = F(r)$, а $F : \Omega \to \Omega_1$ — непрерывно-дифференцируемая монотонно возрастающая функция (предполагаем, что и область возможных типов активных элементов изменяется соответствующим образом, $\Omega_1 = F(\Omega)$).

Замечание. Дискретные аналоги свойств **P 2.3.** и **P 2.5.** (при дискретном наборе типов) выглядят следующим образом (остальные свойства не изменяются):

P 2.3.

$$c(r_1,y) - c(r_2,y) < 0 \text{ при } r_1 > r_2;$$

P 2.5.

$$c_y(r_1,y) - c_y(r_2,y) < 0 \text{ при } r_1 > r_2.$$

Таким образом, мы вывели необходимые нам в дальнейшем условия на функции затрат активных элементов исходя из разумных требований на производственные функции и в дальнейшем будем предполагать их выполнение.

2.2. Свойства функций стимулирования и функций действия

В данном разделе рассматриваются свойства (и взаимосвязь) функции стимулирования и функции действия в общем случае (даже при неоптимальной функции стимулирования). Подробный анализ данных свойств позволит нам решить задачу управления фиксированным составом, что в итоге понадобится для решения задачи управления составом.

Функция действия и функция стимулирования связаны между собою через условие рационального выбора АЭ:

$$f(r) \in \operatorname*{Argmax}_{x\in X}(\sigma(x) - c(r,x)) \quad \forall r \in \Omega. \tag{2.2}$$

Поскольку задача АЭ является частью задачи поиска оптимальной системы стимулирования, то подробное исследования решения задачи (2.2) и установления совместных свойств функции действия и функции стимулирования необходимы для дальнейшего исследования. Данный раздел целиком посвящен изучению взаимосвязи между этими функциями как в дискретном, так и в непрерывном случае.

Фактически функция действия есть зависимость реализуемого действия от типа активного элемента: всегда можно предпочтения центра определить таким образом, что при выполнении Гипотезы Благожелательности активный элемент типа r будет реализовывать действие $f(r)$ (при некоторых ограничениях на функцию $f(r)$). Мы постараемся узнать большее: какими свойствами обладает функция $f(r)$, как она связана с функцией стимулирования $\sigma(x)$ (не считая определения (2.2)), какими свойствами обладает функция стимулирования, которой соответствует заданная функция действия.

Начнем исследование с самых простых свойств функции действия.

Прежде всего заметим, что если $f(r)$ — решение задачи (2.2) для некоторой $\sigma(x) \in M$, то для любого $r \in \Omega$ выполняется неравенство

$$\sigma(f(r)) - c(r, f(r)) \geq 0, \tag{2.3}$$

т.е. стимулирование действия, выбираемого некоторым активным элементом системы, всегда не меньше затрат этого элемента на реализацию данного действия.

Действительно, поскольку в силу свойства **Р 2.1.** $c(r,0) = 0$ и $\sigma(0) \geq 0$, то выполняется $\sigma(0) - c(r,0) \geq 0$. Кроме того,

$$f(r) \in \operatorname*{Argmax}_{x\in X}(\sigma(x) - c(r,x)),$$

следовательно справедливо

$$\begin{aligned} \sigma(f(r)) - c(r, f(r)) &= \sup_{x\in X}(\sigma(x) - c(r,x)) \geq \\ &\geq \sigma(0) - c(r,0) \geq 0. \end{aligned}$$

Следующая лемма говорит о свойстве, которое мы будем часто в дальнейшем использовать.

Лемма 2.2.1. Для любой функции стимулирования функция действия является неубывающей функцией.

Следовательно, вне зависимости от системы стимулирования, вне зависимости от затрат (необходима лишь отрицательная смешанная производная) действие, реализуемое активным элементом с большим типом всегда не меньше действия, реализуемого активным элементом с меньшим типом.

Лемма 2.2.2. Для любой функции стимулирования целевая функция АЭ

$$\sigma(f(r)) - c(r, f(r))$$

является возрастающей функцией типа r АЭ.

Данная лемма имеет важную экономическую интерпретацию. Мы говорили, что большему значению r соответствует лучший тип активного элемента. В данной теореме утверждается, что при возрастании типа Активного Элемента значение целевой функции строго возрастает. Это означает, что чем больший тип имеет активный элемент, тем бóльшую "прибыль" он получает помимо компенсации своих затрат.

Жизненная необходимость данного условия обусловлена следующим фактом: получение лучшего типа (например, через дополнительное образование и т.п.) требует больших затрат, и, если бы прибыль при улучшении типа не изменялась, то не было бы никаких стимулов это дополнительное образование получать — затраты вырастут, а прибыль (целевая функция) не изменится.

Определим оператор $\Phi : M \to M$ следующим образом:

$$\Phi(\sigma)(x) = \inf_{r\in\Omega}(\sigma(f(r)) - c(r, f(r)) + c(r, x)), \tag{2.4}$$

где $f(r)$ — решение задачи (2.2) с функцией $\sigma(x)$. Очевидно, что $\Phi(\sigma)$ может, вообще говоря, зависеть от конкретного выбора функции $f(r)$ (поскольку определение $f(r)$ с помощью (2.2) допускает в общем случае неоднозначность), однако в дальнейшем (утверждение 2.2.8) будет доказано, что вне зависимости от $f(r)$ функция $\Phi(\sigma)(x)$ зависит только от $\sigma(x)$.

Мы покажем, что $\Phi(\sigma)(\cdot)$ обладает всеми необходимыми свойствами функции стимулирования и ее можно использовать вместо функции $\sigma(\cdot)$, но, наряду со свойствами функции $\sigma(\cdot)$, она обладает многими другими достоинствами, например абсолютной непрерывностью, и работать с ней несомненно легче, чем с $\sigma(\cdot)$. Используя функцию $\Phi(\sigma)(\cdot)$ (вместо $\sigma(\cdot)$) можно значительно сузить класс всех допустимых функций стимулирования (т.к. от этой замены не изменяются затраты и функция действия).

Приведем некоторые свойства оператора $\Phi(\sigma)(\cdot)$.

Прежде всего отметим следующий факт. Пусть $f(r)$ — решение задачи (2.2) для $\sigma(x)$ и $\tilde\sigma(x) = \Phi(\sigma)(x)$. Тогда функция $\tilde\sigma(x)$ является строго возрастающей функцией:

$$\forall x, x_1 \in X, \quad x < x_1 \Rightarrow \tilde\sigma(x) < \tilde\sigma(x_1).$$

Действительно, при $\Delta x > 0$ имеем:

$$\begin{aligned}
\tilde\sigma(x+\Delta x) &= \inf_{r\in\Omega}(\sigma(f(r)) - c(r, f(r)) + c(r, x+\Delta x)) \\
&= \inf_{r\in\Omega}(\sigma(f(r)) - c(r, f(r)) + c(r, x) + \\
&\qquad\qquad c(r, x+\Delta x) - c(r, x)) \\
&\geq \inf_{r\in\Omega}\Big(\sigma(f(r)) - c(r, f(r)) + c(r, x) \\
&\qquad + \inf_{r'\in\Omega}(c(r', x+\Delta x) - c(r', x))\Big) \\
&= \inf_{r\in\Omega}(\sigma(f(r)) - c(r, f(r)) + c(r, x)) + \\
&\qquad + \inf_{r'\in\Omega}(c(r', x+\Delta x) - c(r', x)) \\
&= \tilde\sigma(x) + c(r_1, x+\Delta x) - c(r_1, x) > \tilde\sigma(x),
\end{aligned}$$

что и требовалось показать.

Следующее важной свойство — оператор $\Phi(\cdot)$ является неубывающим. Более формально, пусть $f(r)$ — решение задачи (2.2) для некоторой $\sigma(x) \in M$ и функция $\tilde{\sigma}(x) = \Phi(\sigma)(x)$. Тогда

$$\tilde{\sigma}(x) \geq \sigma(x) \quad \forall x \in X.$$

Действительно, поскольку

$$f(r) \in \operatorname*{Argmax}_{x \in X}(\sigma(x) - c(r, x)),$$

то

$$\sigma(f(r)) - c(r, f(r)) \geq \sigma(x) - c(r, x) \qquad \forall x \in X$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}(x) &= \inf_r(\sigma(f(r)) - c(r, f(r)) + c(r, x)) \\ &\geq \inf_r(\sigma(x) - c(r, x) + c(r, x)) = \sigma(x),\end{aligned}$$

что и требовалось показать.

Следующее важное свойство говорит о том, что при переходе к $\tilde{\sigma}(x)$ вознаграждения АЭ не изменяются. А именно, пусть $f(r)$ — решение задачи (2.2) для некоторой $\sigma(x) \in M$ и функция $\tilde{\sigma}(x) = \Phi(\sigma)(x)$. Тогда

$$\tilde{\sigma}(f(r)) = \sigma(f(r)) \quad \forall r \in \Omega.$$

Действительно, по определению,

$$\tilde{\sigma}(x) = \inf_{r \in \Omega}(\sigma(f(r)) - c(r, f(r)) + c(r, x)).$$

Следовательно, для любого $r^* \in \Omega$ функция

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}(f(r^*)) &= \inf_{r \in \Omega}(\sigma(f(r)) - c(r, f(r)) + c(r, f(r^*))) \\ &\leq \sigma(f(r^*)) - c(r^*, f(r^*)) + c(r^*, f(r^*)) \\ &= \sigma(f(r^*)).\end{aligned}$$

С другой стороны, учитывая неубывание оператора $\Phi(\cdot)$, $\tilde{\sigma}(f(r^*)) \geq \sigma(f(r^*))$, что и заканчивает доказательство.

Среди важных свойств можно упомянуть и тот факт, что функция $\tilde{\sigma}(x)$ является абсолютно непрерывной функцией на отрезке $[0; a]$ для любого $a > 0$.

Действительно, поскольку множество Ω представляет собой отрезок действительной прямой, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых $x_1, x_2 > 0 : |x_1 - x_2| < \delta$, для любого $r \in \Omega$ выполняется

$$|c(r, x_1) - c(r, x_2)| < \varepsilon,$$

причем ε можно выбрать как

$$\varepsilon = \sup_{r \in \Omega, x \in [0; a]} c_x(r, x)\delta.$$

Данное определение корректно т.к. для любого конечного a множество $\Omega \times [0; a]$ компактно и потому супремум конечен.

Таким образом,

$$\begin{aligned}\tilde\sigma(x_1) &= \inf_{r\in\Omega}(\sigma(f(r)) - c(r,f(r)) + c(r,x_1))\\ &< \inf_{r\in\Omega}(\sigma(f(r)) - c(r,f(r)) + c(r,x_2) + \varepsilon)\\ &= \tilde\sigma(x_2) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}\tilde\sigma(x_2) &= \inf_{r\in\Omega}(\sigma(f(r)) - c(r,f(r)) + c(r,x_2))\\ &< \inf_{r\in\Omega}(\sigma(f(r)) - c(r,f(r)) + c(r,x_1) + \varepsilon)\\ &= \tilde\sigma(x_1) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$|\tilde\sigma(x_2) - \tilde\sigma(x_1)| < \varepsilon,$$

и при для любых x_i^j, $j = 1, 2$, $i = \overline{1,l}$, в силу выбора ε

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{l}|\tilde\sigma(x_i^1) - \tilde\sigma(x_i^2)| &\le \sum_{i=1}^{l}|x_i^1 - x_i^2| \sup_{r\in\Omega, x\in[0;a]} c_x(r,x)\\ &= \sup_{r\in\Omega, x\in[0;a]} c_x(r,x)\sum_{i=1}^{l}|x_i^1 - x_i^2|,\end{aligned}$$

что для абсолютной непрерывности и требовалось показать.

Из того, что функция $\tilde\sigma(x)$ является абсолютно непрерывной на любом конечном отрезке сразу следует, что она является всюду непрерывной и для любого r существует x (конечный или бесконечный), на котором достигается максимум выражения

$$\tilde\sigma(x) - c(r,x).$$

Таким образом, запись (которая будет нами в дальнейшем использоваться)

$$\max_{x\in X}(\tilde\sigma(x) - c(r,x))$$

корректна (минимум достигается).

Важным для нас свойством является то, что в результате применения оператора $\Phi(\cdot)$ получается функция стимулирования, при которой функция действия не изменяется, т.е. для функции $\tilde\sigma(x) = \Phi(\sigma)(x)$ выполняется

$$f(r) \in \operatorname*{Argmax}_{x\in X}(\tilde\sigma(x) - c(r,x)),$$

т.е $f(r)$ является также решением задачи активного элемента (2.2) с функцией стимулирования $\tilde\sigma(x)$.

Действительно, поскольку $\tilde\sigma(x) \ge \sigma(x)$, то

$$\max_{x\in X}(\tilde\sigma(x) - c(r,x)) \ge \max_{x\in X}(\sigma(x) - c(r,x)). \tag{2.5}$$

Докажем обратное неравенство. Действительно, так как

$$\tilde\sigma(x) = \inf_{r}(\sigma(f(r)) - c(r,f(r)) + c(r,x)),$$

то выполняются

$$\tilde\sigma(x) \le \sigma(f(r)) - c(r,f(r)) + c(r,x);$$

$$\tilde{\sigma}(x) - c(r,x) \le \sigma(f(r)) - c(r,f(r)) = \max_{x\in X}(\sigma(x) - c(r,x));$$

$$\max_{x\in X}(\tilde{\sigma}(x) - c(r,x)) \le \max_{x\in X}(\sigma(x) - c(r,x)) \tag{2.6}$$

для любого r. Следовательно, из (2.5) и (2.6) получаем, что,

$$\max_{x\in X}(\tilde{\sigma}(x) - c(r,x)) = \max_{x\in X}(\sigma(x) - c(r,x)).$$

Теперь, поскольку $\max\limits_{x\in X}(\tilde{\sigma}(x) - c(r,x))$ и $\max\limits_{x\in X}(\sigma(x) - c(r,x))$ совпадают, и $\tilde{\sigma}(x) \ge \sigma(x)$, то верна цепочка

$$f(r) \in \operatorname*{Argmax}_{x\in X}(\sigma(x) - c(r,x)) \subset \operatorname*{Argmax}_{x\in X}(\tilde{\sigma}(x) - c(r,x)),$$

что и доказывает утверждение.

Поскольку функция действия при изменении функции стимулирования на $\Phi(\sigma)(x)$ не изменяется, то сохраняются все свойства функции стимулирования, и свойство максимального выигрыша при выборе действия $f(r)$, т.е. для любых $r \in \Omega$ и $x \in X$ выполняется

$$\tilde{\sigma}(f(r)) - c(r,f(r)) \ge \tilde{\sigma}(x) - c(r,x).$$

Все выше указанные свойства оператора $\Phi(\sigma)$ мы можем объединить в следующую лемму:

Лемма 2.2.3. Пусть функции стимулирования $\sigma(x)$ соответствует функция действия $f(r)$. Тогда существует такая функция стимулирования $\tilde{\sigma}(x)$, функция действия которой совпадает с функцией действия функции $\sigma(x)$, и значения которой в любой точке не меньше значения любой функции стимулирования с функцией действия $f(r)$. Более того, для любого фиксированного значения типа АЭ размер вознаграждения при использовании $\sigma(x)$ и $\tilde{\sigma}(x)$ совпадает.

Одним из основных результатов данного раздела является установление равенства функций действия почти всюду, за исключением счетного числа точек.

Лемма 2.2.4. Если для некоторой функции стимулирования определены две различные функции действия, то они отличаются только в своих точках разрыва (которые по Лемме 2.2.1 являются точками разрыва первого рода).

При непрерывной функции действия (которая, напомним, является неубывающей) можно выписать дифференциальные уравнения на функцию стимулирования. В случае наличия разрывов в функции действия функцию стимулирования можно восстановить на множестве разрыва.

Утверждение 2.2.5. Пусть функция $f(r)$ имеет разрыв в некоторой точке $\hat{r}$: $\lim\limits_{r\to\hat{r}-} f(r) = f(\hat{r}-) \ne f(\hat{r}+) = \lim\limits_{r\to\hat{r}+} f(r)$. Тогда функция стимулирования $\tilde{\sigma}(x)$ непрерывна на $[f(\hat{r}-), f(\hat{r}+)]$ и более того,

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}(x) = c(\hat{r},x) + \sigma(f(\hat{r})) - c(\hat{r},f(\hat{r}))\\ \text{при } x \in [f(\hat{r}-), f(\hat{r}+)].\end{aligned}$$

Оператор $\Phi(\cdot)$ обладает тем свойством, что определяемая с его помощью функция стимулирования является "максимальной", а именно,

Утверждение 2.2.6. Пусть $f(r)$ — функция действия для функция стимулирования $\sigma(x)$ и $\hat{\sigma}(x)$, причем $\sigma(f(r)) = \hat{\sigma}(f(r))$ для любого r. Тогда $\tilde{\sigma}(x) \equiv \Psi(\sigma)(x) \ge \hat{\sigma}(x)$, т.е. функцию $\tilde{\sigma}(x)$ нельзя увеличить ни в одной точке, чтобы она осталась функций стимулирования для функции действия $f(r)$ с такими же выплатами.

Заметим, что определение функционала $\Phi(\cdot)$ через минимум (а не инфинум) корректно, о чем говорит следующая лемма.

Лемма 2.2.7. Пусть $\sigma(x)$ непрерывна и $\tilde{\sigma}(x) = \Phi(\sigma)(x)$. Тогда для любого $x \in X$ существует r^*, на котором инфинум в (2.4) достигается, т.е.

$$\tilde{\sigma}(x) = \sigma(f(r^*)) - c(r^*, f(r^*)) + c(r^*, x).$$

Таким образом, по доказанной Лемме определение функции $\Phi(\sigma)$ мы можем записать следующим образом:

$$\Phi(\sigma)(x) = \min_{r \in \Omega}(\sigma(f(r)) - c(r, f(r)) + c(r, x)).$$

Как уже было сказано при определении $\Phi(\sigma)(x)$, результат, вообще говоря, может зависеть от того, какую из возможных функций действия использовать. Об инвариантности результата от используемой функции стимулирования говорит следующее

Утверждение 2.2.8. Функция $\Phi(\sigma)(\cdot)$ не зависит от того, какую из функций

$$f(r) \in \operatorname*{Argmax}_{r \in \Omega}(\sigma(x) - c(r, x))$$

использовать в определении (2.4).

В следующей лемме обобщается свойство монотонной зависимости реализуемого действия от типа активного элемента.

Лемма 2.2.9. Пусть r_1, r_2 — типы активных элементов, при которых реализуется минимум при определении функции $\tilde{\sigma}(x) = \Phi(\sigma)(x)$ для x_1 и x_2 соответственно:

$$\tilde{\sigma}(x_i) - c(r_i, x_i) = \sigma(f(r_i)) - c(r_i, f(r_i)), \tag{2.7}$$

и $x_1 < x_2$. Тогда типы активных элементов упорядочены соответствующим образом, т.е. $r_1 \leq r_2$.

В данном разделе мы рассмотрели связь функция стимулирования и функций действия. Показано, что при рассмотрении задач синтеза оптимальных функций стимулирования можно ограничиться абсолютно непрерывными возрастающими функциями стимулирования. Доказано, что непрерывные функции стимулирования, для которых функции действия одинаковы, отличаются на константу. Предложен механизм, с помощью которого можно изменить функцию стимулирования на абсолютно непрерывную, не изменяя функцию действия и выплаты активным элементам. В общем случае показано, что лучший активный элемент будет выполнять бóльшее действие, а целевая функция лучшего активного элемента принимает строго большие значения, чем целевая функция худшего активного элемента (даже при неоптимальных функциях стимулирования). Доказано, что функции действия для одной и той же функции стимулирования отличаются только в своих точках разрыва (а, учитывая неубывание функций действия, множество точек разрыва счетно). В зависимости от поведения функции действия в точке (непрерывность, разрывность, убывание/возрастание) описано поведение функции стимулирования.

2.3. Унифицированные системы стимулирования в активных системах с конечным числом активных элементов

В данном разделе решается задача синтеза оптимальной функции стимулирования для АС с конечным числом элементов. Приводится алгоритм нахождения оптимальной функции стимулирования. Исследуются свойства реализуемых различными активными элементами действий. Результаты данного раздела будут использованы в дальнейшем при решении задачи управления исполнительным составом АС.

В данном разделе мы будем исследовать дискретный случай с неинформированностью Центра о типах, т.е. множество всех типов активных элементов известно центру, но он не знает, какой тип соответствует какому активному элементу. Система стимулирования предполагается унифицированной, т.е. центр задает одну функцию стимулирования для всех имеющихся в АС активных элементов.

Будет найдено дифференциальное соотношение, связывающее действия различных АЭ при оптимальной системе стимулирования и приведен алгоритм нахождения оптимальной функции стимулирования. Для случая оптимальной функции стимулирования будет подробно изучен вопрос о том, в каких случаях разные АЭ будут выбирать разные действия. В свою очередь, будет показано, что при реализации разными АЭ разных действий можно говорить о выпуклости суммарной функции затрат, или, что то же самое, о невыгодности для центра использовать смешанные стратегии.

Таким образом, мы решаем задачу

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma(x_i) \to \min_{\sigma, \{x_i\}_{i=1}^{n}}; \tag{2.8}$$

при выполнении условий

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}; \tag{2.9}$$

$$x_i \in \operatorname*{Argmax}_{x \in X} (\sigma(x) - c_i(x)); \tag{2.10}$$

$$X = [0, +\infty] \quad \forall i = 1 \dots n. \tag{2.11}$$

Обозначим значение максимума выражения (2.8) за $\mathcal{S}(\bar{x})$.

Для случая вероятностной неопределенности с конечным множеством типов необходимо вместо уравнения 2.8 минимизировать

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \sigma(x_i) \to \min_{\sigma, \{x_i\}_{i=1}^{n}}. \tag{2.12}$$

Результаты при этом изменятся незначительно (с поправкой на наличие соответствующих множителей во всех уравнениях).

Для простоты изложения положим далее $x_o = 0$.

Большая часть результатов этой части основывается на формуле, описывающей оптимальную унифицированную систему стимулирования, приведенную в [**5**]:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(x_i) &= \tilde{\sigma}(x_{i-1}) + c_i(x_i) - c_i(x_{i-1}) = \\ &= \sum_{k=1}^{i} (c_k(x_k) - c_k(x_{k-1})) \end{aligned} \tag{2.13}$$

(полагаем $\sigma(0) = 0$, $\sigma(x) = 0$ при $x \neq x_i$). В формуле 2.13 предполагается, что $\tilde{\sigma}(\cdot)$ есть оптимальная система стимулирования, x_i — действие, выбираемое i-м АЭ.

Указанная формула верна не только для оптимальных систем стимулирования (минимизирующих затраты при фиксированном среднем или суммарном действиях), но и для систем стимулирования, в которых минимизированы затраты при фиксированном наборе действий $x_1 \leq x_2 \ldots \leq x_n$.

Прежде всего найдем необходимое условие для оптимальной функции стимулирования.

В силу рационального выбора активного элемента (2.10) должно выполняться

$$\sigma(x_i) - c_i(x_i) \geq \sigma(x_{i-1}) - c_i(x_{i-1}),$$

следовательно

$$\sigma(x_i) \geq \sigma(x_{i-1}) + c_i(x_i) - c_i(x_{i-1}) \qquad \forall i = 1 \ldots n. \tag{2.14}$$

Покажем, что в случае системы стимулирования $\sigma(x)$, для которой выполняется в качестве равенства условие (2.14), активный элемент с номером i реализует действие x_i.

Покажем по индукции, что активный элемент с номером i не будет реализовывать действие с номером $k < i$. Действительно, поскольку

$$\sigma(x_1) = c_1(x_1), \tag{2.15}$$

то первому элементу невыгодно отклоняться с действия x_1 на $x_0 = 0$.

Пусть утверждение доказано для элемента с номером $i-1$. Тогда для элемента с номером i

$$\begin{aligned} \sigma(x_i) - c_i(x_i) &= \sigma(x_{i-1}) + c_i(x_i) - c_i(x_{i-1}) - c_i(x_i) \\ &= \sigma(x_{i-1}) - c_i(x_{i-1}), \end{aligned}$$

т.е. активному элементу с номером i безразлично, какое действие реализовывать — x_i или x_{i-1}. Но поскольку по предположению индукции элементу с номером $i-1$ нет выгоды реализовывать действия меньше, чем x_{i-1}, то

$$\begin{aligned} \sigma(x_{i-1}) - c_i(x_{i-1}) &= \sigma(x_{i-1}) - c_{i-1}(x_{i-1}) + \\ &\quad + c_{i-1}(x_{i-1}) - c_i(x_{i-1}) \\ &\geq \sigma(x_{i-k}) - c_{i-1}(x_{i-k}) + \\ &\quad + c_{i-1}(x_{i-k}) - c_i(x_{i-k}) \\ &= \sigma(x_{i-k}) - c_i(x_{i-k}) \end{aligned}$$

и активному элементу с номером i нет выгоды реализовывать действия меньше, чем x_{i-1}, и, следовательно, меньше чем x_i.

Покажем теперь по индукции, что активный элемент с номером i не будет реализовывать действие с номером $k > i$. Элементу с номером n нет выгоды реализовывать действие, больше чем x_n.

Пусть утверждение доказано для элемента с номером $i+1$. Тогда для элемента с номером i

$$
\begin{aligned}
\sigma(x_i) - c_i(x_i) &= \sigma(x_{i+1}) - c_{i+1}(x_{i+1}) + \\
&\quad + c_{i+1}(x_i) - c_i(x_i) = \\
&= \sigma(x_{i+1}) - c_i(x_{i+1}) + c_i(x_{i+1}) - \\
&\quad - c_{i+1}(x_{i+1}) + c_{i+1}(x_i) - c_i(x_i) = \\
&= \sigma(x_{i+1}) - c_i(x_{i+1}) + \int\limits_{r_i}^{r_{i+1}} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} c_{rx}(r,x)\, dx\, dr \geq \\
&\geq \sigma(x_{i+1}) - c_i(x_{i+1}),
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

т.е. активному элементу с номером i нет выгоды реализовывать действие x_{i+1} вместо x_i. Но поскольку по предположению индукции элементу с номером $i+1$ нет выгоды реализовывать действия больше, чем x_{i+1}, то поскольку

$$
\begin{aligned}
\sigma(x_{i+1}) - c_i(x_{i+1}) &\geq \sigma(x_{i+k}) - c_{i+1}(x_{i+k}) + \\
&\quad + c_{i+1}(x_{i+1}) - c_i(x_{i+1}) \\
&\geq \sigma(x_{i+k}) - c_{i+1}(x_{i+k}) + \\
&\quad + c_{i+1}(x_{i+k}) - c_i(x_{i+k}) \\
&= \sigma(x_{i+k}) - c_i(x_{i+k}),
\end{aligned}
$$

активному элементу с номером i нет выгоды реализовывать действие больше, чем x_i.

Таким образом мы показали, что при определенной уравнением (2.13) системе стимулирования i-й активный элемент реализует действие x_i. Покажем теперь, что данная система стимулирования оптимальна.

Пусть это не так, тогда по формуле (2.14) существуют такие константы $\alpha_i \geq 0$, что

$$
\sigma(x_i) = \sigma(x_{i-1}) + c_i(x_i) - c_i(x_{i-1}) + \alpha_i \qquad \forall i = 1 \ldots n. \tag{2.17}
$$

Но тогда

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \sigma(x_i) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} (c_k(x_k) - c_k(x_{k-1}) + \alpha_k) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} (c_k(x_k) - c_k(x_{k-1})) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} \alpha_k = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} (c_k(x_k) - c_k(x_{k-1})) + \sum_{i=1}^{n} (n-i+1)\alpha_i \geq \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} (c_k(x_k) - c_k(x_{k-1})) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\sigma}(x_i),
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

причем равенство возможно только если все $\alpha_i = 0$. Но последнее выражение есть затраты Центра на стимулирование при системе стимулирования $\tilde{\sigma}(\cdot)$, удовлетворяющей (2.13), т.е. эта система оптимальна.

Как можно легко понять, непрерывный аналог функции $\tilde{\sigma}(\cdot)$ из формулы (2.13) выглядит следующим образом ($x \in [x_{i-1}, x_i]$):

$$\sigma(x) = c_i(x) - c_i(x_{i-1}) + \sum_{k=1}^{i-1} (c_k(x_k) - c_k(x_{k-1})) = \\ c_i(x) + \sum_{k=1}^{i-1} (c_k(x_k) - c_{k+1}(x_k)) . \tag{2.19}$$

Используя представление (2.13) для функции стимулирования, можно найти дифференциальное уравнение, связывающее действия x_k и x_{k+1} при оптимальной функции стимулирования (если $x_{k-1} < x_k < x_{k+1} < x_{k+2}$), о чем и говорит следующее

Утверждение 2.3.1. Пусть при некоторой оптимальной функции стимулирования k-й АЭ реализует действие x_k, и для всех $i = \overline{1, n-1}$ выполняется $x_i < x_{i+1}$. Тогда верно следующее дифференциальное уравнение:

$$(n-i-1)(c'_{i+2}(x_{i+1}) - c'_{i+1}(x_{i+1})) - c'_{i+1}(x_{i+1}) = \\ (n-i)(c'_{i+1}(x_i) - c'_i(x_i)) - c'_i(x_i), \tag{2.20}$$

где $c_i(x_i)$ есть функция затрат в точке x_i АЭ типа r_i.

Данное утверждение дает возможность для итеративного определения оптимально реализуемых действий при оптимальной функции стимулирования: зная одно из них, можно найти действия соседних активных элементов и т.д. В частности, зная действие, реализуемое n-м активным элементом при оптимальной функции стимулирования, можно определить действие, реализуемое $n-1$-м элементом, далее — $n-2$-м элементом, и так дальше до первого активного элемента. Однако хотелось бы избавиться от итеративного механизма, и такую возможность предоставляет следующее утверждение.

Утверждение 2.3.2. Пусть при некоторой оптимальной функции стимулирования k-й АЭ реализует действие x_k, и для всех $i = \overline{1, n-1}$ выполняется $x_i < x_{i+1}$. Тогда для любых k и i верно следующее дифференциальное уравнение:

$$(n-i)(c'_{i+1}(x_i) - c'_i(x_i)) - c'_i(x_i) = \\ (n-k)(c'_{k+1}(x_k) - c'_k(x_k)) - c'_k(x_k) = -c'_n(x_n). \tag{2.21}$$

Условие в предыдущем утверждении является существенным для нахождения решения, поскольку решения (2.21) не обязательно монотонно упорядоченно возрастают при улучшении типа АЭ (что является необходимым для решения), и именно поэтому возможна реализация различными активными элементами одинаковых действий, о чем свидетельствует следующий пример.

Пример 4. Рассмотрим квадратичные функции затрат $c(r_i, x) = r_i \frac{x^2}{2}$ и три активных элемента с типами $r_1 = 1$, $r_2 = 8/7$ и $r_3 = 2$. Поскольку $r_1 < r_2 < r_3$, то функции затрат уже упорядочены нужным образом. Найдем оптимальную функцию стимулирования для реализации суммарного действия $\bar{x}$. Пусть x_i^* — действие, которое при этом реализует i-й активный элемент.

Таким образом, необходимо решить задачу:

$$\sum_{i=1}^{3} \sigma(x_i) \to \min_{x_1,x_2,x_3} \tag{2.22}$$

при выполнении условий:

$$x_1 \le x_2 \le x_3; \tag{2.23}$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_i = \bar{x}; \tag{2.24}$$

$$\sigma(x_i) = \sum_{k=1}^{i} \left(c_k(x_k) - c_k(x_{k-1})\right). \tag{2.25}$$

Предполагая, что ограничения (2.23) являются строгими, т.е. если x_1, x_2 и x_3 являются решением, то $x_1 < x_2 < x_3$, из (2.22)-(2.25) получаем:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3} \sigma(x_i) &= 3c_1(x_1) + 2(c_2(x_2) - c_2(x_1)) + (c_3(x_3) - c_3(x_2)) \\
&= \frac{x_1^2}{2}\left(\frac{3}{r_1} - \frac{2}{r_2}\right) + \frac{x_2^2}{2}\left(\frac{2}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right) + \frac{x_3^2}{2}\frac{1}{r_3} \\
&= x_1^2\left(\frac{3}{2} - \frac{7}{8}\right) + x_2^2\left(\frac{7}{8} - \frac{1}{4}\right) + \frac{x_3^2}{4} \\
&= \frac{5}{8}x_1^2 + \frac{5}{8}x_2^2 + \frac{(\bar{x} - x_1 - x_2)^2}{4} \to \min_{x_1,x_2}.
\end{aligned}$$

Находим условия первого порядка:

$$\begin{aligned}
\text{по } x_1: &\quad \frac{5}{4}x_1 - \bar{x} + x_2 + x_1 = 0; \\
\text{по } x_2: &\quad \frac{5}{4}x_2 - \bar{x} + x_1 + x_2 = 0.
\end{aligned}$$

Выражая из этих равенств x_1 и x_2, получаем:

$$x_1 = x_2 = \frac{4}{13}\bar{x};$$

$$x_3 = \bar{x} - x_1 - x_2 = \frac{5}{13}\bar{x}.$$

Таким образом, мы получили, что первый и второй активные элементы при любой оптимальной системе стимулирования и любом суммарном действии реализуют одно и то же действие.

Заметим, что при других типах активных элементов в качестве решения оптимизационной задачи можно было бы получить, что первый активный элемент должен реализовывать бо́льшее действие, чем второй, чего не может быть в силу Леммы 2.2.1, и, таким образом, при решении подобных задач необходимо учитывать ограничения (2.23).•

Однако, несмотря на то, что различные активные элементы могут реализовывать одинаковые действия, верны две следующие леммы, говорящие о том, что действие самого лучшего из активных элементов отлично от других и действие самого худшего из активных элементов строго положительно:

Утверждение 2.3.3. В любой АС оптимальное действие лучшего АЭ будет отличаться от действий всех других АЭ.

Таким же способом, каким доказывается отличие действия, реализуемого при оптимальной системы стимулирования лучшим активным элементом, от действий других элементов (предыдущее утверждение) доказывается тот факт, что наихудший активный элемент реализует ненулевое действие.

Утверждение 2.3.4. Худший АЭ при оптимальной системе стимулирования будет выбирать ненулевое действие.

Интерпретация данных утверждений следующая: при наличии любого набора активных элементов при оптимальной функции стимулирования все из них будут реализовывать некоторые действия, то есть ни один них при рациональном центре не должен быть исключен из системы. Для того, чтобы полностью использовать возможности наилучшего активного элемента, необходимо сделать так, чтобы его действие отличалось от действий других активных элементов.

Учитывая утверждение Леммы 2.2.1 и формулу 2.13, в общем случае задача поиска оптимальной системы стимулирования для дискретного случая выписывается следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma(x_i) \to \max_{\{x_i\}_{i=1}^n}; \tag{2.26}$$

$$\sigma(x_i) = \sum_{k=1}^{i} (c_k(x_k) - c_k(x_{k-1}) \quad \forall i = 1 \ldots n; \tag{2.27}$$

$$x_{i+1} \geq x_i \quad \forall i = 1 \ldots n-2; \tag{2.28}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}. \tag{2.29}$$

Переписывая задачу максимизации и используя выражение для функции стимулирования, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \sigma(x_i) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}((c_k(x_k) - c_k(x_{k-1})) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(n-i+1)((c_i(x_i) - c_i(x_{i-1})) \to \max_{\{x_i\}_{i=1}^n}. \end{aligned}$$

Лагранжиан

$$L = \sum_{i=1}^{n}(n-i+1)(c_i(x_i) - c_i(x_{i-1})) + \\ \lambda\left(\bar{x} - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) + \sum_{i=1}^{n-2}\mu_i(x_i - x_{i+1}).$$

Необходимым условием для того, чтобы множество действий $\{x_i\}_{i=1}^n$ было решением задачи (2.26)-(2.29), является существование таких констант $\lambda \geq 0$ и $\mu_i \geq 0$, что

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i = 1 \dots n,$$

причем $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$, $x_{i+1} \geq x_i \quad \forall i = 1 \dots n-2$, а $\mu_i > 0$ только тогда, когда $x_{i+1} = x_i$.

Исходя из этих условий, должно выполняться

$$\frac{\partial L}{\partial x_n} = c_n'(x_n) - \lambda = 0; \tag{2.30}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{n-1}} = 2c_{n-1}'(x_{n-1}) - c_n'(x_{n-1}) - \mu_{n-2} - \lambda = 0; \tag{2.31}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = nc_1'(x_1) - (n-1)c_2'(x_1) - \lambda + \mu_1 = 0; \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} &= (n-i+1)c_i'(x_i) - (n-i)c_{i+1}'(x_i) - \\ &\qquad -\lambda + \mu_i - \mu_{i-1} = 0 \end{aligned} \tag{2.33}$$

при $i = 2 \dots n-2$.

Таким образом, если x_i таково, что $x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$, то множители Лагранжа $\mu_{i-1} = \mu_i = 0$ и

$$(n-i+1)c_i'(x_i) - (n-i)c_{i+1}'(x_i) = c_n'(x_n). \tag{2.34}$$

Если же $x_{k-1} < x_k = x_{k+1} = \ldots = x_l < x_{l+1}$, $1 \leq k < l \leq n-1$, то константы $\mu_{k-1} = \mu_l = 0$ и, как видно из (2.33) (обозначая $x^* = x_k = \ldots = x_l$), имеем:

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{i=k}^{l} \frac{\partial L}{\partial x_i} &= \\ &= \sum_{i=k}^{l} ((n-i+1)c_i'(x_i) - (n-i)c_{i+1}'(x_i) - \\ &\qquad -\lambda + \mu_i - \mu_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=k}^{l} ((n-i+1)c_i'(x^*) - (n-i)c_{i+1}'(x^*) - \lambda) = \\ &= (n-k+1)c_k'(x^*) - (n-l)c_{l+1}'(x^*) + \\ &\quad + \sum_{i=k+1}^{l} ((n-i+1) - (n-(i-1))c_i'(x^*) - \\ &\quad -(l-k+1)\lambda = \\ &= (n-k+1)c_k'(x^*) - (n-l)c_{l+1}'(x^*) - \\ &\quad -(l-k+1)\lambda = \\ &= (n-k+1)c_k'(x^*) - (n-l)c_{l+1}'(x^*) - \\ &\quad -(l-k+1)c_n'(x_n^*), \end{aligned} \tag{2.35}$$

следовательно

$$(n-k+1)c'_k(x^*) - (n-l)c'_{l+1}(x^*) = (l-k+1)c'_n(x^*_n). \tag{2.36}$$

Кроме того, необходимо, чтобы выполнялось $\mu_p \geq 0$ при $p = k \dots l-1$, или, выражая μ_p (аналогично тому, как это сделано в (2.35)),

$$\begin{aligned} \mu_p &= (n-k+1)c'_k(x^*) - \\ &\qquad -(n-p)c'_{p+1}(x^*) - (p-k+1)c'_n(x^*_n) \leq \\ &\leq 0, \end{aligned} \tag{2.37}$$

или, заменяя $c'_n(x^*_n)$ по формуле (2.36),

$$\begin{aligned} (n-k+1)c'_k(x^*) - (n-p)c'_{p+1}(x^*) \leq \\ \frac{p-k+1}{l-k+1}((n-k+1)c'_k(x^*) - (n-l)c'_{l+1}(x^*)). \end{aligned} \tag{2.38}$$

Таким образом, доказана

Теорема 2.3.5. Пусть при оптимальной функции стимулирования в АС из n АЭ i-й АЭ реализует действие x^*_i. При $x^*_{i-1} < x^*_i < x^*_{i+1}$ выполняется следующее равенство:

$$(n-i+1)c'_i(x_i) - (n-i)c'_{i+1}(x_i) = c'_n(x_n). \tag{2.39}$$

При $x_{k-1} < x^* = x_k = x_{k+1} = \ldots = x_l < x_{l+1}$, $1 \leq k < l \leq n-1$ выполняется

$$(n-k+1)c'_k(x^*) - (n-l)c'_{l+1}(x^*) = (l-k+1)c'_n(x^*_n); \tag{2.40}$$

$$\begin{aligned} (n-k+1)c'_k(x^*) - (n-p)c'_{p+1}(x^*) \leq \\ \frac{p-k+1}{l-k+1}((n-k+1)c'_k(x^*) - (n-l)c'_{l+1}(x^*)) \end{aligned} \tag{2.41}$$

для всех $p = k, \ldots, l-1$.

На основании данной теоремы можно построить алгоритм нахождения оптимальной функции стимулирования:

(1) Находим зависимости действий всех АЭ от действия наилучшего АЭ.
(2) Находим зависимость затрат на стимулирование от суммарного реализуемого действия.
(3) Решая дифференциальную задачу (производная от разности дохода от агрегированного действия и затрат на его реализацию), находим оптимальное действие наилучшего АЭ и оптимальную систему стимулирования.

Пример 5. Рассмотрим квадратичные издержки $c(r_i, x_i) = \frac{x_i^2}{2r_i}$, $n = 3$, $r_1 = 1$, r_2 и r_3 произвольны, $r_1 < r_2 < r_3$. Определим, в каких случаях может быть $x_1 = x_2 < x_3$ (другим возможным случаем является $x_1 < x_2 < x_3$, и по Леммам 2.2.1 и 2.3.3 иных вариантов быть не может). Полагаем $k = 1$, $l = 2$.

Из условия (2.36) (учитывая, что $x^* = x_1 = x_2$)

$$(l-k+1)c'_n(x_n) = (n-k+1)c'_k(x^*) - (n-l)c'_{l+1}(x^*);$$

$$2c'_3(x_3) = 3c'_1(x_1) - c'_3(x_1);$$

$$2\frac{x_3}{r_3} = 3x_1 - \frac{x_1}{r_3};$$

$$x_3 = \frac{r_3}{2} x_1 \left(3 - \frac{1}{r_3}\right). \tag{2.42}$$

Кроме того, в силу (2.37) при $p = 1$

$$\mu_p = ((n-k+1)c'_k(x^*) - (n-p)c'_{p+1}(x^*) - (p-k+1)c'_n(x_n)) \geq 0;$$

$$3c'_1(x_1) - 2c'_2(x_1) - c'_3(x_3) \geq 0;$$

$$3x_1 - 2\frac{x_1}{r_2} - \frac{x_3}{r_3} \geq 0;$$

$$x_1\left(3 - \frac{2}{r_2}\right) - x_3\frac{1}{r_3} \geq 0.$$

Выражая x_3 через x_1 (используя формулу (2.42)),

$$x_1\left(3 - \frac{2}{r_2}\right) - \frac{r_3}{2}x_1\left(3 - \frac{1}{r_3}\right)\frac{1}{r_3} \geq 0;$$

$$3 - \frac{2}{r_2} - \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{r_3}\right) \geq 0;$$

$$3 - \frac{4}{r_2} + \frac{1}{r_3} \geq 0.$$

Таким образом, мы нашли условие на r_1 и r_2, при котором (как получается из найденного выражения при любом $\bar{x}$) $x_1 = x_2$.

Заметим, что при $r_1 \neq 1$ условие выглядело бы следующим образом:

$$\frac{3}{r_1} - \frac{4}{r_2} + \frac{1}{r_3} \geq 0.\bullet$$

Исследуем вопрос о том, в каких случаях можно гарантировать реализацию активными элементами различных действий. Для этого введем функции $\tilde{x}_k(\tilde{x}_n)$ как решения уравнения

$$(n-k+1)c'_k(\tilde{x}_k) - (n-k)c'_{k+1}(\tilde{x}_k) = c'_n(\tilde{x}_n). \tag{2.43}$$

Все важные для нас свойства функций $\tilde{x}_k(\tilde{x}_n)$ описываются следующей леммой:

Лемма 2.3.6. Функция зависимости действия произвольного АЭ от действия наилучшего АЭ определена единственным образом при данном составе АС и строго возрастает.

Таким образом, при увеличении совокупного действия всей АС действия всех АЭ возрастают. Кроме того, при любом действии наилучшего АЭ решение задачи о действиях других АЭ единственно.

Следующая лемма определяет, в каких случаях можно говорить о том, что различные активных элементы реализуют различные действия, в терминах введенных функций $\tilde{x}_i(x_n)$.

Лемма 2.3.7. В случае строгой упорядоченности реализуемых действий (вычисленных по уравнению (2.43)) два различных АЭ не будут реализовывать одно и то же действие.

Следующая лемма носит технический характер и нужна для нахождения достаточных условий выполнения предположений леммы лемм 2.3.9.

Лемма 2.3.8. Для выполнения условия

$$c'_i(x) - c'_{i+1}(x) > c'_{i+1}(x) - c'_{i+2}(x) \qquad \forall x \in X$$

(и, как следствие, Леммы 2.3.9) достаточно, чтобы существовало такое $\Delta > 0$, что

$$\begin{aligned} &r_{i+1} - r_i = \Delta && \forall i = 1 \cdots n-1 \quad \text{и} \\ &c_{xrr}(r, x) < 0 && \forall r \in \Omega, x \in X. \end{aligned}$$

Теперь найдем необходимые условия для того, чтобы реализуемые действия были строго упорядочены.

Лемма 2.3.9. Достаточным условием для того, чтобы разные АЭ реализовывали разные действия, является выполнение условия

$$c'_i(x) - c'_{i+1}(x) > c'_{i+1}(x) - c'_{i+2}(x). \tag{2.44}$$

для любых $x \in X$ и $i = \overline{1, n-2}$.

Вспомним теперь, для любой АС мы определяли суммарные затраты $\mathcal{S}(\cdot)$ центра на реализацию некоторого агрегированного действия. Очевидно, что в случае выпуклости суммарных затрат центр будет использовать только чистые стратегии, не прибегая к смешанным (смешанная стратегия — когда центр назначает системы стимулирования в соответствии с некоторым вероятностным распределением). Следующая лемма приводит достаточные условия для того, чтобы затраты были выпуклой функцией.

Лемма 2.3.10. Выполнения условия

$$c'_i(x) - c'_{i+1}(x) > c'_{i+1}(x) - c'_{i+2}(x). \tag{2.45}$$

для любых $x \in X$ и $i = \overline{1, n-2}$ достаточно для того, чтобы суммарные затраты центра были выпуклой функцией, или, что то же самое, центру было невыгодно смешивать стратегии.

В данном разделе была рассмотрена задача нахождения оптимальной унифицированной системы стимулирования, решение которой необходимо для дальнейшего решения задачи управления составом. Были исследованы вопросы, связанные с описанием выбора АЭ своих действий при оптимальной системе стимулирования. Приведен алгоритм нахождения оптимальной системы стимулирования с использованием решения дифференциальных уравнений. Найдены условия, при которых можно гарантировать выбор АЭ различных действий. Описана связь между выбором АЭ различных действий и выпуклостью функции затрат. Найдена связь между выпуклостью функции затрат и использованием центром только одной системы стимулирования (т.е. использования чистой, а не смешанной стратегии).

2.4. Унифицированные системы стимулирования в активных системах с бесконечным числом активных элементов

В данном разделе рассматривается задача нахождения оптимальной функции стимулирования в АС с континуумом активных элементов. Результаты данного раздела сходны с результатами предыдущего раздела, в котором рассматривалась АС с конечным числом АЭ. Решение данной задачи необходимо для решения задачи управления составом АС.

Пусть тип активного элемента имеет некоторое непрерывное распределение, сосредоточенное на отрезке действительной оси $\Omega = [r_0, r_1]$ с функцией распределения $F(r)$, строго возрастающей и дифференцируемой на Ω. Тогда $r^* = F(r)$ будет иметь равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$ т.к.

$$\begin{aligned} P\{r^* \le x\} &= P\{F(r) \le x\} = P\{r \le F^{-1}(x)\} = \\ &= F(F^{-1}(x)) = x, \qquad x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Определим функцию затрат $\tilde{c}(r^*, x) = c(F^{-1}(r^*), x)$ (мы таким образом "переопределили" тип активного элемента). Тогда по Лемме 2.1.2 и функция $\tilde{c}(r^*, x)$ обладает всеми свойствами, которым должна удовлетворять функция затрат (**Р 2.1–Р 2.5**), поскольку этим свойствам удовлетворяет функция $c(r, x)$. Кроме того очевидно, что произведя обратную замену типов в оптимальной системе стимулирования для АС с функцией затрат $\tilde{c}(r^*, x)$, мы получим оптимальную систему стимулирования для функции затрат $c(r, x)$. Ясно, что при соответствующих заменах типов все условия на выбор действий активными элементами сохранятся.

Следовательно мы показали верность следующего утверждения:

Утверждение 2.4.1. Задача нахождения оптимальной функции стимулирования для случая произвольного распределения типов АЭ сводится к задаче нахождения оптимальной функции стимулирования для случая равномерного распределения типов АЭ. А именно, существует такая монотонная функция преобразования типов $r' = u(r)$, что типы АЭ r' имеют равномерное распределение, и оптимальная функция стимулирования при типах r' является оптимальной функцией стимулирования при типах r.

Итак, на основании предыдущего утверждения мы будем в дальнейшем полагать,что типы активных элементов имеют одинаковое для всех элементов равномерное распределение на множестве $\Omega = [r_0, r_1]$:

$$P\{r \in [r_0, r^*]\} = \begin{cases} \frac{r^* - r_0}{r_1 - r_0} & \text{при } r \in \Omega; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Каждый из активных элементов знает свой тип в то время, как центру типы имеющихся элементов неизвестны, и он вынужден руководствоваться вероятностным распределением.

В соответствии с (1.44)-(1.46) математически задача выписывается в виде двух задач:

$$\mathbf{E}\,\sigma(f(r)) \to \min_{f(r), \sigma(x) \in \Theta} \text{ – задача центра} \tag{2.46}$$

$$f(r) \in \operatorname*{Argmax}_{x}(\sigma(x) - c(r, x)) \quad \forall r \in \Omega \text{ – з. АЭ} \tag{2.47}$$

$$\mathbf{E}\,f(r) = \bar{x} \quad \text{(граничное условие),} \tag{2.48}$$

где $\mathbf{E}$ обозначает математическое ожидание по типу активного элемента.

Мы будем решать задачу (2.47)-(2.48), считая, что задача (2.46) максимизации прибыли центром при решенной задаче агента является тривиальной задачей на максимизацию функции одного переменного (среднего действия).

Можно было бы предположить, что по функции $f(x)$ можно восстановить наилучшую $\sigma(x)$, при которой получается данная функция действия. Докажем этот факт. Для этого вспомним, что должно выполняться (2.47), или

$$\sigma(f(r^*)) - c(r^*, f(r^*)) \geq \sigma(f(r)) - c(r^*, f(r)) \quad \forall\, r, r^* \in \Omega; \tag{2.49}$$

$$\sigma(f(r^*)) - \sigma(f(r)) \geq c(r^*, f(r^*)) - c(r^*, f(r)). \tag{2.50}$$

Пусть $r^* > r$. Разделим обе части неравенства (2.50) на положительное $r^* - r$ и возьмем предел при $r \to r^*$. Получим:

$$\sigma'(f(r^*))f'(r^*) = \lim_{r\to r^*} \frac{\sigma(f(r^*)) - \sigma(f(r))}{r^* - r} \geq$$

$$\geq \lim_{r\to r^*} \frac{c(r^*, f(r^*)) - c(r^*, f(r))}{r^* - r} = c'_x(r^*, f(r^*))f'(r^*),$$

или учитывая, что $f'(r) > 0$, получаем

$$f'(r^*)\sigma'(f(r^*)) \geq f'(r^*)c'_x(r^*, f(r^*)). \tag{2.51}$$

Предположив $r^* < r$ и проделав те же выкладки, мы получим обратное неравенство, т.е.

$$f'(r^*)\sigma'(f(r^*)) \leq f'(r^*)c'_x(r^*, f(r^*)), \tag{2.52}$$

что вместе с (2.51) приводит к равенству

$$f'(r)\sigma'(f(r)) = f'(r)c'_x(r, f(r)) \tag{2.53}$$

(в случае существования соответствующих производных).

При выполнении дополнительного условия

$$\min_r(\sigma(f(r)) - c(r, f(r))) = 0 \tag{2.54}$$

(которое необходимо для решения задач 2.46-2.48, чтобы соответствующая функция $\sigma(x)$ была оптимальной) мы получаем однозначное определение $\sigma(x)$ по $f(r)$ (очевидно, что по $\sigma(x)$ мы можем используя формулу (2.47) определить $f(r)$). В силу того, что $c_x(r, x) > 0$, функция $\sigma(x)$ тоже должна монотонно возрастать (в точках возрастания значений функции $f(r)$).

Заметим: поскольку необходимым условием для того, чтобы элемент типа r выбирал действие $f(r)$ является $\sigma'(f(r)) = c'_x(r, f(r))$, то, рассмотрев разницу $\sigma(f(r)) - c(r, f(r))$ и продифференцировав ее по r получим, что $\frac{d}{dr}(\sigma(f(r)) - c(r, f(r))) = \sigma'(f(r))f'(r) - c'_x(r, f(r))f'(r) - c'_r(r, f(r)) = -c'_r(r, f(r)) > 0$, то есть лучший элемент получает большую прибыль (разность между стимулированием и затратами). Исходя из этого можно сказать, что для выполнения условия (2.54) необходимо и достаточно, чтобы $\sigma(f(r_0)) - c(r_0, f(r_0)) \geq 0$ (поскольку $r_1 > r_0$). В частности, можно положить

$$\sigma(f(r_0)) = c(r_0, f(r_0)). \tag{2.55}$$

Таким образом, $\sigma(x)$ определяется по $f(r)$ в соответствии с дифференциальным уравнением (2.53) и граничным условием (2.55).

Пример 6. Пусть $f(r) = r$, $c(r, x) = \frac{x^2}{r}$. Тогда $c'_x(r, x) = 2\frac{x}{r}$. По формуле (2.51) $\sigma'(f(r)) = \sigma'(r) = c'_x(r, f(r)) = 2\frac{f(r)}{r} = 2$ и, следовательно, $\sigma(x) = 2x + C$. Константа C подбирается из условия (2.54), для выполнения которого необходимо и достаточно, чтобы было выполнено (2.55), т.е. $\sigma(f(r_0)) = c(r_0, f(r_0))$. В данном случае $2r_0 + C = r_0$, то константа $C = -r_0$.•

Рассмотрим задачу, фиксирующую средний выпуск на уровне $\bar{x}$. Тогда задача о нахождении оптимальной функции стимулирования (которая определяется одновременно с функцией $f(x)$) выглядит следующим образом:

$$\mathbf{E}\,\sigma(f(r)) \to \min_{\sigma(x), f(r)} \tag{2.56}$$

при выполнении условий:

$$\mathbf{E}\,f(r) = \bar{x}, \tag{2.57}$$

$$\sigma'(f(r)) = c'_x(r, f(r)), \tag{2.58}$$

$$\sigma(f(r_0)) = c(r_0, f(r_0)), \tag{2.59}$$

где $\mathbf{E}$ обозначает математическое ожидание.

Заметим:

$$\begin{aligned}\int\limits_{r_0}^{r_1} \sigma(f(r))\,dr &= r\sigma(f(r))\Big|_{r_0}^{r_1} - \int\limits_{r_0}^{r_1} r\sigma'(f(r))f'(r)\,dr = \\ &= r\sigma(f(r))\Big|_{r_0}^{r_1} - \int\limits_{r_0}^{r_1} rc'_x(r, f(r))f'(r)\,dr;\end{aligned} \tag{2.60}$$

$$\begin{aligned}&\int\limits_{r_0}^{r_1} rc'_x(r, f(r))f'(r)\,dr = \\ &= \int\limits_{r_0}^{r_1} r\left(\frac{dc(r, f(r))}{dr} - c'_r(r, f(r))\right)d\,r = \\ &= rc(r, f(r))\Big|_{r_0}^{r_1} - \int\limits_{r_0}^{r_1} rc'_r(r, f(r))d\,r - \int\limits_{r_0}^{r_1} c(r, f(r))d\,r.\end{aligned} \tag{2.61}$$

Кроме того,

$$(2.62)\qquad r\sigma(f(r))\Big|_{r_0}^{r_1} = r_1\sigma(f(r))\Big|_{r_0}^{r_1} + (r_1 - r_0)\sigma(f(r_0)) =$$

$$= r_1\int\limits_{r_0}^{r_1} \sigma'(f(r))f'(r)\,dr + (r_1 - r_0)c(r_0, f(r_0)) =$$

$$= r_1\int\limits_{r_0}^{r_1} \left(\frac{dc(r, f(r))}{dr} - c_r'(r, f(r))\right) dr +$$

$$+(r_1 - r_0)c(r_0, f(r_0)) =$$

$$= r_1 c(r, f(r))\Big|_{r_0}^{r_1} - r_1\int\limits_{r_0}^{r_1} c_r'(r, f(r))\,dr +$$

$$+(r_1 - r_0)c(r_0, f(r_0)) =$$

$$= rc(r, f(r))\Big|_{r_0}^{r_1} - r_1\int\limits_{r_0}^{r_1} c_r'(r, f(r))\,dr.$$

Объединяя (2.60)-(2.62), получаем:

$$(2.63)\qquad (r_1 - r_0)\,\mathbf{E}\,\sigma(f(r)) = \int\limits_{r_0}^{r_1} rc_r'(r, f(r)) - r_1c_r'(r, f(r)) + c(r, f(r))\,dr =$$

$$= \int\limits_{r_0}^{r_1} \left((r - r_1)c_r'(r, f(r)) + c(r, f(r))\right)\,dr =$$

$$= \int\limits_{r_0}^{r_1} c(r, f(r))\,dr + \int\limits_{r_0}^{r_1} (r - r_1)c_r'(r, f(r))\,dr.$$

Можно заметить, что первый интеграл в последнем выражении отвечает за стимулирование при персонифицированной системе стимулирования с функцией действия $f(r)$, а во втором интеграле подынтегральное выражение всегда больше нуля т.к. $r \le r_1$, а $c_r'(r, x) < 0$ и равно величине переплат активным элементам за использование неунифицированной системы стимулирования при функции действия $f(r)$.

Как можно заметить, в минимизируемом выражении мы избавились от функции $\sigma(x)$, и теперь минимизацию можно проводить только по одной функции — по $f(x)$. Итак, нам надо минимизировать интеграл (2.63) при ограничении (2.57).

Сделаем это, воспользовавшись методом множителей Лагранжа:

$$(2.64)\qquad L = \mathbf{E}\,\sigma(f(r)) - \lambda(\mathbf{E}\,f(r) - \bar{x}) =$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_0}\int\limits_{r_0}^{r_1} ((r - r_1)c_r(r, f(r))$$

$$+c(r, f(r)) - \lambda f(r))\,dr + \lambda\bar{x}.$$

Необходимым условием для минимизации (2.64) является выполнение условия Эйлера (см. [**72**]):

$$\frac{\partial}{\partial f}\left(rc_r(r, f(r)) - r_1c_r(r, f(r)) + c(r, f(r)) - \lambda f(r)\right)) = 0, \tag{2.65}$$

или

$$(r - r_1)c_{xr}(r, f(r)) + c_x(r, f(r)) = \lambda. \tag{2.66}$$

Константа λ находится из условия $\mathbf{E}\, f(r) = \bar{x}$.

Заметим, что для случая затрат вида $c(r, x) = \frac{c(x)}{r} + C$ уравнение (2.66) приобретает вид

$$-r_1c_{xr}(r, f(r)) = \lambda. \tag{2.67}$$

Теперь алгоритм нахождения оптимальных функций стимулирования и действия можно записать в следующем виде:

(1) Используя дифференциальное уравнение (2.66) (или в частном случае 2.67), находим функцию $f(r)$ в зависимости от константы $\lambda > 0$ (как множитель Лагранжа в задаче минимизации при ограничении $\mathbf{E}\, f(r) - \bar{x} \geq 0$);
(2) Находим значение λ из условия $\mathbf{E}\, f(r) = \bar{x}$, где $\mathbf{E}\, f(r)$ вычисляется по формуле (2.63);
(3) Зная $f(r)$, находим функцию стимулирования $\sigma(x)$, используя дифференциальное уравнение (2.66) и граничное условие (2.55) $\sigma(f(r_0)) = c(r_0, f(r_0))$.

Заметим, что для функций затрат вида $c(r, x) = \frac{g(x)}{r} + C$ сумма двух слагаемых в (2.66) $rc_{xr}(r, f(r)) + c_x(r, f(r)) = 0$ и необходимое условие минимума (2.56) переписывается в более простом виде:

$$-r_1c_{xr}(r, f(r)) - \lambda = 0. \tag{2.68}$$

В этом случае

$$\lambda = -r_1c_{xr}(r, f(r)) \tag{2.69}$$

и минимальные средние затраты на стимулирование равны

$$\mathbf{E}\, \sigma(f(r)) = -\frac{1}{r_1 - r_0} \int\limits_{r_0}^{r_1} r_1 c'_r(r, f(r))\, dr. \tag{2.70}$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение (в предположении функции затрат вида $c(r, x) = \frac{c(x)}{r} + C$):

Утверждение 2.4.2. Если функция $f(r)$ является функцией действия для оптимальной функции стимулирования, то на всех участках возрастания функции $f(r)$ выполняется следующее дифференциальное соотношение:

$$\lambda = -c_{xr}(r, f(r)), \tag{2.71}$$

где λ — некоторая неотрицательная константа. При этом средние затраты на стимулирование равны

$$\mathbf{E}\,\sigma(f(r)) = -\frac{1}{r_{\max} - r_{\min}} \int\limits_{r_0}^{r_1} r_{\max} c'_r(r, f(r))\, dr, \tag{2.72}$$

где $r_{\max}$ и $r_{\min}$ - соответственно нижняя и верхняя границы интервала, на котором сосредоточено равномерное распределение типов АЭ.

Пример 7. Рассмотрим функцию затрат $c(r,x) = \frac{x^2}{r}$. Исходя из (2.68), имеем: $\lambda = -r_1 c_{xr}(r, f(r)) = 2r_1 \frac{f(r)}{r^2}$ и $f(r) = \lambda \frac{r^2}{2r_1}$.

Коэффициент λ находится из условия

$$\int\limits_{r_0}^{r_1} f(r)\, dr = (r_1 - r_0)\bar{x}$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{r_0}^{r_1} \lambda \frac{r^2}{2r_1}\, dr = \frac{\lambda}{2r_1}\frac{r^3}{3}\Big|_{r_0}^{r_1} = \frac{(r_1^3 - r_0^3)\lambda}{6r_1} = (r_1 - r_0)\bar{x},$$

то есть

$$\lambda = \frac{6r_1\bar{x}(r_1 - r_0)}{r_1^3 - r_0^3},$$

$$f(r) = \lambda \frac{r^2}{2r_1} = \frac{3\bar{x}(r_1 - r_0)}{r_1^3 - r_0^3} r^2,$$

Тип активного элемента в зависимости от реализуемого им действия есть

$$r = f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{3\bar{x}}\frac{r_1^3 - r_0^3}{r_1 - r_0}}. \tag{2.73}$$

$$c_x(r(x), x) = 2\frac{x}{r(x)} = 2\sqrt{x}\sqrt{\frac{3\bar{x}(r_1 - r_0)}{r_1^3 - r_0^3}}. \tag{2.74}$$

Используя (2.53), имеем:

$$\sigma(x) - \sigma(f(r_0)) = \int\limits_{f(r_0)}^{x} c_x(r(y), y)\, dy =$$

$$= \frac{2}{3} y^{2/3}\Big|_{f(r_0)}^{x} = 2\sqrt{\frac{3\bar{x}(r_1 - r_0)}{r_1^3 - r_0^3}}$$

и, поскольку

$$c_r(r, f(r)) = -\left(r^2 \frac{3\bar{x}(r_1 - r_0)}{r_1^3 - r_0^3}\right)^2 \Big/ r^2 =$$

$$= -r^2\left(\frac{3\bar{x}(r_1 - r_0)}{r_1^3 - r_0^3}\right)^2,$$

функция стимулирования равна

$$\sigma(x) = c(r_0, f(r_0)) + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3\bar{x}(r_1 - r_0)}{r_1^3 - r_0^3}}\left(x^{3/2} - f(r_0)^{3/2}\right). \tag{2.75}$$

Средние затраты на стимулирование равны

$$(2.76)\qquad C_1 = \mathbf{E}\,\sigma(f(r)) = -\frac{1}{r_1 - r_0}\int\limits_{r_0}^{r_1} r_1 c_r(r, f(r))\,dr =$$

$$3(\bar{x})^2\frac{r_1(r_1 - r_0)}{r_1^3 - r_0^3} = 3\bar{x}^2\frac{r_1}{r_1^2 + r_1 r_0 + r_0^2}.$$

Заметим, что при $r_0 \to r_1$ математическое ожидание затрат

$$\mathbf{E}\,\sigma(f(r)) \to \frac{\bar{x}^2}{r_1},$$

чего и следовало ожидать (вырожденный случай является пределом непрерывного равномерного распределения).

Оценим потерю эффективности при переходе к унифицированной системе стимулирования. А именно, используя результаты о персонифицированной системе стимулирования (см. [**33**], значение C_0 затрат для реализации того же среднего действия при использовании персонифицированной функции стимулирования) получаем, что

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{3r_1(r_1 - r_0)\bar{x}^2/(r_1^3 - r_0^3)}{2\bar{x}^2/(r_1 + r_0)} = \frac{r_1 3(r_1 + r_0)}{2(r_1^2 + r_1 r_0 + r_0^2)} =$$

$$1 + \frac{1 + \alpha - 2\alpha^2}{2(1 + \alpha + \alpha^2)} \geq 1,$$

где $\alpha = r_0/r_1 \in [0, 1]$. Последнее неравенство следует из того, что $\alpha^2 \leq \alpha \leq 1$. Заметим, что равенство возможно только тогда, когда $\alpha = 1$, т.е. $r_0 = r_1$. Отметим, что $\frac{C_1}{C_2}$ строго убывает по α.•

Ранее нами была доказано утверждение о выполнении равенства

$$(2.77)\qquad f'(r)\sigma'(f(r)) = f'(r)c'_x(r, f(r)).$$

Очевидно, что при отличии $f'(r)$ от нуля мы можем обе части разделить на $f'(r)$ и получить равенство

$$(2.78)\qquad \sigma'(f(r)) = c'_x(r, f(r)).$$

В следующем утверждении говорится о том, что данное соотношение верно даже в том случае, если производная $f(r)$ равна нулю.

Утверждение 2.4.3. Если функции $\sigma(x)$ и $f(r)$ являются решениями задачи (2.46)-(2.48), и существует последовательность $r_i > r^*$,

$$\lim_{i\to\infty} r_i = r^*, \quad \lim_{i\to\infty} f(r_i) = f(r^*),$$

то функция $\sigma(x)$ имеет правую производную в точке $f(r^*)$ и она равна

$$\sigma'(f(r^*)+) = c'_x(r^*, f(r^*))$$

Если же существует последовательность $r_i < r^*$,

$$\lim_{i\to\infty} r_i = r^*, \qquad \lim_{i\to\infty} f(r_i) = f(r^*),$$

то функция $\sigma(x)$ имеет левую производную в точке $f(r^*)$ и она равна

$$\sigma'(f(r^*)+) = c'_x(r^*, f(r^*)).$$

Итак, кратко подведем итоги **второй главы.**

В данной главе решается задача синтеза оптимальных унифицированных систем стимулирования.

В разделе 2.1 рассматриваются свойства возможных производственных функций АЭ, под которыми понимается зависимость выбранного действия от типа АЭ и затрат.

В разделе 2.2 для случая унифицированных систем стимулирования введена функция действия, которая сопоставляет каждому типу АЭ действие, которое он выбирает при использовании данной функции стимулирования, и найдена взаимосвязь между функциями действия и функциями стимулирования. Описаны основные свойства функции действия.

В разделе 2.3 приводится решение задачи синтеза оптимальной унифицированной системы стимулирования для дискретной АС. Оптимальной называется функция стимулирования, при которой затраты на реализацию некоторого фиксированного действия (или среднее действие в непрерывном случае) минимальны.

Приведен и обоснован алгоритм поиска оптимальной системы стимулирования для АС с конечным числом АЭ. Исследуется вопрос использования центром распределения вероятностей на множестве унифицированных функций стимулирования.

Найдены свойства оптимальных функций стимулирования: дифференциальные уравнения, описание реализуемых действий, их возрастание и убывание.

В разделе 2.4 рассматривается задача поиска оптимальной унифицированной системы стимулирования для непрерывного случая (когда АС состоит из континуума различных АЭ). Приведен алгоритм синтеза оптимальной функции стимулирования, основанный на найденном дифференциальном соотношении.

Алгоритмы синтеза оптимальной функции стимулирования для двух рассмотренных АС различаются тем, что для АС с конечным числом АЭ для нахождения оптимальной функции стимулирования необходимо решать дифференциальные уравнения, связывающие действия наилучшего АЭ с действиями других АЭ, а для случая бесконечного числа АЭ необходимо решить одно дифференциальное уравнение на оптимальную функцию действия (и потом исходя из этой функции действия найти оптимальную функцию стимулирования).

Данное исследование было необходимо для решения задачи формирование состава исполнителей АС.

Глава 3

МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ФОРМИРОВАНИЯ СОСТАВА ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

В настоящей главе на основании проведенного во второй главе исследования оптимальных функций стимулирования (задача управления при фиксированном составе) рассматриваются вопросы управления (исполнительным) составом АС — множеством АЭ.

3.1. Динамическое формирование состава исполнителей

В настоящем разделе рассматривается задача динамического формирования состава. В динамике большую роль играют ожидания о будущих изменениях в составе АС и коэффициент дисконтирования. Именно, сегодняшнее решение о приеме на работу или увольнении зависит от ожидания будущих прибылей, или от ожидания увеличения прибыли за счет изменения состава АС.

Обозначим за β временной коэффициент дисконтирования системы. Тогда, если в каждый из периодов времени фирма получает прибыль $\pi_i(S_i)$, где $i = 0, 1, \ldots$ — время, и S_i — состав фирмы в период времени i (состав является случайной величиной, значение которой зависит от проводимой фирмой политики формирования состава), то задачей фирмы является максимизация функционала

$$L = \mathbf{E}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \pi_i(S_i)\right),$$

где $\mathbf{E}$ обозначает математическое ожидание по всем возможным составам и последовательность составов S_i согласована. Функция распределения составов определяется политикой формирования состава:

$$P(S_i|s_{i-1}) = F(s_{i-1}, u)(S_i),$$

где $F(\cdot,\cdot)$ — некоторая (вероятностная) функция, а u — управляющая переменная, которую выбирает фирма при решении задачи управления составом. Будем предполагать, что F не зависит от состава до момента времени $i-1$.

Мы будем использовать при исследовании модель функционирования АС, рассмотренную во второй главе. Будем предполагать, что в каждый момент времени фирма использует оптимальную функцию стимулирования, которая может зависеть от времени и от текущего состава исполнителей. Будем считать, что функции стимулирования между собою никак не связаны (кроме того факта, что являются оптимальными). Очевидно, что наилучшей политикой фирмы будет в каждый момент времени использовать наилучшую функцию стимулирования (т.е. оптимальную), изменяя ее в зависимости от имеющегося состава. Так же очевидно, что если состав со временем не изменяется, то точно так же не изменяется и функция стимулирования, поскольку она (в связи с результатами главы 2) зависит исключительно от состава исполнителей, т.е. от их производственных характеристик.

Основное утверждение, на котором основываются результаты данного раздела главы, формулируется следующим образом.

Утверждение 3.1.1. При улучшении типа любого из АЭ не может произойти увеличения оптимальных затрат центра на стимулирование или уменьшение его прибыли.

На самом деле (что видно из доказательства), если действие АЭ совпадает с соседними (следующим и предыдущим), то при небольшом улучшении типа данного АЭ не произойдет уменьшения оптимальных затрат. И наоборот, при улучшении типа АЭ, действие которого не совпадает по крайней мере с одним из соседних АЭ, произойдет уменьшение затрат на реализацию фиксированного агрегированного действия.

В соответствии с утверждением 3.1.1 мы можем заключить, что наилучшей стратегией по управлению составом является следующая: при наличии АЭ, тип которого превосходит тип наихудщего АЭ, произвести замену наихудшего АЭ на данный. В случае же, если есть возможность принять на работу нового сотрудника без увольнения старых, необходимо, оставляя прежний состав, принимать новых сотрудников, поскольку (в соответствии с утверждением 2.3.4) наихудший АЭ при оптимальной системе стимулирования будет выбирать ненулевое действие, что говорит от том, что он в системе не будет "лишним", т.е. его не надо увольнять (иначе при оптимальной системе стимулирования он бы выбирал нулевое действие, т.е. бездействовал).

Если же мы предположим, что количество сотрудников ограничено, то набор будет проходить следующим образом: в случае, если тип нового сотрудника лучше, чем тип наихудшего сотрудника в АС, то он будет заменен.

Если фирма будет состоять только из агентов с наилучшими возможными типами, то процесс подбора персонала остановится, иначе же он будет продолжаться (если только нет платы за изменение состава сотрудников).

Усложним модель: предположим теперь, что количество сотрудников ограничено и для приема новых сотрудников места должны быть вакантны, т.е. нельзя сначала узнать типы новых сотрудников, и потом принимать решение об увольнении старых сотрудников. Кроме того, будем рассматривать динамические модели, в которых будущая прибыль дисконтируется с коэффициентом β, т.е. умножается на β в степени времени до момента получения прибыли.

Достаточно очевидным представляется следующее утверждение:

Утверждение 3.1.2. Для любой АС с несколькими АЭ существует такое r', зависящее от текущего состава АС и коэффициента дисконтирования β, что в текущий момент времени увольняются все АЭ с типом менее r' .

Очевидно, что в каждый конкретный момент времени необходимо увольнять наихудших сотрудников, оставляя только наилучших, таким образом параметр r'

выступает в роли переменной управления АС и находится исходя из максимизационной задачи динамического программирования с бесконечным горизонтом

$$\mathbf{E}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \pi_i(S_i)\right) \to \max_{r'(S)},$$

где $r'(S)$ — функция зависимости критического типа r' в зависимости от текущего состава, и последовательность S_i согласована выбором функции $r'(S)$. Под согласованностью подразумевается то, что вероятностная мера будущих составов определяется тем, какие из АЭ в настоящее время исключаются из состава АЭ.

Ясно, что $r'(S)$ удовлетворяет следующему свойству:

$$r'(S_1) = r'(S_2) \tag{3.1}$$

если множества $\{r \in S_1 : r \geq r'(S_1)\}$ и $\{r \in S_2 : r \geq r'(S_1)\}$ совпадают (при изменении типов АЭ множества S_1 ниже границы $r'(S)$ не изменяет самой границы).

Для нахождения $r(S)$ используется принцип динамического программирования. Находится такая функция $G(S)$ (ожидаемая прибыль при начальном составе S), что

$$G(S) = \max_{r'} \left(\pi(S) + \beta\, \mathbf{E}(G(S')/r', S)\right),$$

где S' — случайный состав при условии, что в предыдущий момент были уволены все АЭ с типом менее r'. Тогда

$$r'(S) \in \operatorname*{argmax}_{r'} \left(\pi(S) + \beta\, \mathbf{E}(G(S')/r', S)\right),$$

причем функция $r'(S)$ должна удовлетворять условию (3.1).

Таким образом, в рассматриваемых моделях задача о замене состава в каждый конкретный момент времени решается следующим образом:

(1) Определение критического значения для типов сотрудников и увольнение сотрудников, тип которых меньше данного критического значения.
(2) Анализ пришедших сотрудников и определение тех лучших из них, которые принимаются на работу.
(3) Если ни один из сотрудников не принят на работу, повторение пункта 2 в новый период времени.
(4) Если кто-то принят - повторение п. 1 для определения нового критерия для увольнения. Если увольнять некого - процесс заканчивается.

При решении задачи о формировании состава действует тот же алгоритм с тем изменением, что на начальном этапе увольнять некого, и формируется сразу весь состав, возможно за несколько шагов.

Отметим несколько свойств функции $r'(S)$, которые будут характеризовать найденное решение.

Во-первых, для АС S, состоящих из "хороших" АЭ, будет верно $r'(S) = 0$, т.е. существует такое $\overline{r}$, строго меньшее максимально возможного типа АЭ, что

$$\forall S : (\forall r \in S \Rightarrow r > \overline{r}) \Rightarrow r'(S) = 0. \tag{3.2}$$

Во-вторых, для АС S, состоящих только из "плохих" АЭ, будет верно $r'(S) = r_{\max}$, т.е. существует такое $\underline{r}$, строго большее нуля, что для

$$\forall S : (\forall r \in S \Rightarrow r < \underline{r}) \Rightarrow r'(S) = r_{\max}. \tag{3.3}$$

В-третьих, функция $r'(S)$ не возрастает по элементам множества S, т.е. для любых S, S' выполняется

$$(S' = (S \cup \{r_1\}) \backslash \{r_2\}), r_1 > r_2) \Rightarrow r'(S') \leq r'(S). \tag{3.4}$$

3.2. Управление составом путем обучения

В данном разделе на основании рассмотренной модели АС с несколькими АЭ анализируются вопросы изменения состава АЭ путем обучения (изменения типа АЭ). Находятся необходимые и достаточные условия того, что различным агентам АС выгодно изменять тип АЭ.

Пусть $g(r)$ есть стоимость обучения АЭ с типом r, т.е. для изменения типа АЭ с r_1 до r_2 необходимо затратить сумму

$$\int_{r_1}^{r_2} g(r)\, dr. \tag{3.5}$$

Прежде всего, отметим, что центр рассматривает принятие текущих (не стратегических) решений, т.е. мы говорим о малом возможном улучшении типа сотрудников, когда центр является достаточно "близоруким" и не может оценить большого изменения типов. Он оценивает только краткосрочную выгоду от своих действий. Как легко понять, такая политика может не привести к действительно оптимальному исходу, однако в данной работе мы будем рассматривать только такую ситуацию.

Как мы уже отмечали, если действие АЭ при оптимальной функции стимулирования отличается от действий других АЭ (на самом деле достаточно, чтобы действие АЭ отличалось от действия предыдущего АЭ), то улучшение его типа обязательно скажется на уменьшении общих затрат на реализацию некоторого агрегированного действия.

Будем предполагать, что действие АЭ отличается от действий друг АЭ в системе.

Заметим, что производная общих затрат по действию конкретного элемента равна нулю (поскольку используется оптимальная функция стимулирования). Следовательно, если тип АЭ улучшается, то общие затраты (при фиксированных действиях АЭ) уменьшаются (в соответствии с формулой (2.13) на

$$(c_i'(x_i) - c_i'(x_{i-1}))(n - i + 1)\Delta r_i + o(\Delta r_i)$$

так как при этом уменьшаются затраты на стимулирование данного АЭ и всех элементов с лучшими типами. Заметим, что в предыдущей формуле подразумевалась производная по типу. В дальнейшем в данном разделе все производные функций затрат будут рассматриваться по типу.

Обозначив, как и ранее, затраты на реализацию суммарного действия y за $\mathcal{S}(y)$, мы получаем (используя в качестве выражения для затрат формулу (2.13)) цепочку:

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{S}(y)}{dr_i} &= \frac{\partial\mathcal{S}(y)}{\partial r_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\mathcal{S}(y)}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dr_i} = \\
&= (c_i'(x_i) - c_i'(x_{i-1}))(n-i+1) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\mathcal{S}(y)}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dr_i} = \\
&= (c_i'(x_i) - c_i'(x_{i-1}))(n-i+1),
\end{aligned}$$

поскольку частные производные $\frac{\partial\mathcal{S}(y)}{\partial x_j}$ равны нулю.

Теперь заметим, что наиболее выгодно улучшать тип того элемента, для которого отношение выгоды от улучшения типа к затратам на увеличение максимально, следовательно, мы доказали теорему

Теорема 3.2.1. В активной системе наиболее выгодно улучшать тип активного элемента, для которого значение выражения

$$\frac{(c_i'(x_i) - c_i'(x_{i-1}))(n-i+1)}{g(r_i)} \tag{3.6}$$

максимально.

Если мы улучшим тип АЭ без изменения функции стимулирования, то при этом (считая, что изменения типа были малы) прибыль самого АЭ увеличится, а прибыль как центра, так и других АЭ не изменится. Если же после изменения типа мы так изменим функцию стимулирования, что АЭ будут выбирать те же самые действия, но при этом ограничении функция стимулирования будет оптимальной (затраты центра будут минимальны), то прибыль самого АЭ и АЭ с худшими типами не изменится, а прибыль лучших АЭ уменьшится на одну и ту же величину.

Заметим теперь, что если соотношение в уравнении (3.6) больше единицы, то увеличение типа АЭ принесет прибыль, если меньше единицы — будет убыточно, поскольку (3.6) есть отношение прибыли к затратам.

Таким образом, мы можем сформулировать

Утверждение 3.2.2. Если в АС для любого АЭ с номером i выполняется

$$\frac{(c_i'(x_i) - c_i'(x_{i-1}))(n-i+1)}{g(r_i)} < 1,$$

то центру экономически не выгодно увеличивать тип никакого из АЭ. Наоборот, если существует i, для которого выполнено

$$\frac{(c_i'(x_i) - c_i'(x_{i-1}))(n-i+1)}{g(r_i)} > 1,$$

то центру выгодно увеличивать тип АЭ с номером i.

Следствие 3.2.3. Оптимальным может быть только такое состояние АС, когда для любого из АЭ выполняется

$$\frac{(c_i'(x_i) - c_i'(x_{i-1}))(n-i+1)}{g(r_i)} \le 1,$$

и центр не изменял типы тех АЭ, для которых данное неравенство является строгим.

Доказательство данного следствия сразу же вытекает из утверждения.

Отметим, что если центр может извлекать прибыль из уменьшения типов АЭ, то верны результаты, аналогичные доказанным ранее. При этом будет справедливо следующее (доказываемое аналогично предыдущим)

Утверждение 3.2.4. Оптимальным может быть только такое состояние АС, когда для любого из АЭ выполняется

$$\frac{(c_i'(x_i) - c_i'(x_{i-1}))(n-i+1)}{g(r_i)} = 1,$$

и центр не изменял типы тех АЭ, для которых данное неравенство является строгим.

Заметим, что, применяя "близорукую" политику, центр может прийти к такому составу, когда локально будет не выгодно увеличивать тип ни одного из АЭ, однако это равновесие будет не оптимально.

Рассмотрим теперь АС, в которых существуют АЭ, которые при оптимальной функции стимулирования выбирают одинаковые действия. Результаты данной главы распространяются на АЭ, чьи действия отличаются от действий других элементов, и на АЭ, чьи действия совпадают с действиями других АЭ, но отличаются от действий худших (или предыдущих по порядку) АЭ. Кроме того, можно показать, что результаты данной главы с некоторыми ограничениями применимы к АЭ, чьи действия отличаются от действий лучших АЭ (при этом будут другие формулы). Однако небольшие изменения типов АЭ, чьи действия совпадают как с действиями наилучших, так и с действиями наихудших АЭ, не приведут к изменению оптимальной функции стимулирования и, как следствие, к изменению прибыли центра. Однако при улучшении типа данного АЭ прибыль получит сам АЭ. Притом прибыль будет равна разности между его затратами. Поскольку производная от затрат составляет $c_r(r_i, x_i)$, а функцией $g(r)$ определяются затраты на увеличение типа, то верно следующее утверждение.

Утверждение 3.2.5. Если действие АЭ совпадает с действием (некоторого) лучшего АЭ и (некоторого) худшего АЭ, то данному АЭ выгодно увеличить тип путем обучения если

$$\frac{c_r(r_i, x_i)}{g(r_i)} > 1.$$

Итак, кратко подведем итоги **третьей главы.**

В разделе 3.1 рассматривались вопросы формирования состава исполнителей на основании проведенного в главе 2 исследования свойств оптимальных функций стимулирования. Была рассмотрена динамическая модель формирования состава исполнителей, приведен алгоритм нахождения последовательности оптимальных составов (в различные интервалы времени) на основании решения задачи динамического программирования. Показано, что оптимальной стратегией является увольнение сотрудников с типом меньше критического, при этом данное критическое значение типов определяется по текущему составу АС и не зависит от АЭ, типы которых меньше данного критического значения.

В разделе 3.2 была рассмотрена и проанализирована модель изменения (за плату) типа АЭ и найден механизм определения АЭ (необходимые и достаточные условия), чей тип наиболее выгодно изменять при заданном составе АС. Исследован вопрос выгодности изменения типа самим АЭ.

Глава 4

ЗАДАЧА ФОРМИРОВАНИЯ УПРАВЛЯЮЩЕГО СОСТАВА АКТИВНОЙ СИСТЕМЫ С ОДНИМ АКТИВНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ И НЕСКОЛЬКИМИ ЦЕНТРАМИ

В данной главе исследуются свойства АС, состоящих из нескольких центров и одного АЭ в достаточно общих предположениях (накладываются только условия непрерывности и неотрицательности всех функций, компактность множества действий АЭ). В качестве одного АЭ может выступать агрегированный коллектив АЭ. Проблема заключается в исследовании роли каждого из центров в управлении АЭ, в изучении получающихся равновесий и распределении прибыли между различными участниками данной АС.

4.1. Характеризация равновесий

Для решения задачи формирования состава необходимо уметь описывать равновесия, которые получаются при игре центров. В данном разделе приводятся основные определения (равновесие, оптимальность, угроза). В качестве равновесия используется концепция совершенных к подыграм равновесий Нэша. Подыгра в данном случае - выбор АЭ его действия. Т.к. в данном разделе мы ограничиваемся рассмотрением статических игр, то АЭ будет выбирать оптимальное для себя действие, поскольку ни один из центров не сможет в следующих периодах (которых нет) наказать его за неблагоприятный для центра выбор.

Назовем стратегии центров $(\sigma_p(x))_{p=1}^n$ *допустимыми*, если они удовлетворяют следующим свойствам:

1) функции стимулирования неотрицательны и принадлежат определенному ранее классу функций стимулирования M:
$$\sigma_p(x) \in M \qquad \forall p = \overline{1,n};$$
2) отсутствует "блеф", т.е. центры обещают столько, сколько они реально могут заплатить:
$$H_p(x) \geq \sigma_p(x) \qquad \forall p = \overline{1,n}.$$

Будем говорить, что $((\sigma_p^*(x)), x^*)$ — фиксированные стратегии центров при заданном действии АЭ x^* — образуют *равновесие Нэша*, если:

1) стратегии $\sigma_p^*(x)$ допустимы;
2) АЭ выбирает действие
$$x^* \in \operatorname*{Argmax}_{x \in X} \left(\sum_{p=1}^{n} \sigma_p^*(x) - c(x) \right);$$

3) при одностороннем изменении любым из центров своей стратегии на $\sigma_p(x)$ он не сможет увеличить значение своей целевой функции вне зависимости от предпочтений АЭ:

$$\forall p = \overline{1,n},\ \forall \sigma_p(x) \in M,\ \sigma_p(x) \leq H_p(x),$$
$$\forall x \in \operatorname*{Argmax}_{x \in X} \left(\sum_{i=1, i \neq p}^{n} \sigma_i^*(x) + \sigma_p(x) - c(x) \right) \Rightarrow$$
$$H_p(x) - \sigma_p(x) \leq H_p(x^*) - \sigma_p^*(x^*).$$

Значение x^* при этом будем называть *исходом* равновесия Нэша, *реализуемым* АС при данных равновесных стратегиях. Не будем различать равновесия Нэша, которые реализуют один и тот же исход и при которых выигрыши (значения целевых функций) центров и АЭ одинаковы.

Будем говорить, что x^* есть *Парето-эффективный для всей АС исход* (социальный Парето-оптимум), если

$$x^* \in \operatorname*{Argmax}_{x \in X} \left(\sum_{p=1}^{n} H_p(x) - c(x) \right).$$

Заметим, что, вообще говоря, из определений не следует, что любой Парето-эффективный исход может быть реализован как равновесие Нэша.

В силу компактности множества X множество

$$\{x \in X : \sum_{p=1}^{n} H_p(x) - c(x) \geq 0\}$$

ограничено (из непрерывности и полунепрерывности сверху функций $c(x)$ и $H_p(x)$ следует замкнутость). В силу предположения о праве участия (существовании такой точки $\hat{x}$, что $H_i(\hat{x}) = 0$ для любого $i = \overline{1,n}$) АЭ это множество непусто.

Прежде всего, установим факт, являющийся основным для данного раздела и который будет использоваться для доказательства дальнейших результатов.

Лемма 4.1.1. Пусть имеется некоторое равновесие Нэша игры центров, в котором АЭ выбирает действие $\tilde{x}$. Тогда для любого $p = \overline{1,n}$ существует такая точка x_p^*, что

$$\sum_{i=1, i \neq p}^{n} \sigma_i(x_p^*) - c(x_p^*) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(\tilde{x}) - c(\tilde{x}). \tag{4.1}$$

Данная лемма говорит о следующем. Пусть имеется равновесие и пусть активный элемент получает в равновесии некоторую прибыль (в случае, если АЭ прибыль не получает, утверждение леммы является очевидным). Тогда для любого из АЭ существует коалиция (не включающая данный центр) и действие, в котором коалиция предлагает АЭ такую же прибыль. Т.е. при уменьшении стимулирования центром АЭ решить выбрать действие, в котором коалиция предлагает ту же самую прибыль. Т.е. коалиция как бы противоборствует смене АЭ своей функции стимулирования.

Как следствие предыдущей теоремы верен следующий результат:

Лемма 4.1.2.. Пусть $((\sigma_i(x)), x^*)$ — некоторое равновесие Нэша. Тогда для любого p существует такая n-пиковая функция стимулирования $\tilde{\sigma}_p(x)$, что

$((\sigma_i(x))_{i\neq p}, \tilde{\sigma}_p(x), x^*)$ — равновесие Нэша, при котором выигрыши центров и АЭ такие же, как и в исходном равновесии.

Применяя данную лемму несколько раз, получаем, что каждый из центров может ограничится n-пиковой функцией стимулирования (пики всех функций стимулирования расположены в $n+1$ точке множества X) и, следовательно, при поиске равновесий Нэша можно ограничиться только такими функциями стимулирования. Также в **[19]** все возможные равновесия классифицируются на равновесия типа "сотрудничество" и "конкуренция". Различие между ними состоит в том, что в первом случае АЭ получает только компенсацию своих затрат на выбор действия x^*. При реализации равновесия типа "конкуренция" АЭ получает от центров дополнительно к затратам сумму

$$s = \sum_{p=1}^{n} \sigma_p(x^*) - c(x^*) > 0,$$

которая называется *угрозой*. Название связано с тем, что, несмотря на некоторый "запас" суммы функций стимулирования в точке x^* (АЭ получает больше, чем ему надо для выбора действия x^*), ни один из центров не уменьшает стимулирования в этой точке, поскольку другие центры угрожают ему выбором невыгодного для него действия. Величину s будем в дальнейшем называть *угрозой* или *величиной угрозы*.

Не все исходы могут быть реализованы как равновесия без угроз ("сотрудничество"), более того, приведем пример, в котором могут быть только равновесия типа "конкуренция".

Пример 8. Рассмотрим ситуацию, приведенную на рис. 3.

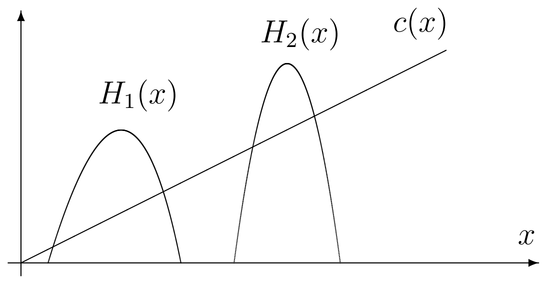

Рис. 3. Определение множества возможных равновесий

При любом равновесии x^* и отсутствии угроз i-му центру будет выгодно отклониться, если

$$x^* \notin \{x : H_i(x) > 0\},$$

поскольку в этом случае он не получает ничего — $H_i(x^*) = 0$, причем в силу отсутствия угроз достаточно назначить функцию стимулирования

$$\sigma_i(x) = \begin{cases} c(x) + \varepsilon, & x \in \operatorname*{Argmax}_{x\in X}(H_i(x) - c(x)); \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что поскольку

$$\{x : H_1(x) > 0\} \cap \{x : H_2(x) > 0\} = \emptyset,$$

при любом x^* какому-либо из центров обязательно выгодно отклониться. Таким образом, в данном примере существуют только равновесия с угрозой.•

Равновесие с угрозой в случае с произвольным числом центров описывает следующая

Утверждение 4.1.3. Пусть $n > 1$ и $((\sigma_i(x)), x^*)$ — равновесие Нэша. В том случае, если это равновесие Нэша является равновесием с угрозой (т.е. если $\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i(x^*) - c(x^*) > 0$), то для любого $p = \overline{1,n}$ существует такая точка $\tilde{x} \in X$, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1, i\neq p}^{n} \sigma_i(\tilde{x}) - c(\tilde{x}) &= \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(x^*) - c(x^*) = \\ &= \max_{x\in X} \left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i(x) - c(x) \right). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Таким образом, против каждого из центров остальные центры (или их часть) в точке $\tilde{x}$ образуют коалицию. Эта коалиция угрожает тем, что при изменении центром своей стратегии из-за наличия угрозы АЭ будет выбирать неблагоприятное для отклонившегося центра равновесие, что в итоге удержит его от изменения своей стратегии. Данное равновесие, не позволяющее ни одному из центров изменить свою стратегию, неустойчиво к изменению стратегий несколькими центрами одновременно (при сговоре), т.е. несколько центров, сговорившись, могут так изменить свои стратегии, что новый исход для них может быть более выгоден, чем старый.

По аналогии с утверждением 4.1.3 можно доказать, что для того, чтобы двум центрам было невыгодно отклоняться, необходимо и достаточно, чтобы против каждых двух центров существовала коалиция, которая бы угрожала в случае их отклонения. Разумеется, что в данном случае множество исходов, которые могут быть реализованы, сузится, поскольку равновесие с невозможностью отклонения двух центров является равновесием с невозможностью отклонения одного центра.

Тривиальными следствиями из утверждения 4.1.3 являются:

Следствие 4.1.4. В равновесии максимально возможная угроза не может быть больше

$$\min_{p} \left(\max_{x\in X} \left(\sum_{i=1, i\neq p}^{n} H_i(x) - c(x) \right) \right).$$

Следствие 4.1.5. Пусть $((\sigma_p(x)), x^*)$ — равновесие Нэша. Тогда существует такое конечное множество $Y \subset X$, $|Y| \leq n+1$, $x^* \in Y$, что:

$$\begin{array}{lll} \forall x \in Y & \sum\limits_{p=1}^{n} \sigma_p(x) - c(x) = \sum\limits_{p=1}^{n} \sigma_p(x^*) - c(x^*); \\ \forall p \in \overline{1,n} & \exists x \in Y : \quad \sigma_p(x) = 0; \\ \forall x \in Y & \exists p \in \overline{1,n} : \ \sigma_p(x) = 0. \end{array}$$

Кроме того, набор $((\tilde{\sigma}_p(x)), x^*)$, где

$$\tilde{\sigma}_p(x) = \begin{cases} \sigma_p(x), & x \in Y; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

образует равновесие Нэша.

Следствие 4.1.5 говорит о свойствах равновесных $(n+1)$-пиковых функций стимулирования. Множество угроз Y (а именно это множество и является множеством угроз, и если мы обнулим все функции стимулирования, а в точках множества Y оставим их прежними, то получившиеся функции будут равновесными $(n+1)$-пиковыми функциями, причем пики будут в одних и тех же точках у различных функций стимулирования) обладает следующим свойством: в каждой точке множества Y сосредоточена угроза против какого-то центра, причем для любого центра найдется точка из множества Y, в которой против него сосредоточена угроза. В точке угрозы против центра с номером p функция стимулирования самого центра, против которого направлена угроза, равно нулю, и размер угрозы равен переплате АЭ в равновесной точке.

4.2. Оптимальность равновесий

В данном разделе исследуется следующий вопрос: всегда ли в активной системе существует равновесие, исход которого оптимален? Или, если мы говорим о формировании состава центров, для всякого ли состава существует равновесие, исход которого оптимален? Так же хотелось бы знать, как связаны выигрыши в равновесии с возможными выигрышами в Парето-эффективном равновесии.

Для случая двух АЭ данный вопрос имеет положительный ответ, о чем говорит следующая теорема.

Теорема 4.2.1. В АС с двумя центрами и одним АЭ любое неоптимальное равновесие Парето-доминируется оптимальным.

Или, говоря более формальным языком, пусть в АС с двумя центрами и одним АЭ имеется $(\sigma_1(x), \sigma_2(x), \tilde{x})$ — некоторое равновесие Нэша,

$$\tilde{x} \notin \operatorname*{Argmax}_{x \in X} \left(\sum_{i=1}^{2} H_i(x) - c(x) \right). \tag{4.3}$$

Тогда для любого

$$x^* \in \operatorname*{Argmax}_{x \in X} \left(\sum_{i=1}^{2} H_i(x) - c(x) \right) \tag{4.4}$$

существуют такие $\sigma_1^*(x)$ и $\sigma_2^*(x)$, что $(\sigma_1^*(x), \sigma_2^*(x), x^*)$ — равновесие Нэша, причем при переходе от одного равновесия к другому выигрыши центров не уменьшатся (и по крайней мере одного центра увеличится), а выигрыш АЭ останется прежним.

Таким образом, для любого равновесия в системе с двумя центрами существует Парето-эффективное равновесие, в котором выигрыш АЭ не изменится, а выигрыши центров не уменьшатся (при соответствующем дележе строго увеличатся).

Данный результат играет огромную роль. Фактически теорема 4.2.1 говорит о том, что если в АС реализуется неэффективное равновесие, то (например) метацентр может указать такое изменение стратегий (на самом деле, что видно из доказательства теоремы, изменения могут коснуться только стимулирования оптимального действия, т.е. одной точки), что оба АЭ от такого изменения только выиграют. Или, другими словами, при реализации неэффективного равновесия в АС с двумя центрами неэффективность заключается в проблеме координации.

К сожалению, данное утверждение (в части доминирования) не действует для произвольной АС с тремя центрами и более. Приведем следующий простой пример.

Пример 9. Пусть множество X состоит из трех действий: $X = \{0, x_1, x_2\}$. Все функции приведены в таблице 3.

Таблица 3. Пример недоминирования неоптимального действия в АС с тремя центрами

x	0	x_1	x_2
$c(x)$	0	2	4
$H_1(x)$	0	2	0
$H_2(x)$	0	2	4
$H_3(x)$	0	0	4

Рассмотрим следующее неоптимальное равновесие: $x^* = x_1$,

$$\begin{aligned} \sigma_1(x) = \sigma_2(x) &= \begin{cases} 1, & x = x_1; \\ 0, & x \neq x_1, \end{cases} \\ \sigma_3(x) &= 0. \end{aligned}$$

Центры 1 и 2 в равновесии получают прибыль 1 каждый. И данное равновесие недоминируется равновесием с оптимальнльным исходом x_2 т.к. первый центр получат нулевой доход при выборе АЭ действия x_2.•

Заметим однако, что в предыдущем примере одно из неоптимальных равновесий (с исходом $x^* = x_1$) все-таки доминировалось оптимальным, и вопрос о том, есть ли такой пример, когда ни одно из неоптимальных равновесий с данным исходом не доминируется оптимальным остается открытым.

4.3. Существование равновесий

В данном разделе будет рассмотрен вопрос существования равновесий в получающейся игре центров. Необходимо заметить, что при рассмотрении подобных игр было замечено, что вопрос существования зачастую трудно доказуем, и поэтому при доказательстве существования делаются некоторые упрощающие предположения. В данном разделе будет доказано, что в АС, состоящей из двух АЭ всегда существует равновесие.

Рассмотрим подробнее равновесие Нэша с угрозой s в случае двух центров. Естественно, что каждому из центров выгодно угрожать противнику в той точке, в которой его (противника) выигрыш минимален, т.е. в точках множества $\operatorname*{Argmin}_{x: H_i(x) - c(x) \geq s} H_{-i}(x)$, чтобы противник не согласился на реализацию исхода угрозы, где $H_{-i}(x) = \sum_{j \neq i} H_j(x)$. Заметим, что в связи с предположением о непрерывности функций $H_p(x)$ данный минимум достигается (если множество $\{x : H_i(x) - c(x) \geq s\}$ не пусто). Исходя из этого, введем функции

$$(4.5)\qquad \begin{aligned} f_1(s) &= \min_{x: H_2(x) - c(x) \geq s} H_1(x) \qquad \text{и} \\ f_2(s) &= \min_{x: H_1(x) - c(x) \geq s} H_2(x). \end{aligned}$$

Введенные функции $f_i(s)$ есть минимальные значения дохода i-го центра на подмножестве X, где $(-i)$-й центр может обеспечить угрозу s. Пусть $x_1^*(s)$ и $x_2^*(s)$ — решения (любые) минимизационных задач (4.5) для соответственно функций $f_2(s)$ и $f_1(s)$. Тогда выполняется

$$H_i(x_i^*(s)) - c(x_i^*(s)) \geq s \quad \text{и} \quad H_i(x_{-i}^*(s)) = f_i(s).$$

Определим $a_i = \max\limits_{x \in X}(H_i(x) - c(x))$, а $x_i = x_i^*(a_i)$. Тогда

$$a_i = \max_{x \in X}(H_i(x) - c(x)) = H_i(x_i) - c(x_i),$$

и по следствию 4.1.5 в равновесии угроза не может превосходить значения $\min(a_1, a_2)$.

Значение a_i есть максимально возможный выигрыш (значение целевой функции) в игре i-го центра с АЭ, если в АС отсутствует другой центр, а x_i — исход, при котором этот выигрыш достигается. Заметим, что функции $f_i(s)$ определены при $s \in [0, a_{-i}]$, являются неубывающими и непрерывными слева.

Далее будем предполагать, что $x_1^*(s)$ и $x_2^*(s)$ ни при каком s не совпадают (во многих случаях, впрочем, это условие можно ослабить).

Пусть мы хотим определить, может ли некоторая точка x^* множества X быть реализована как равновесие Нэша (возможно, с угрозой). Рассмотрим необходимые и достаточные условия для этого в терминах введенных функций.

Прежде всего, каждому из центров должно быть невыгодно полностью отказываться от своего стимулирования (предлагать АЭ во всех точках нулевое стимулирование) и соглашаться на то, чтобы реализовывалась угроза противника, т.е.

$$\begin{aligned} H_1(x_2^*(s)) &\leq H_1(x^*) - \sigma_1(x^*); \\ H_2(x_1^*(s)) &\leq H_2(x^*) - \sigma_2(x^*). \end{aligned}$$

Далее, никакому из центров не должно быть выгодно отклоняться на реализацию своей наилучшей стратегии x_i, т.е.

$$\begin{aligned} H_1(x_1) - c(x_1) - s &\leq H_1(x^*) - \sigma_1(x^*), \\ H_2(x_2) - c(x_2) - s &\leq H_2(x^*) - \sigma_2(x^*). \end{aligned}$$

Объединяя четыре приведенные выше неравенства и заменяя в них $H_i(x_{-i}^*(s))$ на $f_i(s)$, получаем, что

$$\begin{aligned} \max(f_1(s), a_1 - s) &\leq H_1(x^*) - \sigma_1(x^*); \\ \max(f_2(s), a_2 - s) &\leq H_2(x^*) - \sigma_2(x^*). \end{aligned}$$

Таким образом, для того чтобы существовали равновесные $\sigma_i(x)$, при которых с угрозой s реализовывалось действие x^*, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\max(f_1(s), a_1 - s) \leq H_1(x^*); \\
\max(f_2(s), a_2 - s) \leq H_2(x^*); \\
\max(f_2(s), a_2 - s) + \max(f_1(s), a_1 - s) \\
\qquad\qquad \leq H_1(x^*) + H_2(x^*) - c(x^*) - s.
\end{array}
\right.
\tag{4.6}
$$

Последнее неравенство говорит о следующем. Для того чтобы, например, первому центру не стала выгодным реализация исходов x_1 или $x^*(s)$, надо, чтобы при исходе x^* он получал больше. Таким образом, необходимо, чтобы он при x^* получал как минимум $\max(f_2(s), a_1 - s)$. То же самое верно и для второго центра. В совокупности в x^* они получают $H_1(x^*)+H_2(x^*)-c(x^*)-s$. Третье неравенство говорит о том, что центры имеют что делить, причем сумма для дележа равна разности между правой и левой частями неравенства, так как $\sigma_1(x^*) + \sigma_2(x^*) = c(x^*) + s$.

При этом стимулирования в равновесии (и соответственно выплаты центрам) определяются следующим образом:

$$
\begin{array}{l}
\sigma_1(x_1^*(s)) = c(x_1^*(s)) + s; \\
\sigma_2(x_2^*(s)) = c(x_2^*(s)) + s; \\
\sigma_1(x^*) + \sigma_2(x^*) = c(x^*) + s; \\
H_1(x^*) - \sigma_1(x^*) \geq \max(f_1(s), a_1 - s); \\
H_2(x^*) - \sigma_2(x^*) \geq \max(f_2(s), a_2 - s).
\end{array}
\tag{4.7}
$$

Существование таких $\sigma_1(x_1^*(s))$, $\sigma_2(x_2^*(s))$, $\sigma_1(x^*)$ и $\sigma_2(x^*)$ обеспечивается системой неравенств (4.6).

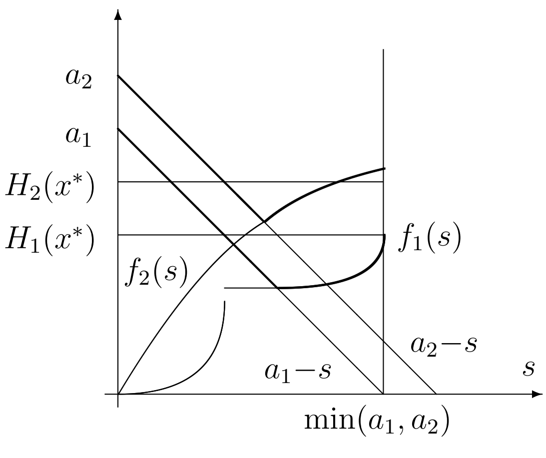

Рис. 4. Определение множества возможных равновесий

На этом рисунке при фиксированном x^* по оси абсцисс отложена величина угрозы, графики соответствуют функциям, фигурирующим в первых двух неравенствах (4.6). Жирными линиями отмечен максимум (левые части уравнений), правым частям соответствуют горизонтальные линии. Для того чтобы определить, при каких угрозах может быть получен исход x^*, необходимо найти, где соответствующая правой части горизонтальная прямая проходит выше соответствующей жирной линии и взять пересечение полученных множеств для всех трех уравнений. Заметим, что на рисунке не отображены функции, соответствующие третьему уравнению, но это делается аналогично (единственно — вместо горизонтальной прямой будет наклонная прямая, соответствующая $H_1(x^*) + H_2(x^*) - c(x^*) - s$).

При увеличении s нельзя точно сказать, как ведет себя множество реализуемых исходов с угрозой s, поскольку в неравенствах (4.6) при $a_i - s > f_i(s)$ соответствующий максимум уменьшается, а при $a_i - s < f_i(s)$ соответствующий максимум не уменьшается (может увеличиваться). Соответственно если максимумы уменьшаются, то множество возможных x^*, удовлетворяющих (4.6), увеличивается, в противном случае уменьшается. При различных неравенствах (для первого и второго центров) эффекты действуют в различные стороны, и результат их действия (как изменится множество реализуемых с данной угрозой исходов) указать нельзя.

АС с двумя центрами обладает хорошим свойством — в ней всегда существует равновесие, и (по теореме 4.2.1) всегда существует оптимальное равновесие.

Итак, пусть имеется некоторое действие

$$x^* \in \operatorname*{Argmax}_{x \in X} \left(\sum_{i=1}^{2} H_i(x) - c(x) \right).$$

Тогда можно найти такие функции $\sigma_i(x)$, $i = 1, 2$, что тройка $(\sigma_1(x), \sigma_2(x), x^*)$ является равновесием Нэша, т.е. любой Парето-эффективный исход реализуем.

Или, формулируя данный результат в виде теоремы,

Теорема 4.3.1. В АС с двумя центрами и одним АЭ всегда существует оптимальное равновесие.

Заметим, что в теореме не только доказано, что в системе из двух элементов всегда реализуем Парето-эффективный исход, но и для большинства случаев перечислены возможные равновесия (с точностью до места расположения угроз, которые, в принципе, тоже можно определить как произвольные точки некоторых множеств), причем выигрыш каждого из центров легко найти.

4.4. Описание кооперативных и соревновательных равновесий

Как мы могли видеть в примере 8, в игре с несколькими центрами может не быть оптимального равновесия сотрудничества. В настоящем разделе мы найдем необходимые и достаточные условия для существования данного равновесия. Также будет исследованы соревновательные равновесия.

Предположим, что в равновесии сотрудничества (с исходом x^*) i-й центр получает прибыль a_i, $i = \overline{1, n}$. Тогда

$$a_i = H_i(x^*) - \sigma_i(x^*), \tag{4.8}$$

где $\{\sigma_i(\cdot)\}$ есть равновесные функции стимулирования центров. Ни один из центров не имеет стимулов отклониться от своей равновесной стратегии. Лучшим исходом, для реализации которого центр может захотеть отклониться (мы рассматриваем равновесие сотрудничества следовательно следовательно мы можем рассматривать такие функции стимулирования, которые равны нулю всюду за исключением x^*), является

$$x_i^* = \operatorname*{Argmax}_{x \in X}(H_i(x) - c(x)).$$

Значит в равновесии должны выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} a_i &\geq H_i(x_i^*) - c(x_i^*) = \\ &= \max_{x \in X} \left(H_i(x) - c(x)\right), \qquad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Учитывая равенство (4.8) сумма прибылей всех центров должна быть равна

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \left(H_i(x^*) - \sigma_i(x^*)\right) = \sum_{i=1}^{n} H_i(x^*) - c(x^*). \tag{4.10}$$

Разумеется, что прибыль центров не может быть больше, чем доход:

$$H_i(x^*) \geq a_i, \qquad i = \overline{1, n}. \tag{4.11}$$

Таким образом, если мы найдем такие $\{a_i\}_{i=1}^n$, чтобы выполнялись (4.9-4.11), тогда функции стимулирования вида

$$\sigma_i(x) = \begin{cases} H_i(x^*) - a_i, & x = x^*; \\ 0, & x \neq x^* \end{cases} \tag{4.12}$$

будут образовывать равновесие сотрудничества (без угроз) и исходом x^*.

Однако, существование таких $\{a_i\}_{i=1}^n$ гарантируется следующими неравенствами:

$$H_i(x^*) \geq \max_{x \in X}(H_i(x) - c(x)), \qquad i = \overline{1, n}; \tag{4.13}$$

$$\sum_{i=1}^{n} H_i(x^*) - c(x^*) \geq \sum_{i=1}^{n} \left(\max_{x \in X}(H_i(x) - c(x)) \right). \tag{4.14}$$

Таким образом мы доказали следующее

Утверждение 4.4.1. Для наличия режима сотрудничества и исходом x^* необходимыми и достаточными условиями являются:

$$H_i(x^*) \geq \max_{x \in X}(H_i(x) - c(x)), \qquad i = \overline{1, n}; \tag{4.15}$$

$$\sum_{i=1}^{n} H_i(x^*) - c(x^*) \geq \sum_{i=1}^{n} \left(\max_{x \in X}(H_i(x) - c(x)) \right). \tag{4.16}$$

Неравенства (4.15) означают, что каждый центр при исходе x^* может получить прибыль, которая превосходит прибыль в его индивидуальной игре с АЭ (т.е. ему не выгодно отклоняться). Неравенство (4.16) означает, что общая прибыль всех центров в x^* больше, чем сумма прибылей центров в индивидуальных играх (без других центров).

Заметим, что в примере 8 оба неравенства (4.15) и (4.16) нарушаются. Неравенство (4.15) нарушается поскольку для любой точки x выполняется $H_1(x) = 0$ или $H_2(x) = 0$, но

$$\max_{x \in X}(H_i(x) - c(x)) > 0$$

для любого i. Неравенство (4.15) нарушается поскольку

$$\max_{x^*\in X}\left\{\sum_{i=1}^{2} H_i(x^*) - c(x^*)\right\} = \max_{x\in X}(H_2(x) - c(x))$$

и $\max_{x\in X}(H_1(x) - c(x)) > 0$.

Неравенства (4.15) и (4.16) могут быть охарактеризованы следующим образом. То, что хорошо для одного, хорошо и для других, или центры являются дополняющими друг друга.

Могут существовать игры, в которых не существует оптимальных равновесий сотрудничества, но существуют неоптимальные равновесия сотрудничества. Если (4.16) выполняется как равенство для оптимального исхода тогда мы можем гарантировать, что не существует неоптимальных равновесий сотрудничества.

Рассмотрим теперь противоположный случай — когда единственно возможным равновесием является оптимальное равновесие с угрозами, в котором всю прибыль получает АЭ. Предположим, что x^* является исходом данного равновесия. Поскольку данное равновесие является оптимальным и по лемме 2.1.1 для любого $i = \overline{1,n}$ существует x_i такое что

$$\sum_{j\neq i} H_j(x_i) - c(x_i) = \sum_{i=1}^{n} H_i(x^*) - c(x^*) \tag{4.17}$$

и $H_i(x_i) = 0$. Заметим, что

$$x_i \in \operatorname*{Argmax}_{x\in X}\left(\sum_{i=1}^{n} H_i(x) - c(x)\right),$$

то есть каждый x_i является оптимальным.

Равенство (4.17) означает, что если у нас имеется оптимальное равновесие, где всю прибыль получает АЭ, тогда существует по крайней мере еще одно оптимальное равновесие.

Обозначим

$$a = \max_{x\in X}\left(\sum_{i=1}^{n} H_i(x) - c(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} H_i(x^*) - c(x^*),$$

$$a_i = \max_{x\in X}\left(H_i(x) - c(x)\right), \qquad i = \overline{1,n},$$

т.е. a есть суммарная прибыль в оптимальном исходе, a_i есть прибыль i-го центра при условии что остальные центры в игре не участвуют.

Следующий результат является достаточно интересным с точки зрения исследования вопроса формирования АС. Если мы хотим гарантировать максимальную прибыль агенту, то тогда наилучшим способом решения данной задачи является создание двух одинаково сильных центра. Но в принципе это может быть не необходимо. В частности, могут существовать другие игры, в которых тоже можно гарантировать получение активным элементом максимальной прибыли. Следующий результат дает ответ на этот вопрос.

Утверждение 4.4.2. Для того, чтобы в АС не было иных равновесий, кроме оптимальных, в которых АЭ получает всю прибыль, необходимо и достаточно, чтобы в АС существовали два одинаково сильных центра, которые могут в самостоятельной игре с АЭ получить такую же прибыль, как и все центры вместе взятые:

$$\max_x \sum_{i=1}^{n} H_i(x) - c(x) = H_{i1}(x_{i1}) - c(x_{i1}) = H_{i2}(x_{i2}) - c(x_{i2})$$

Последнее утверждение говорит о том, что для того, чтобы гарантировать АЭ максимальную прибыль, в АС должно быть как минимум два одинаково сильных центра.

Для доказательства теоремы 4.4.2 мы используем следующие результаты.

Лемма 4.4.3. Предположим, что для любого i_0 выполняется $a_{i_0} = a$ и не существует другого равновесия в игре, чем оптимальное, в котором АЭ получает всю прибыль. Тогда существует $i_1 \neq i_0$ такое, что $a = a_{i_1}$.

Ситуация $a = a_{i1} = a_{i2}$ можно охарактеризовать следующим образом: для центров $i1$ и $i2$ наилучшие действия полностью различны, т.е. данные центры являются заменяющими друг друга. Или, что то же самое, то, что хорошо одному, плохо другому.

Следующий результат является достаточно очевидным:

Утверждение 4.4.4. В любом равновесии где АЭ получает прибыль s i-й центр получает прибыль не менее чем $\max\{0, a_i - s\}$.

Доказательство данного утверждения заключается в следующем. Допустим, что это не так. Тогда центр может выбрать функцию стимулирования

$$\sigma_i(x) = \begin{cases} c(x) + s + \epsilon, & x \in \underset{x\in X}{\operatorname{argmax}}(H_i(x) - c(x)); \\ 0, & x \notin \underset{x\in X}{\operatorname{Argmax}}(H_i(x) - c(x)). \end{cases}$$

и получить прибыль $a_i - s - \epsilon$.

Следствие 4.4.5. Если в игре существуют $i_1 \neq i_2$ такие что $a = a_{i_1} = a_{i_2}$ тогда единственной возможностью для равновесия является оптимальное равновесие, в котором ни один из центров не получает прибыли, но всю прибыль получает АЭ.

Нам необходимо показать что $s = a$. Предположим, что это не так. Тогда по лемме 4.4.4 мы имеем

$$H_{i_1}(x^*) - \sigma_{i_1}(x^*) \geq a_{i_1} - s = a - s,$$

$$H_{i_2}(x^*) - \sigma_{i_2}(x^*) \geq a_{i_2} - s = a - s,$$

где x^* является исходом равновесия.

Но

$$\begin{aligned} a - s &\geq \sum_{i=1}^{n}(H_i(x^*) - \sigma_i(x^*)) \\ &\geq (H_{i_1}(x^*) - \sigma_{i_1}(x^*)) + H_{i_2}(x^*) - \sigma_{i_2}(x^*) \geq 2(a - s). \end{aligned}$$

Противоречие.

Последнее следствие говорит о том, что если в системе существуют два одинаково сильных центра (каждый из которых в самостоятельной игре с центром может получить такую же прибыль, как и все центры), тогда вследствие борьбы за право получить прибыль ни один из центров прибыли не получит.

4.5. Модели и методы формирования управляющего состава

После исследования вопросов о характеризации равновесий, существования и оптимальности равновесий, описания кооперативных и соревновательных равновесий обсудим вопрос о методах и моделях формирования управляющего состава активной системы.

Путь некий метацентр может назначить центры в АС и распределить между ними доходы от функционирования системы. При этом важным условием является то, что сам метацентр не может участвовать в транзакциях с центрами (и не может сам выступить в роли центра), т.е. не может распределить не весь доход от функционирования системы или напрямую получить полезность из полезности, полученной центрами или АЭ.

И если мы решаем, сколько центров должно быть в системе (два или один), распределяя весь доход от функционирования системы между центрами, то необходимо учитывать следующее:

(1) при двух центрах возможен более богатый спектр получающихся равновесий;
(2) Парето-эффективный исход может быть реализован в любом случае;
(3) при двух центрах возможно такое распределение дохода от деятельности системы между центрами, что при любом равновесии АЭ будет получать ненулевую прибыль (значение его целевой функции будет больше нуля);
(4) при двух центрах для любого равновесия существует Парето-эффективное равновесие, которое доминирует (слабо) первоначальное равновесие.

Однако он может иметь свои цели. Возможными целями метацентра могут, в частности, быть:

(1) Увеличение общественного благосостояния (оптимальное равновесие).
(2) Увеличение прибыли центров и увеличение прибыли агента.
(3) Уменьшение неопределенности в выборе реализуемого действия.

Метацентр в своих действиях может руководствоваться, на-пример, следующими стратегиями:

(1) Поделить на равные части все влияние между несколькими центрами. Тогда возможен режим сотрудничества, в котором всю прибыль получают центры.
(2) Наделить центры максимальными полномочиями в зависимости от разных действий, т.е. создать два одинаково сильных центра. Тогда единственное равновесие, возможное в системе, будет оптимальное равновесие, при котором всю прибыль получает АЭ.

Результаты применения возможной политики метацентра сведены в таблицу 4.

Итак, подведем краткие итоги **четвертой главы.**

В теории АС, при большом внимании к АС с одним управляющим центром, уделялось мало внимания системам, в которых присутствует несколько управляющих центров, несмотря на то, что примеры таких систем встречаются достаточно

Таблица 4. Результаты применения метацентром различных политик

Политика	Результат
Один центр	Действие оптимально, всю прибыль получает центр
Несколько равноправных центров	Возможен режим сотрудничества. Действие близко к оптимальному, всю прибыль получают центры. Неопределенность выбираемого действия.
Несколько центров, два из них — одинаково сильных	Действие неоптимально, но близко к оптимальному. Всю прибыль получает агент. Возможно только два реализуемых действия.

часто. В силу более сложной структуры и анализ таких систем является более сложным, хотя бы из-за бо́льшего разнообразия получающихся равновесий.

В данной главе исследуются свойства АС. В качестве одного АЭ может выступать агрегированный коллектив АЭ. Проблема заключается в исследовании роли каждого из центров в управлении АЭ, в изучении получающихся равновесий и распределении прибыли между различными участниками данной АС.

В разделе 4.1 описываются равновесия, которые получаются при игре центров. Вводятся основные определения (оптимальность, угроза). Показывается, что все равновесия можно разделить на два типа: равновесия типа "сотрудничество"и конкурентные равновесия, которые различаются наличием прибыли у центра. Показывается, что функции стимулирования можно заменить (не изменяя свойств равновесия) таким образом, что они будут иметь предельно простой вид — равны нулю везде за исключением конечного числа точек.

В разделе 4.2 было показано, что при существовании в АС одного равновесия всегда существует оптимальное равновесие, при переходе в которое центры ничего не теряют.

В разделе 4.3 исследуется вопрос существования равновесий в АС, состоящих из двух центров и одного активного элемента. Показывается, что равновесие существует в любом случае, более того —- существует оптимальное равновесие.

В разделе 4.4 исследуются условия (необходимые и достаточные), при которых существуют равновесия типа сотрудничество и условия, когда в АС существуют только полностью соревновательные равновесия (вся прибыль достается активному элементу). Приводятся интуитивные формулировки данных условий.

В разделе 4.5 5 на основании результатов разделов 4.1-4.4 рассматривается задача формирования руководящего звена, а именно, некий метацентр назначает центры в АС и распределяет между ними доходы от функционирования системы. При этом он сам не может (или не хочет) выступать в роли центра.

Важным представляется вопрос об определении на основании данной модели оптимального количества центров при возможности влиять на распределение дохода АС между центрами или при равномерном распределении дохода между центрами.

Литература

1. Баркалов С.А., Бурков В.Н., Гилязов Н.М. Методы агрегирования в управлении проектами. М.: ИПУ РАН, 1999. - 55 с.
2. Баркалов С.А., Новиков Д.А., Попов С.С. Индивидуальные стратегии предпочтения труда: теория и практика. М.: ИПУ РАН, 2002.
3. Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977. - 255 с.
4. Бурков В.Н., Горгидзе И.А., Ловецкий С.Е. Прикладные задачи теории графов. Тбилиси: Мецниереба, 1974. - 234 с.
5. Бурков В.Н., Гуреев А.Б., Новиков Д.А., Цветков А.В. Эффективность ранговых систем стимулирования // Автоматика и телемеханика. N 8. 2000. С. 115 - 125.
6. Бурков В.Н., Данев Б., Еналеев А.К. и др. Большие системы: моделирование организационных механизмов. М.: Наука, 1989. - 245 с.
7. Бурков В.Н., Еналеев А.К., Новиков Д.А. Механизмы стимулирования в вероятностных моделях социально-экономических систем // Автоматика и Телемеханика. 1993. N 11. С. 3 - 30.
8. Бурков В.Н., Еналеев А.К., Новиков Д.А. Механизмы функционирования социально-экономических систем с сообщением информации // Автоматика и Телемеханика. 1996. N 3. С. 3-25.
9. Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А. Теория графов в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2001.
10. Бурков В.Н., Квон О.Ф., Цитович Л.А. Модели и методы мультипроектного управления. М.: ИПУ РАН, 1998. - 62 с.
11. Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981. - 384 с.
12. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять проектами. М.: Синтег, 1997. - 188 с.
13. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Теория активных систем: состояние и перспективы. М.: СИНТЕГ, 1999. - 128 с.
14. Бурков В.Н., Перфильева Л.Г., Тихонов А.А. Модель динамики трудовых ресурсов / Механизмы функционирования организационных систем: теория и приложения. М.: ИПУ, 1982. С. 120-124.
15. Вагнер Г. Основы исследования операций. М.: Мир, 1972. Т. 1 - 3.
16. Вилкас Э.Й. Оптимальность в играх и решениях. М.: Наука, 1990.
17. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976. - 327 с.

18. Губко М.В. Управление организационными системами с коалиционным взаимодействием участников. М.: ИПУ РАН, 2003. - 140 с. Автоматика и Телемеханика. 2001. N 10. С. 132 - 146.
19. Губко М.В., Караваев А.П. Матричные структуры управления // Автоматика и Телемеханика. 2001. N 10. С. 132 - 146.
20. Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. М.: ИПУ РАН, 2001.
21. Егоршин А.П. Управление персоналом. Н.Новгород: НИМБ, 1997. - 607 с.
22. Караваев А.П., Федченко К.А. Классификация задач управления активными системами с распределенным контролем / Тезисы докладов XLII научной конференции МФТИ. Долгопрудный: МФТИ, 1999. С. 49.
23. Караваев А.П., Новиков Д.А., Федченко К.А. Управление риском в активных системах с распределенным контролем / Тезисы докладов VI научной конференции "Управление безопасностью при чрезвычайных ситуациях". М.: ИПУ РАН, 1999. С. 144.
24. Караваев А.П., Шохина Т.Е. Теоретико-игровые модели подбора кадров / Тезисы докладов XLIII научной конференции МФТИ. Долгопрудный: МФТИ, 2000. С. 19.
25. Караваев А.П., Новиков Д.А., Цветков А.В. Задачи стимулирования в активных системах с несепарабельными затратами активных элементов / Труды международной научно-практической конференции "Управление большими системами". Тбилиси: ТГУ, 2000. С. 87 - 89.
26. Караваев А.П. Вероятностные механизмы распределения ресурса в многоуровневых активных системах / Сборник трудов молодых ученых ИПУ РАН "Управление в социальных и экономических системах". М.: ИПУ РАН, 2000. С. 45 - 48.
27. Караваев А.П. Изменение множества Парето-оптимальных состояний активной системы при изменении класса допустимых систем стимулирования / Сборник трудов международной конференции "Современные системы управления предприятием". Липецк: ЛГТУ, 2001. С. 37.
28. Караваев А.П. Задача подбора кадров / Труды международной научно-практической конференции "Теория активных систем". М.: ИПУ РАН, 2001. С. 40 - 41.
29. Караваев А.П. Влияние изменения структуры активной системы на реализуемое равновесие / Тезисы докладов XLIV научной конференции МФТИ. Долгопрудный, 2001. С. 24.
30. Караваев А.П., Коргин Н.А. Оптимальные унифицированные системы стимулирования в задаче управления активными системами / Материалы международной научной конференции "Современные сложные системы управления". Старый Оскол: СТИ, 2002. С. 134-137.
31. Караваев А.П. Парето-эффективность равновесий в активных системах с распределенным контролем // Автоматика и Телемеханика. 2002. N 12. С. 131 - 146.

32. Караваев А.П. Доминирование неоптимальных равновесий в активной системе с несколькими центрами и одним активным элементом / Материалы международной научной конференции "Современные сложные системы управления". Старый Оскол: СТИ, 2002. С. 138-142.
33. Караваев А.П. Унифицированные системы стимулирования // Автоматика и Телемеханика. 2003. N 1. С. 114 - 153.
34. Караваев А.П. Конкурентные равновесия в активных системах с распределенным контролем / Труды международной конференции "Современные Сложные системы управления"(СССН/HTCS 2003). Воронеж: ВГАСУ, 2003. Том 2. С. 108-109.
35. Клейнер Г.Б. Производственные функции: теория, методы, применение. М.: Финансы и статистика, 1986. - 238 с.
36. Колосова Е.В., Новиков Д.А., Цветков А.В. Методика освоенного объема в оперативном управлении проектами. Москва, 2001. - 136 с.
37. Кононенко А.Ф., Халезов А.Д., Чумаков В.В. Принятие решений в условиях неопределенности. М.: ВЦ АН СССР, 1991. - 211 с.
38. Кочиева Т.Б., Новиков Д.А. Базовые системы стимулирования. М.: Апостроф, 2000. - 108 с.
39. Кузьмицкий А.А., Новиков Д.А. Организационные механизмы управления развитием приоритетных направлений науки и техники. М.: ИПУ РАН, 1993. - 68 с.
40. Менар К. Экономика организаций. М.: ИНФРА-М, 1996. - 160 с.
41. Месарович М., Мако Д., Такахара И. Теория иерархических многоуровневых систем. М.: Мир, 1973. - 344 с.
42. Мескон М., Альберт М., Хедоури Ф. Основы менеджмента. М.: Дело, 1998. - 800 с.
43. Мэзон Р., Фламгольц Э. Управление трудовыми ресурсами / Исследование операций. М.: Мир, 1981. Том 2. С. 34 - 70.
44. Новиков Д.А. Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. М.: Фонд "Проблемы управления", 1999. - 150 с.
45. Новиков Д.А. Стимулирование в социально-экономических системах (базовые математические модели). М.: ИПУ РАН, 1998. - 216 с.
46. Новиков Д.А. Стимулирование в организационных системах. М.: СИНТЕГ, 2003. - 312 с.
47. Новиков Д.А., Петраков С.Н. Курс теории активных систем. М.: СИНТЕГ, 1999. - 108 с.
48. Новиков Д.А., Цветков А.В. Декомпозиция игры активных элементов в задачах стимулирования // Автоматика и Телемеханика. 2001. N 2. С. 173 - 180.
49. Новиков Д.А., Цветков А.В. Агрегирование информации в задачах стимулирования // Автоматика и Телемеханика. 2001. N 4. С. 120 - 127.
50. Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы стимулирования в многоэлементных организационных системах. М.: Апостроф, 2000 - 184 с.
51. Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы функционирования организационных систем с распределенным контролем. М.: ИПУ РАН, 2001. - 118 с.

52. Оуэн Г. Теория игр. М.: Мир, 1971.
53. Синягин Ю.В. Психологические механизмы формирования руководителем управленческой команды. М.: Связь-Принт, 2001. - 272 с.
54. Фишер С., Дорнбуш Р., Шмалензи Р. Экономика. М.: Дело, 1993. - 864 с.
55. Эренберг Р.Дж., Смит Р.С. Современная экономика труда. Теория и государственная политика. М.: Изд-во МГУ, 1996. - 800 с.
56. Armstrong M. Reward management. London, 2000. - 804 p.
57. Baker, George P. 1992. Incentives and Performance Measurement. Journal of Political Economy, 100(3), June, P. 598-614.
58. Dixit, Avinash. 1996. The making of Economic Policy: A Transaction-Cost Politics Perspective. Cambridge, MA: MIT Press.
59. Dixit, Avinash. "Power of Incentives in Public versus Private Organizatons." American Economic Review, Papers and Proceedings, May, 1997. 87(2), P 378-382.
60. Dixit, Avinash. "Incentives and Organizations in the public sector: an Interpretative Review", 2000.
61. Bernheim, B.Douglas and Michael Winston. 1986. "Common Agency." Econometrica, 54(4), July, P. 911-930.
62. Fundenberg D, Tirole J. Game Theory. Cambridge: MIT Press, 1995.
63. Grossman S., Hart O. An analysis of the principal-agent problem // Econometrica. 1983. Vol. 51. N 1. P. 7 - 45.
64. Hart O.D., Holmstrom B. Theory of contracts // Advances in economic theory. 5th world congress. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987. P. 71 - 155.
65. Holmström, Bengt and Paul Milgrom. "Common Agency and Exclusive Dealing". Yale University, School of Management, 1988. Working paper.
66. Korgin N.A. Incentive Problems and Exchange Schemes // Automation and Remote Control. N 10(62). 2001. pp. 1763 - 679.
67. Laffont, Jean-Jackues and Tirole, Jean. A Theory of Incentives in Procurement and Regulation. Cambridge, MA: MIT Press, 1993.
68. Laffont, Jean-Jackues. Incentives and Political Economy. Oxford, UK: Oxford University Press, 1999. Theory of Incentives in Procurement and Regulation. Cambridge, MA: MIT Press, 1993.
69. Martimort, David. Multi-Principal avec Anti-Selection. Annales D'Économie et de Statistique, No 28, 1 - 37.
70. Mas-Collel A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic theory. N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995. - 981 p.
71. Maskin E., Tirole J. The Principal-Agent Relationship with an Informed Principal, I: The Case of Private Values // Econometrica, 1990, V. 58 (2), pp. 379 - 409.
72. Morton I.Kamien and Nancy L.Schwartz. Dynamic optimization: the calculus of variations and optimal control in economics and management. (Advanced textbook in economics; v.31). Elsevier Science Publishers B.V., 1991.
73. Myerson R.B. Game theory: analysis of conflict. London: Harvard Univ. Press, 1991. - 568 p.
74. Perlman R. Labor theory. N.Y.: Wiley, 1969. - 237 p.

75. Peters, Michael. Common Agency and the Revelation Principal. University of Toronto, 1999. Working Paper.
76. Radner, Roy. Repeated Principal-Agent Problem with Discounting. Econometrica, 1985, 53(6) 1173-1198.
77. Stole, Lars. Mechanism Design Under Common Agency. University of Chicago: Graduate School of Business, 1991. Working Paper.
78. Bernard Salanie. The Economics of Contracts: A Primer. The MIT Press, 2000. - 223 p.

Приложение 1. Доказательства теорем, утверждений и лемм

Доказательство леммы 1.2.1. В случае, если центр знает множество типов АС, и не знает, какой тип имеет конкретный элемент, можно считать, что центру известна только функция распределения типов, которая определяется в соответствии с распределением имеющихся в наличии активных элементов. □

Доказательство леммы 1.2.2. Доказательство данной леммы повторяет доказательство леммы 1.2.1. □

Доказательство леммы 1.2.3. Доказательство немедленно следует из постановки задачи и того факта, что постановка вероятностной задачи с n элементами выглядит как

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma(y_i) \to \min_{\sigma_i \in M};$$
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\bar{y};$$
$$y_i \in \operatorname*{Argmax}_{y_i}(\sigma(y_i) - c_i(y_i)),$$

что совпадает с постановкой задачи для одного элемента с n возможными типами, что и требовалось доказать. □

Доказательство леммы 2.1.1. В силу нашего определения функции $c(r,y)$ и **P 1.1.** очевидно, что $c(r,0)=0$.

Для доказательства остальных свойств, продифференцируем $c(r,y)$ необходимое число раз и воспользуемся **P 2.2.–P 2.5.**:

$$c_y(r,y) = \frac{1}{F_c(c,r)} > 0;$$

$$c_r(r,y) = -\frac{F_r(c,r)}{F_c(c,r)} < 0;$$

$$c_{yy}(r,y) = -\frac{F_{cc}(c,r)c_y^2(r,y)}{F_c(c,r)} > 0.$$

Таким образом, утверждения **P 2.1. – P 2.4.** доказаны.

Докажем теперь свойство **P 2.5.**.

Действительно, пусть функция $F(c,r)$ обладает свойством постоянства от масштаба, т.е.

$$F(\lambda c, \lambda r) = \lambda F(c,r).$$

Тогда $\frac{y}{r} = F\left(\frac{c}{r},1\right) = f\left(\frac{c}{r}\right)$, где $f'(x)>0$ и $f''(x)<0$, а c как функция r и y есть $c(r,y) = rf^{-1}\left(\frac{y}{r}\right)$.

Найдем производную $c(r, y)$ по r:

$$c_r(r, y) = f^{-1}\left(\frac{y}{r}\right) - \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(\frac{y}{r}\right)\right)}\frac{y}{r} \tag{18}$$

и, беря от полученного выражения еще одну производную по y, получаем, что

$$\begin{aligned} c_{ry} = \frac{y}{r(f'(f^{-1}(y/r)))^2} f''(f^{-1}(y/r)) \frac{1}{f'(f^{-1}(y/r))}\frac{1}{r} + \\ \frac{1}{f'(f^{-1}(y/r))}\frac{1}{r} - \frac{1}{f'(f^{-1}(\frac{y}{r}))}\frac{1}{r} = \frac{y}{r}\frac{f''(c/r)}{(f'(c/r))^3} < 0, \end{aligned} \tag{19}$$

что и требовалось доказать. □

Доказательство леммы 2.1.2.

Действительно, по лемме 2.1.1 имеем: $c(r, 0) = 0$ (**P 2.1.**), $c_x(r, x) > 0$ (**P 2.2.**), $c_r(r, x) < 0$ (**P 2.3.**), $c_{xx}(r, x) > 0$ (**P 2.4.**), $c_{rx}(r, x) < 0$ (**P 2.5.**).

Заметим, что замена первой переменной r не повлияет на производные по второй переменной, и поэтому свойства **P 2.1.** и **P 2.3.** автоматически доказаны.

Кроме того, $\tilde{c}(r^*, x) = c(F^{-1}(r^*), x)$, и, следовательно,

$$\frac{\partial \tilde{c}(r^*, x)}{\partial r^*} = c_r(F^{-1}(r^*), x)\frac{1}{F'(F^{-1}(r^*))} < 0 \tag{20}$$

так как $F'(\cdot) > 0$ (в силу монотонного возрастания F) и свойства **P 2.3.**

Аналогично,

$$\tilde{c}_r(r^*, x) = c_{rx}(F^{-1}(r^*), x)\frac{1}{F'(F^{-1}(r^*))} < 0. \tag{21}$$

Следовательно все свойства доказаны. □

Доказательство леммы 2.2.1. Пусть иначе, т.е. существуют такие $r_1 < r_2$, что $f(r_1) > f(r_2)$. Тогда в связи с тем, что $f(r)$ является решением задачи (2.2), должны выполняться неравенства

$$\begin{aligned} &\sigma(f(r_1)) - c(r_1, f(r_1)) \geq \sigma(f(r_2)) - c(r_1, f(r_2)) \quad \text{и} \\ &\sigma(f(r_2)) - c(r_2, f(r_2)) \geq \sigma(f(r_1)) - c(r_2, f(r_1)). \end{aligned}$$

Сложив их, получим:

$$\begin{aligned} &-c(r_1, f(r_1)) - c(r_2, f(r_2)) \geq -c(r_1, f(r_2)) - c(r_2, f(r_1)); \\ &c(r_1, f(r_2)) + c(r_2, f(r_1)) - c(r_1, f(r_1)) - c(r_2, f(r_2)) \geq 0; \\ &c(r_1, f(r_2)) - c(r_2, f(r_2)) + c(r_2, f(r_1)) - c(r_1, f(r_1)) \geq 0; \\ &\int_{r_1}^{r_2} c_r(r, f(r_1)) - c_r(r, f(r_2))\, dr \geq 0. \end{aligned}$$

Но по теореме Лагранжа подынтегральное выражение

$$c_r(r, f(r_1)) - c_r(r, f(r_2)) = c_{rx}(r, x^*)(f(r_1)) - f(r_2)) < 0,$$

(при $x^* \in [f(r_2), f(r_1)]$), поскольку $c_{rx}(r, x^*) < 0$ и $f(r_1) > f(r_2)$. Следовательно, мы пришли к противоречию. Таким образом мы получили, что функция $f(r)$ не может убывать на Ω.□

Доказательство леммы 2.2.2. Пусть $r > r^*$. Поскольку $c(r, x)$ — убывающая по первому аргументу функция, то $c(r^*, f(r^*)) > c(r, f(r^*))$ и, в силу определения функции $f(r)$ (2.2), имеем:

$$\sigma(f(r)) - c(r, f(r)) \geq \sigma(f(r^*)) - c(r, f(r^*))$$
$$> \sigma(f(r^*)) - c(r^*, f(r^*)),$$

что и требовалось доказать.□

Доказательство леммы 2.2.3. Определим $\tilde{\sigma}(x) = \Phi(\sigma)(x)$. Тогда доказательство данной леммы следует из доказанных раннее свойств оператора $\Phi(\cdot)$. □

Доказательство леммы 2.2.4. Пусть имеются $f_1(r)$, $f_2(r)$ — два различных решения (функции действия) задачи (2.2) для некоторой функции стимулирования $\sigma(x)$, $\Omega = [r_0; r_1]$.

По определению $f_i(r)$ — любая функция такая, что

$$f_i(r) \in \operatorname*{Argmax}_{x \in X}(\sigma(x) - c(r, x)). \tag{22}$$

Следовательно, для любого множества $B \in \Omega$ функция

$$f(r) = \begin{cases} f_1(r), & r \in B; \\ f_2(r), & r \notin B \end{cases}$$

тоже является функцией действия и удовлетворяет (22), т.е. для нее выполнена Лемма 2.2.1, говорящая о том, что функция действия не убывает на Ω.

Возьмем любое $r^* \in \Omega$ и множество $B = [r^*, \infty)$. Пусть последовательность r_n удовлетворяет условиям $r_n < r^*$ и $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = r^*$. Тогда в силу определения функции $f(r)$

$$f_2(r^*-) = \lim_{n\to\infty} f_2(r_n) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) \leq f(r^*) = f_1(r^*).$$

Аналогично показывается, что $f_2(r^*+) \geq f_1(r^*)$. Таким образом мы получаем двойное неравенство

$$f_2(r^*+) \geq f_1(r^*) \geq f_2(r^*-).$$

Такое же неравенство верно и при перемене $f_1(r)$ на $f_2(r)$:

$$f_1(r^*+) \geq f_2(r^*) \geq f_1(r^*-).$$

Следовательно функции $f_1(r)$ и $f_2(r)$ совпадают во всех своих точках непрерывности и отличаются только в точках разрыва.

Заметим, что поскольку функции $f_i(r)$ не убывают, то они разрывны не более, чем в счетном числе точек, следовательно обе функции $f_i(r)$, $i = 0, 1$, однозначно определены почти всюду на Ω.□

Доказательство утверждения 2.2.5. Предположим, что x удовлетворяет условию леммы: $x \in [f(\hat{r}-), f(\hat{r}+)]$. Возьмем любое $r < \hat{r}$. Поскольку по Лемме 2.2.1 функция $f(r)$ является неубывающей, то $f(r) \leq f(\hat{r}-) \leq x$, и т.к. $c_x(r, x)$

убывает по r, выполнено

$$c(\hat r, x) - c(\hat r, f(r)) = \int\limits_{f(r)}^{x} c_x(\hat r, y)\, dy$$

$$< \int\limits_{f(r)}^{x} c_x(r, y)\, dy = c(r, x) - c(r, f(r)).$$

Следовательно, верна цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \sigma(f(\hat r)) - c(\hat r, f(\hat r)) + c(\hat r, x) \\ \le \sigma(f(r)) - c(\hat r, f(r)) + c(\hat r, x) \\ < \sigma(f(r)) - c(r, f(r)) + c(r, x). \end{aligned} \tag{23}$$

Аналогично можно показать, что $\forall\, r > \hat r$ также выполняется цепочка неравенств (23), т.е. (23) верно для любого r.

Следовательно, справедливо

$$\begin{aligned} \tilde\sigma(x) &= \inf_{r\in\Omega} (\sigma(f(r))) - c(r, f(r)) + c(r, x) \\ &= \qquad \sigma(f(\hat r)) - c(\hat r, f(\hat r)) + c(\hat r, x), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Доказательство утверждения 2.2.6. Поскольку $\Phi(\cdot)$ — неубывающий оператор, то

$$\begin{aligned} \tilde\sigma(x) &= \inf_{r\in\Omega} (\sigma(f(r)) - c(r, f(r)) + c(r, x)) \\ &= \inf_{r\in\Omega} (\hat\sigma(f(r)) - c(r, f(r)) + c(r, x)) \\ &= \Phi(\hat\sigma)(x) \ge \hat\sigma(x), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Доказательство леммы 2.2.7. Возьмем любую последовательность r_n такую, что

$$\lim_{n\to\infty} (\sigma(f(r_n)) - c(r_n, f(r_n)) + c(r_n, x)) = \tilde\sigma(x) \tag{24}$$

(это можно сделать в силу определения $\tilde\sigma(x)$). Выберем из этой последовательности сходящуюся подпоследовательность (это можно сделать т.к. Ω содержится в компакте — отрезке действительной прямой) и в дальнейшем будет рассматривать эту новую последовательность. Таким образом можно считать, что существует такое r^*, что

$$\lim_{n\to\infty} r_n = r^*.$$

Следовательно, в силу непрерывности $c(r, x)$ по первому аргументу, из (24) имеем:

$$\lim_{n\to\infty} (\sigma(f(r_n)) - c(r_n, f(r_n))) = \tilde\sigma(x) - c(r^*, x). \tag{25}$$

Но в силу определения функции $f(r)$ мы имеем

$$\tilde\sigma(f(r^*)) - c(r^*, f(r^*)) \ge \tilde\sigma(x) - c(r^*, x). \tag{26}$$

Кроме того,

$$\lim_{n\to\infty}(\sigma(f(r_n)) - c(r_n, f(r_n))) \tag{27}$$
$$\geq \lim_{n\to\infty}(\sigma(f(r^*)) - c(r_n, f(r^*)))$$
$$= \sigma(f(r^*)) - c(r^*, f(r^*))$$
$$= \tilde{\sigma}(f(r^*)) - c(r^*, f(r^*)).$$

Объединяя теперь (25)-(27), получаем:

$$\tilde{\sigma}(x) - c(r^*, x) = \sigma(f(r^*)) - c(r^*, f(r^*)), \tag{28}$$

т.е. выбранный нами r^* удовлетворяет утверждению леммы, что и требовалось доказать. □

Доказательство утверждения 2.2.8. Рассмотрим две различных функции $f_i(r)$, $i = 1, 2$, которые приводят к различным функциям

$$\tilde{\sigma}_i(x) \equiv \min_{r\in\Omega}(\sigma(f_i(r)) - c(r, f_i(r)) + c(r, x)) \tag{29}$$

и пусть $\tilde{\sigma}_1(x)$ и $\tilde{\sigma}_2(x)$ различаются, т.е. существует x^* такое, что

$$\tilde{\sigma}_1(x^*) > \tilde{\sigma}_2(x^*).$$

Пусть соответствующие минимумы достигаются в точках r_1^* и r_2^* соответственно, т.е.

$$\sigma(f_1(r_1^*)) - c(r_1^*, f_1(r_1^*)) + c(r_1^*, x^*) = \tilde{\sigma}_1(x^*) \tag{30}$$
$$> \tilde{\sigma}_2(x^*) = \sigma(f_2(r_2^*)) - c(r_2^*, f_2(r_2^*)) + c(r_2^*, x^*).$$

В силу (29) и определения r_1^* должно выполняться

$$\sigma(f_1(r_2^*)) - c(r_2^*, f_1(r_2^*)) + c(r_2^*, x^*) \geq \tilde{\sigma}_1(x^*) \tag{31}$$
$$= \sigma(f_1(r_1^*)) - c(r_1^*, f_1(r_1^*)) + c(r_1^*, x^*).$$

Объединяя (30) и (31), получаем:

$$\sigma(f_1(r_2^*)) - c(r_2^*, f_1(r_2^*)) > \sigma(f_2(r_2^*)) - c(r_2^*, f_2(r_2^*)). \tag{32}$$

Однако в силу определения

$$f_2(r_2) \in \operatorname*{Argmax}_{x\in X}(\sigma(x) - c(r_2, x)),$$

и, следовательно, должно выполняться

$$\sigma(f(r_2^*)) - c(r_2, f(r_2^*)) \geq \sigma(f(r_1^*)) - c(r_2, f(r_1^*)),$$

что, однако, противоречит (32), следовательно наше предположение о том, что $\tilde{\sigma}_1(x)$ и $\tilde{\sigma}_2(x)$ различаются, неверно, что и доказывает утверждение утверждения. □

Доказательство леммы 2.2.9. В силу определения функции $f(r)$ и того, что $\sigma(f(r)) = \tilde{\sigma}(f(r))$, имеем:

$$\tilde{\sigma}(f(r_1)) - c(r_1, f(r_1)) \geq \tilde{\sigma}(x_2) - c(r_1, x_2); \tag{33}$$

$$\tilde{\sigma}(f(r_2)) - c(r_2, f(r_2)) \geq \tilde{\sigma}(x_1) - c(r_2, x_1). \tag{34}$$

Складывая (33) и (34) с (2.7) при $i = 1, 2$ и упрощая полученное неравенство, получаем:

$$c(r_1, x_2) + c(r_2, x_1) \geq c(r_1, x_1) + c(r_2, x_2); \tag{35}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{r_1}^{r_2} c_{rx}(r, x)\, dr\, dx \leq 0. \tag{36}$$

Но, поскольку $c_{rx}(r, x) < 0$ и $x_1 < x_2$, последнее неравенство может выполняться только при $r_2 \geq r_1$ (заметим, что они могут совпадать), что и требовалось доказать. $\square$

Доказательство утверждения 2.3.1. Пусть $\sigma(x)$ — оптимальная функция стимулирования, причем x_k есть действие, реализуемое k-м активным элементом, а $\tilde{\sigma}(x)$ — наилучшая в смысле затрат функция стимулирования, при которой активный элемент типа r_k реализует действие $\tilde{x}_k$, где

$$\tilde{x}_k = \begin{cases} x_k, & k \neq i, i+1; \\ x_k - \Delta, & k = i; \\ x_k + \Delta, & k = i+1 \end{cases} \tag{37}$$

при малых значениях Δ (заметим, что при малых Δ по условию леммы x_k и $\tilde{x}_k$ упорядочены одинаковым образом).

В силу того, что $\sigma(\cdot)$ оптимальна, должно выполняться равенство

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \left(\sum_{k=1}^{n} \sigma(x_k) - \sum_{k=1}^{n} \tilde{\sigma}(\tilde{x}_k) \right) = 0 \tag{38}$$

(если бы не было равенства нулю, то было бы возможно улучшение $\sigma(x)$, которая, однако, была выбрана оптимальной).

Но, используя (2.13) и (37), имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(\tilde{x}_i) &= \sigma(x_i) - (c_i(x_i) - c_i(x_i - \Delta)); \\ \tilde{\sigma}(\tilde{x}_{i+1}) &= \sigma(x_i) - (c_i(x_i) - c_i(x_i - \Delta)) + \\ &\qquad + c_{i+1}(x_{i+1} + \Delta) - c_{i+1}(x_i - \Delta); \\ \tilde{\sigma}(\tilde{x}_k) &= \sigma(x_k) \quad \text{при } k \leq i-1; \\ \tilde{\sigma}(\tilde{x}_k) &= \sigma(x_k) - \delta \quad \text{при } k > i+1, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \delta = \sigma(x_{i+1}) + \big(c_{i+2}(x_{i+1} + \Delta) - c_{i+2}(x_{i+1})\big) - \\ \big(\sigma(x_i) - (c_i(x_i) - c_i(x_i - \Delta)) + c_{i+1}(x_{i+1} + \Delta) - c_{i+1}(x_i - \Delta)\big). \end{aligned} \tag{39}$$

Таким образом,

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\left(\sum_{k=1}^{n}\sigma(x_k)-\sum_{k=1}^{n}\tilde{\sigma}(\tilde{x}_k)\right)=$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\left(\sum_{k=1}^{n}\sigma(x_k)-\left\{\sum_{k=1}^{i-1}\sigma(x_k)+\{\sigma(x_i)-(c_i(x_i)-c_i(x_i-\Delta))\}+\right.\right.$$
$$\{\sigma(x_i)-(c_i(x_i)-c_i(x_i-\Delta))+c_{i+1}(x_{i+1}+\Delta)-c_{i+1}(x_i-\Delta)\}+$$
$$\left.\left.\sum_{k=i+2}^{n}(\sigma(x_k)-\delta)\right\}\right)=$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\Big(c_{i+1}(x_{i+1})-c_{i+1}(x_i)+(c_i(x_i)-c_i(x_i-\Delta))+$$
$$((c_i(x_i)-c_i(x_i-\Delta))-c_{i+1}(x_{i+1}+\Delta)+c_{i+1}(x_i-\Delta))+$$
$$(n-i-1)(c_{i+1}(x_{i+1})-c_{i+1}(x_i)+c_{i+2}(x_{i+1}+\Delta)-c_{i+2}(x_{i+1})-$$
$$(-(c_i(x_i)-c_i(x_i-\Delta))+c_{i+1}(x_{i+1}+\Delta)-c_{i+1}(x_i-\Delta))\Big)=$$

$$(n-i-1)(c'_{i+2}(x_{i+1})-c'_{i+1}(x_{i+1}))-c'_{i+1}(x_{i+1})-$$
$$(n-i-1)(c'_{i+1}(x_i)-c'_i(x_i))-c'_{i+1}(x_i)+2c'_i(x_i)$$

и, учитывая (38), получаем:

$$(n-i-1)(c'_{i+2}(x_{i+1})-c'_{i+1}(x_{i+1}))-c'_{i+1}(x_{i+1})=$$
$$(n-i)(c'_{i+1}(x_i)-c'_i(x_i))-c'_i(x_i),$$

что и требовалось доказать.□

Доказательство утверждения 2.3.2. Данная лемма является следствием многократного применения Леммы 2.3.1.□

Доказательство утверждения 2.3.3. Предположим противное, т.е. что существует такое $l\geq 1$, что $x^*_{n-l-1}<x^*_{n-l}=x^*_{n-l+1}=\ldots=x^*_n$ (как всегда, предполагаем $x^*_0=0$). Возьмем такое малое $\Delta>0$, что $x^*_{n-l}-\Delta>x^*_{n-l-1}$ и определим

$$x'_i=\begin{cases} x^*_i & \text{при } i<n-l;\\ x^*_i-\Delta & \text{при } n-l\leq i<n;\\ x^*_i+l\Delta & \text{при } i=n.\end{cases}\tag{40}$$

В силу построения выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{n}x^*_i=\sum_{i=1}^{n}x'_i,\tag{41}$$

т.е. обе системы стимулирования реализуют одно и то же суммарное (и среднее) действие.

Пусть $\tilde{\sigma}(x)$ — функция стимулирования, построенная по формуле (2.19) для системы $\{x'_i\}_{i=1}^n$. Тогда в силу построения

$$\tilde{\sigma}(x'_i)=\begin{cases} \sigma(x^*_i) & \text{при } i<n-l;\\ \sigma(x^*_n)-\delta & \text{при } n-l\leq i<n;\\ \sigma(x^*_n)-\delta+(c_n(x^*_n+l\Delta)- & \\ \qquad c_n(x^*_n-\Delta)) & \text{при } i=n,\end{cases}$$

где $\delta = (c_{n-l}(x_n^*) - c_{n-l}(x_n^* - \Delta))$. Мы здесь явно использовали тот факт, что $x_{n-l}^* = x_{n-l+1}^* = \ldots = x_n^*$.

Расписывая разность между суммарными затратами на выше определенных системах стимулирования, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma(x_i^*) - \sum_{i=1}^{n} \tilde{\sigma}(x_n') = (l+1)\delta - (c_n(x_n^* + l\Delta) - c_n(x_i^* - \Delta)) =$$
$$(l+1)(c_{n-l}(x_n^*) - c_{n-l}(x_n^* - \Delta)) - (c_n(x_n^* + l\Delta) - c_n(x_n^* - \Delta)) =$$
$$(l+1)c_{n-l}'(x_n^*)\Delta + o(\Delta) - ((l+1)c_n'(x_n^*)\Delta + o(\Delta)) =$$
$$(l+1)(c_{n-l}'(x_n^*) - c_n'(x_n^*))\Delta + o(\Delta).$$

Но, поскольку по условию на функции затрат $c_{n-l}'(x_n^*) > c_n'(x_n^*)$, при достаточно малых значениях Δ будет выполняться

(42) $$\sum_{i=1}^{n} \sigma(x_i^*) > \sum_{i=1}^{n} \tilde{\sigma}(x_i'),$$

то есть нам удалось уменьшить суммарное стимулирования при неизменном суммарном действии, чего не может быть в связи с оптимальностью функции $\sigma(x)$.$\square$

Доказательство утверждения 2.3.4. Предположим противное, т.е. что существует такое $l \geq 1$, что $0 = x_1^* = x_2^* = \ldots = x_l^* < x_{l+1}^*$. Возьмем малое $\Delta > 0$ и определим систему действий $\{x_i\}_{i=1}n$:

(43) $$x_i' = \begin{cases} \Delta & \text{при } i \leq l; \\ x_{l+1}^* - l\Delta & \text{при } i = l+1; \\ x_i^* & \text{при } i > l+1. \end{cases}$$

В силу построения выполняется равенство

(44) $$\sum_{i=1}^{n} x_i^* = \sum_{i=1}^{n} x_i',$$

т.е. обе системы стимулирования реализуют одно и то же суммарное (и среднее) действие.

Пусть $\tilde{\sigma}(x)$ — функция стимулирования, построенная по формуле (2.19) для системы $\{x_i'\}_{i=1}^n$. Тогда в силу построения

$$\tilde{\sigma}(x_i') = \begin{cases} \sigma(x_i^*) + c_1(\Delta) & \text{при } i \leq l; \\ \sigma(x_i^*) + c_{l+1}(x_{l+1}^* - l\Delta) - & \\ \quad c_{l+1}(\Delta) + c_1(\Delta) - c_{l+1}(x_{l+1}^*) & \text{при } i = l+1; \\ \sigma(x_i^*) + \delta & \text{при } i > l+1, \end{cases}$$

где

(45) $$\delta = c_{l+2}(x_{l+1}^*) - c_{l+2}(x_{l+1}^* - l\Delta) + c_{l+1}(x_{l+1}^* - l\Delta) - c_{l+1}(\Delta) +$$
$$c_1(\Delta) - c_{l+1}(x_{l+1}^*) = l\Delta(c_{l+l}'(x_{l+1}^*) - c_{l+2}'(x_{l+1}^*)) + o(\Delta)$$

Расписывая разность между суммарными затратами на выше определенных системах стимулирования, получаем

$$
\begin{aligned}
(46)\qquad & \sum_{i=1}^{n} \sigma(x_i^*) - \sum_{i=1}^{n} \tilde{\sigma}(x_n') = \\
& -(c_{l+1}(x_{l+1}^* - l\Delta) - c_{l+1}(x_{l+1}^*)) - \\
& \quad (n-l+1)l\Delta(c_{l+2}'(x_{l+1}^*) - c_{l+l}'(x_{l+1}^*)) + o(\Delta) = \\
& l\Delta c_{l+1}'(x_{l+1}^*) + (n-l+1)l\Delta(c_{l+l}'(x_{l+1}^*) - c_{l+2}'(x_{l+1}^*)) + o(\Delta).
\end{aligned}
$$

Но, поскольку по условию на функции затрат $c_{l+1}'(x_{l+1}^*) > c_{l+2}'(x_{l+1}^*) > 0$, при достаточно малых значениях Δ будет выполняться

$$
(47)\qquad \sum_{i=1}^{n} \sigma(x_i^*) > \sum_{i=1}^{n} \tilde{\sigma}(x_i'),
$$

то есть нам удалось уменьшить суммарное стимулирования при неизменном суммарном действии, чего не может быть в связи с оптимальностью функции $\sigma(x)$.□

Доказательство леммы 2.3.6. Прежде всего покажем, что решение уравнения 2.43 единственно. Действительно, переписав его в эквивалентном виде

$$
(48)\qquad c_k'(\tilde{x}_k) + (n-k)(c_k'(\tilde{x}_k) - c_{k+1}'(\tilde{x}_k)) = c_n'(\tilde{x}_n),
$$

можно заметит, что оба слагаемых в левой части строго возрастают по $\tilde{x}_k$. Кроме того, решение обязательно существует, поскольку при $\tilde{x}_k = 0$ левая часть уравнения (48) равна нулю (меньше правой части), а при $\tilde{x}_k = \tilde{x}_n > 0$ левая часть уравнения (48)

$$
(49)\qquad c_k'(\tilde{x}_n) + (n-k)(c_k'(\tilde{x}_n) - c_{k+1}'(\tilde{x}_n)) > c_k'(\tilde{x}_n) > c_n'(\tilde{x}_n),
$$

(больше правой части), следовательно в силу непрерывности обязательно существует $\tilde{x}_k$, удовлетворяющее (2.43).

При $\tilde{x}_n > 0$ правая часть уравнения 2.43 больше нуля, а левая часть может быть не равна нулю только тогда, когда $\tilde{x}_k(\tilde{x}_n) \neq 0$, что и завершает доказательство всех утверждений леммы. □

Доказательство леммы 2.3.7. Сперва докажем следующий результат. Если $\sigma(x)$ — оптимальная функция стимулирования в смысле задачи (2.8)-(2.11) в активной системе из n элементов, x_i^* — действие, реализуемое i-м активным элементом при суммарном действии $\bar{x} > 0$, а $k < l$ таковы, что $x_{k-1}^* < x_k^* = x_{k+1}^* = \ldots = x_l^* < x_{l+1}^*$ (т.е. элементы с номерами от k до l реализуют одно действие), то

$$
(50)\qquad \tilde{x}_k(x_n^*) \geq x_k^* \geq \tilde{x}_l(x_n^*).
$$

В силу неравенства (2.37) должно выполняться (при $p = k$)

$$
(51)\qquad (n-k+1)c_k'(x_k^*) - (n-k)c_{k+1}'(x_k^*) \leq c_n'(x_n^*).
$$

Но поскольку

$$
(52)\qquad (n-k+1)c_k'(\tilde{x}_k) - (n-k)c_{k+1}'(\tilde{x}_k) \leq c_n'(x_n^*),
$$

и левая часть (52) возрастает по $\tilde{x}_k$, то $\tilde{x}_k(x_n^*) \geq x_k^*$. Аналогично доказывается и второе неравенство$x_k^* \geq \tilde{x}_l(x_n^*)$.□

Теперь для доказательства леммы заметим, что если бы для некоторого i выполнялось $x_i^* \geq x_{i+1}^*$, то тогда существовали бы $k < l$ такие, что $\tilde{x}_k(x_n^*) > \tilde{x}_l(x_n^*)$, что, однако, противоречит предположению об упорядочении $\tilde{x}_i(x_n)$ по i. □

Доказательство леммы 2.3.8. По Теореме Лагранжа существуют такие функции $\xi_i(x) \in [r_i, r_{i+1}]$, что

$$c_i'(x) - c_{i+1}'(x) = \Delta c_{rx}(\xi_i(x), x).$$

Но тогда существует такая функция $\eta_i(x) \in [\xi_i(x), \xi_{i+1}(x)]$, что

$$\begin{aligned}(c_i'(x) - c_{i+1}'(x)) - (c_{i+1}'(x) - c_{i+2}'(x)) = \\ \Delta(c_{rx}(\xi_i(x), x) - c_{rx}(\xi_{i+1}(x), x)) = \\ c_{rrx}(\eta_i(x), x)(\xi_i(x) - \xi_{i+1}(x)),\end{aligned}$$

причем последнее выражение меньше нуля поскольку $\xi_i(x) < \xi_{i+1}(x)$ и $c_{rrx} < 0$, что и требовалось доказать. □

Доказательство леммы 2.3.9. Заметим, что справедлива следующая цепочка:

$$\begin{aligned}c_n'(x_n^*) &\stackrel{def}{=} (n-k+1)c_k'(\tilde{x}_k) - (n-k)c_{k+1}'(\tilde{x}_k) \\ &= (n-k)(c_k'(\tilde{x}_k) - c_{k+1}'(\tilde{x}_k)) + c_k'(\tilde{x}_k) \\ &> (n-(k+1))(c_{k+1}'(\tilde{x}_k) - c_{(k+1)+1}'(\tilde{x}_k)) + c_{k+1}'(\tilde{x}_k) \\ &= (n-(k+1)+1)c_{k+1}'(\tilde{x}_k) - (n-(k+1))c_{(k+1)+1}'(\tilde{x}_k),\end{aligned}$$

то есть

$$c_n'(x_n^*) > (n-(k+1)+1)c_{k+1}'(\tilde{x}_k) - (n-(k+1))c_{(k+1)+1}'(\tilde{x}_k)). \tag{53}$$

Правая часть уравнения (53) возрастает по $\tilde{x}_k$, и при $\tilde{x}_{k+1}$ неравенство должно стать равенством, следовательно $\tilde{x}_k < \tilde{x}_{k+1}$ при любом допустимом k. Но тогда выполняются условия Леммы 2.3.7, которая утверждает требуемое. □

Доказательство леммы 2.3.10. В связи с леммой 2.3.9 нам необходимо показать, что при (строгом) упорядочении действий элементов средняя функция затрат является выпуклой.

Поскольку по Лемме 2.3.7 для любого $\bar{x} > 0$ все значения x_i^* различны, то (в силу определения функций $\tilde{x}(\cdot)$ и равенства (2.34))

$$x_i^* = \tilde{x}_i(x_n^*). \tag{54}$$

Поскольку $\tilde{x}_i(x_n^*)$ возрастают по x_n^*, и $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^* = \bar{x}$, то x_i^* возрастает вместе с $\bar{x}$, а, следовательно, возрастает по $\bar{x}$ и значение x_n^*. Исходя из задачи Лагранжа цена увеличения $\bar{x}$ (выраженная в увеличении функции $\mathcal{S}(\bar{x})$) есть $c_n'(x_n^*)$, то есть

$$\frac{d\mathcal{S}(\bar{x})}{d\bar{x}} = c_n'(x_n^*). \tag{55}$$

Но, поскольку $\frac{dx_n^*}{d\bar{x}} > 0$, то

$$\frac{d^2\mathcal{S}(\bar{x})}{d\bar{x}^2} = \frac{dc_n'(x_n^*)}{d\bar{x}} = c_n''(x_n^*)\frac{dx_n^*}{d\bar{x}} > 0, \tag{56}$$

что и завершает доказательство. □

Доказательство утверждения 2.4.3. Рассмотрим случай правой производной (случай с левой производной доказывается аналогично).

Поскольку $\sigma(f(r^*)) - c(r^*, f(r^*)) \geq \sigma(x) - c(r^*, x)$, то

$$\sigma(x) - \sigma(f(r^*)) \leq c(r^*, x)c(r^*, f(r^*)). \tag{57}$$

Найдем теперь нижнюю оценку разности выражения $\sigma(x) - \sigma(f(r^*))$ в окрестности точки $f(r^*)$. Для некоторого i рассмотрим произвольный $x \in [f(r^*), r_i]$.

Покажем, что в этом случае

$$\sigma(x) \geq \sigma(f(r^*)) + c(r_i, x) - c(r_i, f(r^*)). \tag{58}$$

Пусть это не так, т.е. $\sigma(x) < \sigma(f(r^*)) + c(r_i, x) - c(r_i, f(r^*))$. Поскольку

$$\sigma(x) = \tilde{\sigma}(x) = \inf_{r \in \Omega}(\sigma(f(r)) - c(r, f(r)) + c(r, f(r))), \tag{59}$$

рассмотрим $\hat{r}$, на котором реализуется минимум, т.е.

$$\sigma(x) = \sigma(f(\hat{r})) - c(\hat{r}, f(\hat{r})) + c(\hat{r}, x).$$

Поскольку $f(r^*) < x < f(r_i)$, то $r^* \leq \hat{r} \leq r_i$.

Но тогда

$$\begin{aligned}\sigma(f(\hat{r})) - c(\hat{r}, f(\hat{r})) + c(\hat{r}, f(r^*)) <\\ \sigma(f(r^*)) + c(r_i, x) - c(r_i, f(r^*))\\ -c(\hat{r}, x) + c(\hat{r}, f(r^*)) \leq \sigma(f(r^*)),\end{aligned}$$

чего не может быть поскольку

$$\begin{aligned}\sigma(f(r^*)) = \inf_{r \in \Omega}(\sigma(f(r)) - c(r, f(r)) + c(r, f(r^*))) \leq\\ \sigma(f(\hat{r})) - c(\hat{r}, f(\hat{r})) + c(\hat{r}, f(r^*))\end{aligned} \tag{60}$$

Таким образом при $x \in [f(r^*), r_i]$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned}\sigma(x) - \sigma(f(r^*)) \geq c(r_i, x) - c(r_i, f(r^*)) =\\ c_x(r_i, f(r^*))(x - f(r^*)) + o(x - f(r^*)),\end{aligned} \tag{61}$$

$$\begin{aligned}\sigma(x) - \sigma(f(r^*)) \leq c(r^*, x) - c(r^*, f(r^*)) =\\ c_x(r^*, f(r^*))(x - f(r^*)) + o(x - f(r^*)),\end{aligned} \tag{62}$$

что наряду с непрерывностью производных $c(r, x)$ говорит о существовании правой производной у функции $\sigma(x)$ в точке $f(r^*)$ и равенстве ее $c_x(r^*, f(r^*))$.$\square$

Доказательство утверждения 3.1.1. Прежде всего, будем рассматривать малые изменения типов.

Будем рассматривать случай с конечным числом АЭ. Если действие данного АЭ отличалось от действий всех остальных АЭ, то результат теоремы достаточно очевиден: после изменения типа так изменить функцию стимулирования (с сохранением действий, выбираемых всеми АЭ), АЭ с типами меньше, чем у данного, будут получать то же самое стимулирование, а стимулирования АЭ, тип которого изменился, и всех лучших АЭ уменьшится (на одну и ту же величину). Очевидно, поскольку мы сумели уменьшить суммарные выплаты АЭ без изменения выбираемых действий, то оптимальные затраты будут не больше, чем при найденной функции стимулирования, т.е. могут только уменьшится.

Пусть теперь действие данного АЭ совпадает с действиями соседних АЭ. Тогда при улучшении его типа он по-прежнему будет выбирать то же самое действие (в соответствии с дифференциальными уравнениями и с теоремой 2.3.5, т.е. действие всей системы не изменится. Не изменятся и оптимальные затраты при улучшении типа данного АЭ. □

Доказательство утверждения 3.1.2. Очевидно, что в конкретный момент времени должны увольняться самые худшие сотрудники, типы которых меньше некоторого параметра r', зависящего от коэффициента дисконтирования и от текущего состава. □

Доказательство леммы 4.1.1. Допустим, что такой точки x_p^* нет. Следовательно

$$\max_x \sum_{i=1, i\neq p}^{n} \sigma_i(x) - c(x) < \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(\tilde{x}) - c(\tilde{x}). \tag{63}$$

(понятно, что правая часть всегда больше или равна правой в силу выбора АЭ). Тогда существует такое $\epsilon > 0$, что

$$\max_x \sum_{i=1, i\neq p}^{n} \sigma_i(x) - c(x) < \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(\tilde{x}) - c(\tilde{x}) - \epsilon. \tag{64}$$

Тогда, уменьшив во всех точках функцию стимулирования i-го центра на некоторую малую величина мы получим, что выбор АЭ не изменился, функции стимулирования не изменились, но центр i сумел в одностороннем порядке изменить свою функцию стимулирования и при этом увеличить свою прибыль, что противоречит предположению о том, что мы имели равновесие Нэша. □

Доказательство леммы 4.1.2. Рассмотрим, например, первый АЭ. Тогда определим для него n-пиковую функцию стимулирования следующим образом:

$$\tilde{\sigma}_1(x) = \begin{cases} \sigma_1(x), & x = x^*; \\ \sigma_1(x), & x = x_i \text{ для некоторого } i = \overline{2, n}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{65}$$

Очевидно, что при данной функции стимулирования выбор АЭ не изменится, выплаты центрам тоже останутся прежними, и у центров не будет возможности так изменить свои функции стимулирования, чтобы в односторонним порядке увеличить прибыль. □

Доказательство утверждения 4.1.3. В силу теоремы 4.1.2 достаточно рассматривать только функции стимулирования с конечным числом пиков. Обозначим подмножество множества X, на котором расположены угрозы, через Y. Тогда множество Y (заметим, что $x^* \in Y$) является конечным множеством. Оставим во множестве Y только те точки x, в которых

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i(x) - c(x) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(x^*) - c(x^*)$$

(т.е. те точки, в которых угрозы имеют смысл, или, что то же самое, величина угрозы равна суммарной переплате АЭ) Функции стимулирования, равные нулю всюду, кроме точек множества Y, где они не изменили своих значений, по-прежнему являются равновесными, причем выигрыши центров и АЭ не изменятся.

Пусть утверждение теоремы неверно. Тогда существует такое p, что во всех точках угроз центр с номером p предлагает АЭ ненулевое стимулирование (в том числе и в равновесной точке x^*, иначе в качестве $\tilde{x}$ в уравнении (4.2) можно было бы взять x^*). Кроме того, в силу наличия угрозы АЭ получает больше, чем ему надо просто для покрытия затрат на выбор x^*. Но тогда, уменьшив во всех точках множества Y стимулирование p-го центра на сумму

$$\delta = \min\left(\min_{y\in Y}\left[\sigma_p(y), \sum_{i=1}^{n}\sigma_i(x^*) - c(x^*)\right]\right) > 0,$$

мы получим, что реализуется по-прежнему тот же исход, поскольку

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma_i(x^*) - c(x^*) - \delta \geq \sum_{i=1}^{n}\sigma_i(x) - c(x) - \delta I_{\{Y\}}(x),$$

где

$$I_{\{Y\}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in Y; \\ 0, & x \notin Y. \end{cases}$$

Однако, поскольку функции стимулирования других центров не изменились, а целевая функция p-го центра увеличилась (так как мы уменьшили его затраты на стимулирование), то мы имели дело не с равновесием. Противоречие. □

Доказательство следствия 4.1.4. В равновесии против каждого из центров должна существовать коалиция (которая ограничена множеством всех центров без данного), способная обеспечить соответствующую угрозу. Но коалиция против p-го центра не может обеспечить угрозу больше, чем

$$\max_{x\in X}\left(\sum_{i=1, i\neq p}^{n} H_i(x) - c(x)\right)$$

для любого p, о чем и говорит следствие. □

Доказательство следствия 4.1.5. В качестве точек множества Y необходимо взять точки, в которых против p-го центра остальные центры образуют коалицию:

$$Y = \bigcup_{p=1}^{n} x_p \cup x^*, \qquad x_p \in \operatorname*{Argmax}_{x\in X}\left(\sum_{i\neq p}\sigma_i(x) - c(x)\right)$$

(заметим, что выбранные x_p есть точки, о которых говорится в теореме 4.1.3)

Тогда по теореме 4.1.3 $\sigma_p(x_p) = 0$, $\sum\limits_{i\neq p}\sigma_i(x_p) - c(x_p) = \sum\limits_{i}\sigma_i(x^*) - c(x^*)$. Отклоняться же от своих стратегий центрам невыгодно в силу наличия противостоящих коалиций. Таким образом, следствие доказано. □

Доказательство теоремы 4.2.1. Из условия (4.4) следует, что для любого x (и, в частности, для $\tilde{x}$) выполняется

$$(H_1(x^*) + H_2(x^*) - c(x^*)) - (H_1(x) + H_2(x) - c(x)) \geq 0.$$

Из того, что $(\sigma_1(x), \sigma_2(x), \tilde{x})$ — равновесие Нэша, следует, что никакому из центров невыгодно переключаться на реализацию x^*, т.е.

$$H_i(x^*) - c(x^*) - (\sigma_1(\tilde{x}) + \sigma_2(\tilde{x}) - c(\tilde{x})) \leq H_i(\tilde{x}) - \sigma_i(\tilde{x}), \text{ или}$$
$$H_i(\tilde{x}) - H_i(x^*) + c(x^*) + \sigma_{-i}(\tilde{x}) - c(\tilde{x}) \geq 0.$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что мы можем так изменить $\sigma_1(x)$ и $\sigma_1(x)$ в точке x^*, что новая система реализуема, является равновесием Нэша и выигрыши центров при этом не уменьшатся (АЭ должен получить не меньше, так как иначе ему будет невыгодно выбирать x^*).

Прежде всего, заметим, что по сравнению с $\tilde{x}$ появляется дополнительная сумма для дележа в размере

$$d = (H_1(x^*) + H_2(x^*) - c(x^*)) - (H_1(\tilde{x}) + H_2(\tilde{x}) - c(\tilde{x})) > 0.$$

Ее центры и будут делить друг с другом.

Зададим новые функции стимулирования центров как

$$\sigma_1^*(x) = \begin{cases} H_1(x^*) - H_1(\tilde{x}) + \sigma_1(\tilde{x}) - y, & x = x^*; \\ \sigma_1(x), & x \neq x^*, \end{cases}$$
$$\sigma_2^*(x) = \begin{cases} \sigma_2(\tilde{x}) - c(\tilde{x}) + c(x^*) - H_1(x^*) + H_1(\tilde{x}) + y, & x = x^*; \\ \sigma_2(x), & x \neq x^*, \end{cases}$$

где переменная $y \in Y = [0, d]$. Заметим, что в силу выбора точки x^* множество Y непусто ($d > 0$). Вторая функция стимулирования подбиралась из того условия, что АЭ должен получить столько же, сколько и раньше. Легко проверить, что при всех допустимых значениях y выполняется $H_i(x^*) - \sigma_i^*(x^*) \geq H_i(\tilde{x}) - \sigma_i^*(\tilde{x})$ (из чего, в частности, следует неотрицательность левой части неравенства и, как следствие, неравенство $H_i(x^*) \geq \sigma_i^*(x^*)$), т.е. центрам невыгодно отклоняться для того, чтобы АЭ выбирал $\tilde{x}$. Но тогда в силу определения $\sigma_i(x)$ и того, что $\sigma_i(x)$ и $\sigma_i^*(x)$ совпадают всюду, кроме точки x^*, центрам вообще никуда невыгодно отклоняться.

Теперь остается только проверить, что необходимое стимулирование $\sigma_i^*(x^*)$ не меньше нуля, т.е. функции стимулирования являются допустимыми. Заметим, что суммарный выигрыш центров в точке x^* не меньше, чем в точке $\tilde{x}$. Найдем стимулирование первого центра при максимальном y (в этом случае само стимулирование минимально):

$$\begin{aligned} \sigma_1^*(x^*) &= H_1(x^*) - H_2(\tilde{x}) + \sigma_1^*(\tilde{x}) - \\ &\qquad -(H_1(x^*) + H_2(x^*) - c(x^*) - \\ &\qquad\qquad -(H_1(\tilde{x}) + H_2(\tilde{x}) - c(\tilde{x}))) = \\ &= H_2(\tilde{x}) - H_2(x^*) + c(x^*) + \sigma_1(\tilde{x}) - c(\tilde{x}) \geq 0, \end{aligned}$$

так как центрам невыгодно самостоятельно отклоняться для реализации x^*. Аналогично доказывается для второго центра.

Для полноты необходимо заметить, что в случае отсутствия угроз доказательство остается таким же. Также необходимо заметить, что ни один из центров не мог угрожать другому точкой x^*, так как второму центру тогда было бы выгодно переключится именно на реализацию этого исхода и $(\sigma_1(x), \sigma_2(x), \tilde{x})$ не было бы равновесием Нэша. □

Доказательство теоремы 4.3.1. Возьмем x_1, x_2 и x^* такие, что

$$x_1 \in \operatorname*{Argmax}_{x \in X}(H_1(x) - c(x));\ a_1 = H_1(x_1) - c(x_1);$$
$$x_2 \in \operatorname*{Argmax}_{x \in X}(H_2(x) - c(x));\ a_2 = H_2(x_2) - c(x_2);$$
$$a = \sum_{i=1}^{2} H_i(x^*) - c(x^*)$$

(предполагаем, что $x_1 \neq x_2$, $x_1 \neq x^*$, $x_2 \neq x^*$).

В силу определений и неотрицательности функций $H_1(x)$, $H_2(x)$ и $c(x)$ всегда выполняются неравенства $a_i \geq 0$, $a \geq 0$ и $a \geq a_i$.

Нетрудно видеть, что если первому центру невыгодно отклоняться с x^* на x_1 или x_2, то ему вообще никуда больше невыгодно отклоняться (так как возможный максимальный выигрыш будет именно в этих точках). То же самое верно и для второго центра. Таким образом, для утверждения теоремы мы можем указать соответствующие стратегии и проверить, что центры не будут изменять свои стратегии так, чтобы в итоге реализовались x_1 или x_2.

Случай 1. $a_1 = 0$: в одиночку первый центр ничего не может получить.

Тогда при

$$\sigma_1(x) = \begin{cases} y, & x = x^*; \\ 0, & x \neq x^*, \end{cases} \qquad \sigma_2(x) = \begin{cases} c(x^*) - y, & x = x^*; \\ 0, & x \neq x^*, \end{cases}$$

где

$$y \in \left[H_2(x_2) - c(x_2) - (H_2(x^*) - c(x^*)), H_1(x^*)\right],$$

тройка $(\sigma_1(x), \sigma_2(x), x^*)$ есть Парето-эффективное равновесие Нэша (равновесие типа "сотрудничество"). Так как второму центру переплачивать АЭ смысла нет (первый просто не может угрожать), то мы нашли все Парето-эффективные равновесия Нэша, реализующие исход x^*.

Случай 2. $a_1 = a$: первый центр в одиночку может получить столько же, сколько и оба центра, объединившись вместе.

Тогда при функциях стимулирования

$$\sigma_1(x) = \begin{cases} c(x^*) + H_2(x_2) - c(x_2) - H_2(x^*), & x = x^*; \\ c(x_1) + H_2(x_2) - c(x_2), & x = x_1; \\ 0, & x \notin \{x^*, x_1\}, \end{cases}$$
$$\sigma_2(x) = \begin{cases} H_2(x^*), & x = x^*; \\ H_2(x_2), & x = x_2; \\ 0, & x \notin \{x^*, x_2\} \end{cases}$$

тройка $(\sigma_1(x), \sigma_2(x), x^*)$ есть Парето-эффективное равновесие Нэша (равновесие типа "конкуренция"). Второй центр при этом ничего не получает, а АЭ получает a_2.

Случай 3. $a_1 + a_2 \leq a$, $a_i < a$: сумма возможных выигрышей первого и второго центров не больше выигрыша центров при объединении.

При функциях стимулирования

$$\sigma_1(x) = \begin{cases} y, & x = x^*; \\ 0, & x \neq x^*, \end{cases} \qquad \sigma_2(x) = \begin{cases} c(x^*) - y, & x = x^*; \\ 0, & x \neq x^*, \end{cases}$$

где $y \in [a_2 + c(x^*) - H_2(x^*), H_1(x^*) - a_1]$, реализуется Парето-оптимальное равновесие Нэша $(\sigma_1(x), \sigma_2(x), x^*)$ (равновесие типа "сотрудничество"), поскольку выполняются неравенства:

$$(H_1(x^*) - a_1) - (a_2 + c(x^*) - H_2(x^*)) = a - a_1 - a_2 \geq 0$$

(множество возможных значений y непусто),

$$H_1(x^*) - \sigma_1(x^*) = H_1(x^*) - y \geq H_1(x^*) - (H_1(x^*) - a_1) = a_1$$

(первый центр может так стимулировать),

$$\begin{aligned} H_2(x^*) - \sigma_2(x^*) &= H_2(x^*) - (c(x^*) - y) \\ &\geq H_2(x^*) - c(x^*) + a_2 + c(x^*) - H_2(x^*) = a_2 \end{aligned}$$

(второй центр может так стимулировать),

$$y \geq a_2 + c(x^*) - H_2(x^*) \geq H_2(x^*) - c(x^*) - (H_2(x^*) - c(x^*)) = 0$$

(стимулирование первого центра неотрицательно),

$$c(x^*) - y \geq c(x^*) - (H_1(x^*) - a_1) \geq 0$$

(стимулирование второго центра неотрицательно).

В данном случае переплачивать не имеет смысла, так как по отдельности (при отклонении от этих стратегий) они получают не больше и угрозы не нужны.

С л у ч а й 4. $a < a_1 + a_2$, $a_i < a$: сумма возможных выигрышей первого и второго центров строго больше выигрыша центров при объединении.

Прежде всего заметим, что

$$\begin{aligned} a_1 > a - a2 &= H_1(x^*) + H_2(x^*) - c(x^*) - a_2 \\ &\geq H_1(x_2) + H_2(x_2) - c(x_2) - a_2 = H_1(x_2); \\ H_1(x^*) &= H_1(x^*) + H_2(x^*) - c(x^*) - (H_2(x^*) - c(x^*)) \\ &\geq H_1(x_2) + H_2(x_2) - c(x_2) - (H_2(x^*) - c(x^*)) = H_1(x_2); \\ a - a_1 &= H_1(x^*) + H_2(x^*) - c(x^*) - a_1 \\ &\geq H_2(x_1) + H_2(x_1) - c(x_1) - a_1 = H_2(x_1), \end{aligned}$$

таким образом (проведя аналогичные вычисления для второго центра), получаем

$$\begin{array}{ll} a_1 > H_1(x_2); & a_2 > H_2(x_1); \\ H_1(x^*) \geq H_1(x_2); & H_2(x^*) \geq H_2(x_1); \\ H_2(x_1) \leq a - a_1; & H_1(x_2) \leq a - a_2. \end{array}$$

Для возможности равновесия с исходом x^* и угрозой s должны выполняться неравенства

$$a - s \geq H_2(x_1) + H_1(x_2) \quad \text{и} \quad a - s \geq (a_1 - s) + (a_2 - s),$$

что говорит о том, что угроза должна принадлежать отрезку

$$[a_1 + a_2 - a, a - (H_2(x_1) + H_1(x_2))].$$

Этот отрезок непуст, поскольку

$$\begin{aligned} &(a - (H_2(x_1) + H_1(x_2))) - (a_1 + a_2 - a) \\ &\qquad (a - a_1 - H_2(x_1)) + (a - a_2 - H_1(x_2)) \geq 0. \end{aligned}$$

Исходя из сказанного, подберем подходящее значение для s. Пусть $s = a_1 + a_2 - a$. Тогда на основании последнего неравенства системы (4.6) должно выполняться неравенство

$$a - s \geq \max(H_1(x_2), a_1 - s) + \max(H_2(x_1), a_2 - s).$$

Проверим это:

$$\begin{aligned} &\max(H_1(x_2), a_1 - s) + \max(H_2(x_1), a_2 - s) \\ &\quad = \max(H_1(x_2), a - a_2) + \max(H_2(x_1), a - a_1) \\ &\quad = a - a_2 + a - a_1 \leq a < a_1 + a_2. \end{aligned}$$

Кроме того, такая угроза обоими центрами реализуема, поскольку

$$\begin{aligned} a_1 - s = a_1 + a - a_1 - a_2 = a - a_2 \geq 0; \\ a_1 - s = a_1 + a - a_1 - a_2 = a - a_2 \geq 0, \end{aligned}$$

что и завершает доказательство теоремы. □

Доказательство утверждения 4.4.2. Предположим, что утверждение леммы неверно.

По лемме 4.4.3 существует такое i_0 что $a_{i_0} = a$. Пусть $i_0 = 1$. Тогда должна существовать коалиция против данного центра, т.е. должно существовать x_1 такое что

$$\sum_{p \neq 1} H_p(x_1) - c(x_1) = a.$$

Следовательно (поскольку X по предположению есть непрерывное множество) существует такое $\tilde{x}_1$ что

$$\sum_{p \neq i} H_p(\tilde{x}_1) - c(\tilde{x}_1) = a - \epsilon.$$

Тогда следующие стратегии будут образовывать равновесие: для $i = \overline{2, n}$

$$\sigma_i(x) = \begin{cases} H_i(\tilde{x}_1), & x = \tilde{x}_1; \\ 0, & x \neq \tilde{x}_1, \end{cases}$$

$$\sigma_1(x) = \begin{cases} H_1(x^*), & x = x^*; \\ 0, & x \neq x^*, \end{cases}$$

исход x^*, и первый центр получает ненулевую прибыль (ϵ). Противоречие.

Данный аргумент не работает в том случае, если для любого ϵ существует $i \neq 1$ и x_i такие что $H_i(x_i) - c(x_i) > a - \epsilon$, т.е. существует $i \neq 1$ что $a_i = a$, что доказывает теорему. □

Доказательство леммы 4.4.3. Рассматриваем равновесие. Предположим, что $H_1(x^*) > 0, \ldots, H_l(x^*) > 0$, $H_{l+1}(x^*) = 0, \ldots, H_n(x^*) = 0$. Мы докажем используя индукцию по l. Если $l = 0$ тогда лемма справедлива. Предположим что $l > 0$. Тогда против центров $i = \overline{1, l}$ существует коалиция с угрозой в исходе x_i такая что

$$\sum_{p \neq i} H_p(x_i) - c(x_i) = a.$$

Предположим что все x_i, $i = \overline{1, l}$ различаются. Тогда $H_1(x_i) = 0$ для всех $i = \overline{2, l}$. Поскольку X есть соединенное множество и $c(0) = H_i(0) = 0$ то существует $\tilde{x}_1$ такое что

$$\sum_{p \neq i} H_p(\tilde{x}_1) - c(x_1) = a - \epsilon.$$

Таким образом для небольших ϵ мы можем указать еще одно равновесие такое, что первый центр получает ненулевую прибыль: с угрозами $(\tilde{x}_1, x_2, \ldots x_l)$, в $\tilde{x}_1$) стимулирование каждого центра равняется $H_i(\tilde{x}_1)$, и стимулирования для центров $i = \overline{2, n}$ в других исходах не изменяется. Стимулирование первого центра уменьшается во всех действиях на ϵ. И данные стратегии являются равновесными. Противоречие.

Теперь предположим, что угрозы сосредоточены менее чем в l действиях. Тогда существует коалиция против двух центров в одной действии. Если мы объединим два данных центра (суммируя их доходы и функции стимулирования) мы опять получим равновесие с $l-1$ центрами. По предположению индукции этого не может быть. □

Приложение 2. Унифицированные системы стимулирования в активных системах (обзор)

В настоящем приложении приводится обзор результатов исследования сравнительной эффективности унифицированных пропорциональных систем стимулирования, унифицированных систем стимулирования в АС с агрегированием информации о действиях АЭ, и унифицированных ранговых систем стимулирования. Изложение базируется, в основном, на работах [**38**], [**44**], [**50**].

Унифицированные пропорциональные системы стимулирования. Введем следующее предположение относительно функций затрат АЭ (ниже это предположение будет ослаблено):

(66) $$c_i(y_i, r_i) = r_i \varphi(y_i / r_i),\ i \in I,$$

где $\varphi(\cdot)$ — гладкая монотонно возрастающая выпуклая функция, $\varphi(0) = 0$, (например, для функций типа Кобба-Дугласа $\varphi(t) = (1/\alpha) t^{\alpha}$, $\alpha \geq 1$), $r_i > 0$ — некоторый параметр, y_i — действие i-го АЭ, $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ — множество АЭ, входящих в рассматриваемую АС.

Если центр использует пропорциональные индивидуальные системы стимулирования $\sigma_i(y_i) = \gamma_i y_i$, то целевая функция АЭ представляет собой разность между стимулированием и затратами: $f_i(y_i) = \gamma_i y_i - c_i(y_i)$. Вычислим действие, выбираемое АЭ при использовании центром некоторой фиксированной системы стимулирования:

(67) $$y_i^*(\gamma_i) = r_i \varphi'^{-1}(\gamma_i),$$

где $\varphi'^{-1}(\cdot)$ — функция, обратная производной функции $\varphi(\cdot)$. Минимальные суммарные затраты центра на стимулирование равны

(68) $$\vartheta_L(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i r_i \varphi'^{-1}(\gamma_i),$$

где $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$. Суммарные затраты АЭ равны:

(69) $$c(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} r_i \varphi(\varphi'^{-1}(\gamma_i)).$$

В рамках приведенной выше общей формулировки модели пропорционального стимулирования возможны различные постановки частных задач. Рассмотрим некоторые из них.

Задача 1. Пусть центр заинтересован в выполнении элементами плана R по суммарному выпуску с минимальными суммарными затратами АЭ (еще раз подчеркнем необходимость различения суммарных затрат элементов и суммарных затрат (центра) на стимулирование). Тогда его цель заключается в выборе ставок оплаты $\{\gamma_i\}_{i=1}^n$ в результате решения следующей задачи:

$$\begin{cases} c(\gamma) \to \min\limits_{\gamma}; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^*(\gamma_i) = R, \end{cases} \tag{70}$$

решение которой имеет вид:

$$\begin{cases} \gamma_i^* = \varphi'(R/W); \\ y_i^* = r_i(R/W), \quad i \in I; \\ c^* = W\varphi(R/W); \\ \vartheta_L^* = R\varphi'(R/W), \end{cases} \tag{71}$$

где $W = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i$. Так как оптимальные ставки оплаты одинаковы для всех АЭ, то оптимальна именно унифицированная система стимулирования.

Задача 2. Содержательно двойственной к задаче 1 является задача максимизации суммарного выпуска при ограничении на суммарные затраты АЭ:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^*(\gamma_i) \to \max\limits_{\gamma}; \\ c(\gamma) \le R. \end{cases} \tag{72}$$

Решение задачи 2 имеет вид:

$$\begin{cases} \gamma_i^* = \varphi'(\varphi^{-1}(R/W)), \quad i \in I; \\ y_i^* = r_i\varphi^{-1}(R/W), \quad i \in I; \\ c^* = R; \\ \vartheta_L^* = \varphi^{-1}(R/W)W\varphi'(\varphi^{-1}(R/W)), \end{cases} \tag{73}$$

то есть в двойственной задаче (естественно) оптимальным решением также является использование унифицированных пропорциональных систем стимулирования.

Замена в задачах 1 и 2 суммарных затрат элементов на суммарные затраты на стимулирование порождает еще одну пару двойственных задач.

Задача 3. Если центр заинтересован в выполнении АЭ плана R по суммарному выпуску с минимальными суммарными затратами на стимулирование, то ставки оплаты определяются в результате решения следующей задачи:

$$\begin{cases} \vartheta_L(\gamma) \to \min\limits_{\gamma}; \\ \sum\limits_{i=1}^{N} y_i^*(\gamma_i) = R, \end{cases} \tag{74}$$

решение которой совпадает с (71).

Задача 4 заключается в максимизации суммарного выпуска при ограничении на суммарные затраты на стимулирование:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} y_i^*(\gamma_i) \to \max\limits_{\gamma}; \\ \vartheta_L(\gamma) \le R. \end{cases} \tag{75}$$

Из метода множителей Лагранжа получаем условие оптимальности (λ — множитель Лагранжа):

$$\lambda \varphi'^{-1}(\gamma_i)\varphi''(\gamma_i) + \gamma_i = 1,\ i \in I,$$

из которого следует, что все ставки оплаты должны быть одинаковы и удовлетворять уравнению

$$\gamma \varphi'^{-1}(\gamma) = R/W. \tag{76}$$

Следует подчеркнуть, что во всех четырех задачах оптимальными оказались именно унифицированные системы стимулирования, причем решения задач 1 и 2 совпали, что представляется достаточно уникальным фактом, так как суммарные затраты АЭ отражают интересы управляемых субъектов, а суммарные затраты на стимулирование — интересы управляющего органа. Кроме того, возможность использования общих для всех АЭ управляющих параметров оказывается важной в механизмах планирования. Таким образом, справедлив следующий результат.

Теорема 1. В АС со слабо связанными АЭ, функции затрат которых имеют вид (66), унифицированные системы стимулирования оптимальны на множестве пропорциональных систем стимулирования.

Возникает закономерный вопрос — насколько жесткими являются требования к функциям затрат АЭ. Оказывается, эти требования можно ослабить — в задачах типа задачи 1 и задачи 2 оптимальность унифицированных систем стимулирования является следствием свойств задач условной оптимизации и практически не зависит от конкретного вида функций затрат.

Рассмотрим организационную систему со слабо связанными элементами, в которой функции затрат АЭ $c_i(y_i)$ — гладкие, возрастающие и выпуклые (содержательно выпуклость нужна для единственности точки максимума разности между линейным стимулированием и затратами). Вектор действий, реализуемый пропорциональной системой стимулирования со ставками $\{\gamma_i\}_{i=1}^n$, суммарные затраты АЭ и суммарные затраты на стимулирование определяются, соответственно:

$$\begin{cases} y_i^*(\gamma_i) = c_i'^{-1}(\gamma_i),\ i \in I; \\ c(\gamma) = \sum\limits_{i=1}^n c_i(c_i'^{-1}(\gamma_i)); \\ \vartheta_L(\gamma) = \sum\limits_{i=1}^n \gamma_i c_i'^{-1}(\gamma_i). \end{cases} \tag{77}$$

Для задач типа 1 и 2, применяя метод множителей Лагранжа, получаем, что при ослаблении требований к функциям затрат оптимальными остаются унифицированные системы стимулирования (например, в задаче 1 оптимальное значение параметра γ удовлетворяет уравнению $\sum\limits_{i=1}^n c_i'^{-1}(\gamma) = R$). Для задач типа 3 и 4, к сожалению, в общем случае унифицированные системы стимулирования не оптимальны. Применяя к ним, опять же, метод множителей Лагранжа, легко показать, что достаточным условием для оптимальности систем стимулирования UL-типа является существование функции $\xi(\cdot)$, такой, что выполнено

$$c_i'^{-1}(\gamma_i) c_i''(\gamma_i) = \xi(\gamma_i) \quad \forall\ i \in I.$$

Отметим, что в приведенной выше теореме утверждается, что системы стимулирования UL-типа оптимальны на множестве пропорциональных систем стимулирования в АЭ со слабо связанными АЭ, имеющими функции затрат вида (66). Поэтому опишем их сравнительную эффективность на множестве всевозможных (не только пропорциональных) систем стимулирования. Для этого достаточно сравнить минимальные затраты на стимулирование, например, в задаче 2, с затратами на стимулирование в случае использования центром оптимальных квазикомпенсаторных систем стимулирования (которые равны $\vartheta_{QK}(y^*) = \sum_{i=1}^{n} r_i \varphi(y_i/r_i)$).

Решая задачу выбора вектора $y^* \in A'$, минимизирующего $\vartheta_{QK}(y^*)$ при условии $\sum_{i=1}^{n} y_i^* = R$, получаем, что $\vartheta_{QK}^* = W\varphi(R/W)$. Подставляя из выражения (71) $\vartheta_{UL}^* = R\varphi'(R/W)$, вычислим отношение минимальных затрат на стимулирование:

$$\vartheta_{UL}^*/\vartheta_{QK}^* = R/W\varphi'(R/W)/\varphi(R/W). \tag{78}$$

Из выпуклости функции $\varphi(\cdot)$ следует, что $\vartheta_{UL}^*/\vartheta_{QK}^* \geq 1$. Так как суммарные затраты на стимулирование при использовании систем стимулирования UL-типа выше, чем при использовании "абсолютно оптимальных" систем стимулирования QK-типа, следовательно, первые не оптимальны в классе всевозможных систем стимулирования. Более того, можно показать, что при $R/W > 0$ и строго выпуклых функциях затрат отношение (78) строго больше единицы. Полученный для многоэлементных организационных систем результат вполне согласован с выводом о том, что в одноэлементных системах эффективность пропорционального стимулирования не выше, чем квазикомпенсаторного.

Можно сделать следующие выводы об использовании унифицированных систем стимулирования. Во-первых, в многоуровневых активных системах использование унифицированных систем стимулирования снижает информационную нагрузку на управляющие органы. Во-вторых, иногда эти системы стимулирования оказываются оптимальными. В-третьих, возможность использования общих для всех АЭ управляющих параметров оказывается важной в механизмах планирования (см. гипотезу слабого влияния и механизмы открытого управления в [**20**], [**38**]).

Унифицированные системы стимулирования в АС с агрегированием информации о действиях АЭ. Опишем, следуя в основном [**49**], формулировку и решение задачи стимулирования в многоэлементной детерминированной АС, в которой центр имеет агрегированную информацию о результатах деятельности n АЭ.

Стратегией АЭ является выбор действий, стратегией центра — выбор функции стимулирования, то есть зависимости вознаграждения каждого АЭ от его действий и, быть может, действий других АЭ или других агрегированных показателей их совместной деятельности.

Пусть *результат деятельности* $z \in A_0 = Q(A')$ АС, состоящей из n АЭ, является функцией (называемой функцией агрегирования) их действий: $z = Q(y)$. Интересы и предпочтения участников АС — центра и АЭ — выражены их целевыми функциями. Целевая функция центра является функционалом $\Phi(\sigma, z)$ и представляет собой разность между его доходом $H(z)$ и суммарным вознаграждением $v(z)$, выплачиваемым АЭ: $v(z) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(z)$, где $\sigma_i(z)$ — стимулирование i-го АЭ, $\sigma(z) = (\sigma_1(z), \sigma_2(z), \ldots, \sigma_n(z))$, то есть

$$\Phi(\sigma(\cdot), z) = H(z) - \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(z). \tag{79}$$

Целевая функция i-го АЭ является функционалом $f_i(\sigma_i, y)$ и представляет собой разность между стимулированием, получаемым им от центра, и затратами $c_i(y)$, то есть:

$$f_i(\sigma_i(\cdot), y) = \sigma_i(z) - c_i(y), \quad i \in I. \tag{80}$$

Предположим, что центр наблюдает только результат деятельности АС, от которого зависит его доход, но не знает и не может восстановить индивидуальных действий АЭ, то есть имеет место агрегирование информации — центр имеет не всю информацию о действиях АЭ, а ему известен лишь некоторый их агрегат $Q(\cdot)$.

Относительно параметров АС введем следующие предположения, которые, если не оговорено особо, будем считать выполненными в ходе всего последующего изложения результатов исследования АС с агрегированием информации:

А.1. $\forall\ i \in I\ A_i$ — отрезок вида $[0; a_i]$.

А.2. $\forall\ i \in I$ выполняется

1) функция $c_i(\cdot)$ непрерывна по всем переменным;

2) $\forall\ y_i \in A_i\ c_i(y)$ не убывает по y_i;

3) $\forall\ y \in A'\ c_i(y) \geq 0$;

4) $\forall\ y_{-i} \in A_{-i}\ c_i(0, y_{-i}) = 0$.

А.3. Функции стимулирования кусочно-непрерывны и принимают неотрицательные значения.

А.4. Функция дохода центра непрерывна и достигает максимума при ненулевом результате деятельности АС.

А.5. $Q : A' \to A_0 \subseteq \mathbb{R}^m$ — однозначное непрерывное отображение, где $1 \leq m < n$ (при $m \geq n$ смысл агрегирования теряется).

Эффективностью стимулирования является минимальное значение целевой функции центра на соответствующем множестве решений игры (множестве равновесных при данном стимулировании стратегий АЭ): *Задача синтеза оптимальной функции стимулирования* заключается в поиске допустимой системы стимулирования, имеющей максимальную эффективность.

Определим множество векторов действий АЭ, приводящих к заданному результату деятельности АС:

$$Y(z) = \{y \in A' | Q(y) = z\} \subseteq A',\ z \in A_0.$$

В [**49**] доказано, что в случае наблюдаемых действий АЭ минимальные затраты центра на стимулирование по реализации вектора действий $y \in A'$ равны суммарным затратам АЭ $\sum_{i \in I} c_i(y)$. По аналогии вычислим минимальные суммарные затраты АЭ по достижению результата деятельности $z \in A_o$ $\tilde{\vartheta}(z) = \min\limits_{y \in Y(z)} \sum\limits_{i=1}^{n} c_i(y)$, а также множество действий $Y^*(z) = \operatorname*{Argmin}\limits_{y \in Y(z)} \sum\limits_{i=1}^{n} c_i(y)$, на котором этот минимум достигается.

Введем следующее предположение.

А.6. $\forall\ x \in A_0, \forall\ y' \in Y(x),\ \forall\ i \in I,\ \forall y_i \in Proj_j Y(x)$ функция $c_j(y_i, y'_{-i})$ не убывает по y_i, $j \in I$.

В частности, предположение **А.6** выполнено в случае, когда затраты каждого АЭ зависят только от его собственных действий.

Фиксируем произвольный результат деятельности $x \in A_0$ и произвольный вектор $y^*(x) \in Y^*(x) \subseteq Y(x)$.

Теорема 2. При использовании центром системы стимулирования

$$\sigma^*_{ix}(z) = \begin{cases} c_i(y^*(x)) + \delta_i, & z = x; \\ 0, & z \neq x, \end{cases} \quad i \in I, \tag{81}$$

вектор действий АЭ $y^*(x)$ реализуется с минимальными затратами центра на стимулирование равными $\tilde{\vartheta}(x)$. При этом система стимулирования (81) является δ-оптимальной, где $\delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \delta_i$.

На втором шаге решения задачи стимулирования наиболее выгодный для центра результат деятельности АС $x^* \in A_0$ определяется как решение задачи оптимального согласованного планирования:

$$x^* = \operatorname*{argmax}_{x \in A_0} [H(x) - \tilde{\vartheta}(x)]. \tag{82}$$

Рассмотрим класс *унифицированных систем стимулирования.* Введем следующую функцию:

$$c(y) = \max_{i \in I} \{c_i(y)\}. \tag{83}$$

На первом шаге вычислим минимальные затраты на стимулирование $\vartheta_U(z)$ по реализации результата деятельности $z \in A_0$ унифицированной системой стимулирования:

$$\vartheta_U(z) = \min_{y \in Y(z)} c(y).$$

Множество векторов действий, минимизирующих затраты на стимулирование по реализации результата деятельности $z \in A_0$, имеет вид: $Y^*(z) = \operatorname*{Argmin}\limits_{y \in Y(z)} c(y)$.

По аналогии с теоремой 2 доказывается, что унифицированная система стимулирования (ср. с (81)):

$$\sigma^*_{ix}(z) = \begin{cases} c(y^*(x)), & z = x; \\ 0, & z \neq x, \end{cases} \quad i \in I, \tag{84}$$

где $y^*(x)$ — произвольный элемент множества $Y^*(x)$, реализует результат деятельности $x \in A_0$ с минимальными в классе унифицированных систем стимулирования затратами на стимулирование. На втором шаге решения задачи синтеза оптимальной унифицированной системы стимулирования найдем наиболее выгодный для центра результат деятельности АС x_U^* как решение задачи оптимального согласованного планирования: $x_U^* = \underset{z \in A_0}{\operatorname{argmax}}[H(z) - n\vartheta_U(z)]$.

Теорема 3. Эффективность унифицированного стимулирования не выше, чем эффективность персонифицированного стимулирования.

Идея доказательства теоремы 3 заключается в следующем. Фиксируем произвольный результат деятельности. Реализующая его унифицированная система стимулирования (84) в силу (83) характеризуется не меньшими суммарными затратами на стимулирование со стороны центра, чем система персонифицированная стимулирования (81) (так как $\forall\ i \in I$, $\forall\ y^* \in A'\ c_i(y^*) \leq c(y^*)$). По теореме о минимальных затратах на стимулирование получаем утверждение теоремы.

Унифицированные ранговые системы стимулирования. В большинстве известных моделей вознаграждение АЭ зависит от абсолютных значений их действий и/или результата деятельности. В то же время на практике достаточно распространены ранговые системы стимулирования (РСС), в которых величина вознаграждения АЭ определяется либо принадлежностью показателя его деятельности некоторому наперед заданному множеству — так называемые нормативные РСС (НРСС), либо местом, занимаемым АЭ в упорядочении показателей деятельности всех элементов — так называемые соревновательные РСС (СРСС).

Подробный обзор результатов отечественных и зарубежных авторов по исследованию РСС (турниров — rank-order tournaments — в терминологии теории контрактов) приведен в [**43**]. Ниже мы кратко опишем результаты сравнения эффективности унифицированных РСС с эффективностью других систем стимулирования.

Рассмотрим сначала НРСС, которые характеризуются наличием процедур присвоения рангов АЭ в зависимости от показателей их деятельности (выбираемых действий и т.д.). Введем следующие предположения, которые будем считать выполненными на протяжении настоящего Приложения (отказавшись от всех предположений, введенных выше).

А.1. Множества A_i возможных действий АЭ совпадают: $A_i = A = \mathbb{R}^1_+,\ i \in I$.

А.2. Функции затрат АЭ монотонны. **А.3.** Затраты от выбора нулевого действия равны нулю.

Пусть $\mathcal{J} = \{1, 2, \ldots, m\}$ — множество возможных рангов, где m — размерность НРСС, $\{q_j\}_{i \in \mathcal{J}}$ — совокупность m неотрицательных чисел, соответствующих вознаграждениям за "попадание" в различные ранги; $\delta_i:\ A_i \to \mathcal{J}$, $i = \overline{1, n}$ — процедуры классификации. Нормативной ранговой системой стимулирования (НРСС) называется кортеж $\{m, \mathcal{J}, \{\delta_i\}, \{q_j\}\}$.

В работе [**74**] доказано, что для любой системы стимулирования существует персонифицированная (с различными процедурами присвоения рангов для различных АЭ) НРСС не меньшей эффективности.

То, что центр использует различные процедуры присвоения рангов, может показаться несправедливым с точки зрения АЭ. Действительно, например, выбирая одинаковые действия, два АЭ могут иметь различные ранги и, следовательно, получать различные вознаграждения. Более справедливой представляется НРСС, в которой процедура классификации одинакова для всех АЭ, то есть так называемая универсальная НРСС, при использовании которой элементы, выбравшие одинаковые действия, получают одинаковые вознаграждения.

Введем вектор $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$, такой, что

$$0 \leq Y1 \leq Y2 \leq \dots \leq Ym < +\infty,$$

который определяет некоторое разбиение множества А. Универсальная НРСС задается кортежем $\{m, \{Y_j\}, \{q_j\}\}$, причем вознаграждение i-го активного элемента σ_i определяется следующим образом:

$$\sigma_i(y_i) = \sum_{j=0}^{m} q_j I(y_i \in [Y_j, Y_{j+1})),$$

где $I(\cdot)$ — функция-индикатор, $Y_0 = 0$, $q_0 = 0$. Универсальная НРСС называется прогрессивной, если $q_0 \leq q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_m$.

Свойства оптимальной УНРСС и алгоритмы ее построения приведены в [**5**]. Там же доказано, что в рамках следующего предположения

А.4. Существует упорядочение АЭ элементов, такое, что

(85) $$\forall\ y \in A\ c_1'(y) \geq c_2'(y) \geq \dots \geq c_n'(y) > 0$$

выполняется

Теорема 4. Если выполнены предположения **А.1**-**А.4**, то:

а) в классе УНРСС реализуемы такие и только такие действия, которые удовлетворяют условию

(86) $$y_1^* \leq y_2^* \leq \dots \leq y_n^*;$$

б) оптимальное решение задачи стимулирования есть:

(87) $$q_i = \sum_{j=1}^{i} (c_j(y_j^*) - c_j(y_{j-1}^*)),\ i \in I;$$

в) превышение затратами на стимулирование минимально необходимых определяется

(88) $$\Delta(\text{УНРСС}, QK) = \vartheta_{\text{УНРСС}}(y^*) - \vartheta_{QK}(y^*) = \\ = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{i} (c_j(y_j^*) - c_j(y_{j-1}^*)) - c_i(y_{i-1}^*) \right\};$$

г) оптимальная УНРСС является прогрессивной.

Отметим, что выше описаны УНРСС размерности n. Частым случаем УНРСС являются унифицированные системы стимулирования С-типа (УНРСС размерности 1). Поэтому рассмотрим задачу (первого рода) синтеза унифицированной системы стимулирования, в которой центр назначает общий для всех АЭ план и использует унифицированную систему стимулирования С-типа или QK-типа [**5**].

Пусть выполнено предположение **А.1** и центр должен назначить унифицированную систему стимулирования С-типа с одним "скачком":

(89) $$\sigma(x, y_i) = \begin{cases} C, & y_i \geq x; \\ 0, & y_i < x, \end{cases}$$

где C — некоторая неотрицательная величина, x — общий для всех АЭ план.

Введем следующее предположение:

А.5. Существует упорядочение АЭ, такое, что

$$\forall\, y \in A\ c_1(y) \geq c_2(y) \geq \ldots \geq c_n(y). \tag{90}$$

Обозначим $P(x, C)$ — множество тех АЭ, у которых затраты в точке x не превышают C, то есть таких элементов, которым выгодно выполнение плана $x: \ P(x, C) = \{i \in I | c_i(x) \leq C\}$.

Из **А.5** следует, что $P(x, C) = \{k(x, C), \ldots, n\}$, где функция $k(x, C) = \min\{i \in I | c_i(x) \leq C\}$. АЭ из множества

$$Q(x, C) = \{1, 2, \ldots, k(x, C) - 1\}$$

выполнение плана x при вознаграждении C невыгодно поскольку $\forall\, x \in A$, $\forall\, C \geq 0$

$$P(x, C) \cap Q(x, C) = \emptyset, \ P(x, C) \cup Q(x, C) = I,$$

и они выберут действия, минимизирующие затраты (в рамках предположения **А.3** — действия, равные нулю).

Тогда действия $\{y_i^*\}$, реализуемые системой стимулирования (89), удовлетворяют:

$$y_i^*(x, C) = \begin{cases} x, & i \geq k(x, C); \\ 0, & i < k(x, C). \end{cases} \tag{91}$$

Суммарные затраты на стимулирование при использовании центром системы стимулирования (89) равны

$$\vartheta(x, C) = C(N - k(x, C) + 1). \tag{92}$$

Зависимость $y_i^*(x, C)$ не является непрерывной. Поэтому для каждого $x \in A$ существует конечное число минимальных затрат на стимулирование, при которых изменяется число АЭ, выполняющих план $x: \ \{c_1(x), c_2(x), \ldots, c_N(x)\}$. Аналогично, для фиксированного C при непрерывных и строго монотонных функциях затрат АЭ существует конечное число планов $\{c_i^{-1}(C)\}$.

Общий (для случая, соответствующего **А.5**) алгоритм решения задачи синтеза оптимальной унифицированной системы стимулирования приведен в [**5**]. Ниже мы сравним минимальные затраты на стимулирование.

Фиксируем произвольный план $x \in A$. Для того чтобы все АЭ выбрали действия, совпадающие с планом, необходимо, чтобы $k(x, C) = 1$, то есть $C = c_1(x)$. Тогда из (89)-(92) получаем, что минимальные затраты на стимулирование равны (напомним, что индекс "U"соответствует унифицированным системами стимулирования) $\vartheta_{UQK}(x) = N c_1(x)$. Следовательно, потери в эффективности (по сравнению с системами стимулирования QK-типа) составляют:

$$\Delta(x) = \vartheta_{UQK}(x) - \vartheta_{QK}(x) = (N - 1) c_1(x) - \sum_{i=2}^{n} c_i(x). \tag{93}$$

Соревновательные ранговые системы стимулирования. В НРСС центр фиксировал процедуру классификации, определяя множества действий или результатов деятельности, при попадании в которые АЭ получал заданное вознаграждение. В отличие от НРСС, в соревновательных ранговых системах стимулирования (СРСС) центр фиксирует процедуру сравнительной оценки деятельности АЭ, задает число классов и число мест в каждом из классов, а также величины поощрений АЭ, попавших в тот или иной класс. Таким образом, в СРСС индивидуальное поощрение АЭ не зависит непосредственно от абсолютной величины выбранного им действия, а определяется тем местом, которое он занял в упорядочении показателей деятельности всех АЭ. Следовательно, СРСС по определению являются унифицированными системами стимулирования.

СРСС исследовались как в теории активных систем, так и в теории контрактов. Зарубежные исследователи акцентировали внимание в основном на активных системах, функционирующих в условиях внешней интервальной неопределенности и симметричной информированности, ограничиваясь в большинстве случаев либо двухэлементными системами, либо случаем идентичных АЭ. В работах российских авторов построены оптимальные СРСС для ряда практически важных частных случаев, в том числе — рассматриваемых ниже линейных функциях затрат АЭ и функциях затрат вида $c_i(y_i) = k_i c(y_i)$. Там же показано, что в случае интервальной неопределенности (незнании центром истинных значений параметров $\{k_i\}$) СРСС могут быть более эффективны, чем системы стимулирования следующего вида: $\sigma_i(y) = y_i \Big/ \sum_{j=1}^{n} y_j$. Сравнительная эффективность СРСС и других систем стимулирования исследовалась в **[5]**. Приведем основные результаты.

Предположим, что в активной системе, состоящей из n АЭ, выполнены предположения **А.1**-**А.5**, а центр использует следующую систему стимулирования: действия, выбранные АЭ, упорядочиваются в порядке возрастания, после чего каждый из АЭ получает вознаграждение q_i, соответствующее его номеру в упорядочении действий. Понятно, что первый АЭ (имеющий максимальные затраты при любом допустимом действии) будет всегда выбирать нулевое действие, поэтому положим вознаграждение q_1 за первое место в упорядочении действий равным нулю: $q_1 = 0$.

Теорема 5. Если выполнены предположения **А.1**-**А.4**, то необходимым и достаточным условием реализуемости вектора действий АЭ $y^* \in A$ в классе СРСС является выполнение

$$y_0^* = 0 \le y_1^* \le y_2^* \le \dots \le y_n^*, \tag{94}$$

причем данный вектор реализуем следующей системой стимулирования:

$$q_i(y^*) = \sum_{j=2}^{i} \{c_{j-1}(y_j^*) - c_{j-1}(y_{j-1}^*)\},\ i = \overline{1, n}, \tag{95}$$

а превышение суммарными затратами на стимулирование минимально необходимых равно:

$$\Delta(\text{СРСС}, QK) = \sum_{i=2}^{n} \left\{ \sum_{j=2}^{i} (k_{j-1} - k_j) c(y_j^*) \right\} \geq 0, \tag{96}$$

что является оценкой сравнительной эффективности СРСС.

Имея выражения (95) и (96), можно решать задачи синтеза СРСС, удовлетворяющих тем или иным свойствам..

Используя (88) и (96), легко получить оценки сравнительной эффективности СРСС и УНРСС, а также СРСС и компенсаторных систем стимулирования:

$$\begin{aligned} &\forall y^* \in A' \ \vartheta_{\text{СРСС}}(y*) - \vartheta_{\text{УНРСС}}(y^*) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=2}^{i} [c_{j-1}(y_j^*) - c_j(y_j^*) + c_j(y_{j-1}^*) - c_{j-1}(y_{j-1}^*)] \geq 0; \end{aligned} \tag{97}$$

$$\begin{aligned} &\Delta(\text{СРСС}, \text{QK}) = \\ &\quad = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{j=2}^{i} [c_{j-1}(y_j^*) - c_j(y_{j-1}^*)] - c_i(y_i^*) \right\} \geq 0. \end{aligned} \tag{98}$$

В заключение отметим, что выше приведено общее решение задачи синтеза оптимальной УНРСС. Для СРСС решение и оценки сравнительной эффективности на сегодняшний день получены лишь в рамках дополнительных предположений **А.3** и **А.4** о свойствах функций затрат АЭ.

Приложение 3. Активные системы с несколькими управляющими центрами (обзор)

В настоящем приложении приводится обзор результатов исследования АС, состоящих из нескольких центров. При этом центры пытаются влиять на решения одного агента. Разумеется, что центрам наиболее выгодно действовать согласованно, преследуя общие интересы (максимизируя совместную прибыль), и затем в процессе торговли разделить совместный доход друг с другом в соответствии с согласованной формулой. Однако если центры не могут сделать этого (например, по причине совместной неинформированности или как по причине невозможности соблюдения взаимных обязательств), то они должны действовать независимо. Таким образом возникает некооперативная игра между центрами, и необходимо анализировать получающиеся совершенные к подыграм равновесия Нэша, когда каждый рассматривает самый выгодный с его точки зрения ответ на стратегии других центров.

В частном секторе мы часто думаем о предприятии как о нисходящей иерархии взаимоотношений, где у каждого подчиненного (за исключением самого низшего уровня) имеется свои подчиненные (и у каждого руководителя имеются свои руководители). Притом наивысший центр в иерархии будет иметь своих руководителей — держателей акций и т.п. В общественном секторе, где результат какой бы то ни было деятельности оказывает влияние на несколько людей или групп, множественность центров является скорее правилом, чем исключением.

Бернхейм и Уинстон [**61**] рассмотрели общую теорию общественного агентства в случае moral hazard. Холмстром и Милгром [**65**] получили равновесия при схемах линейных выплат с двумя центрами, и Диксит (см. [**58**] и [**59**]) расширил данный пример до нескольких центров при более общих предположениях функции затрат и ошибок наблюдения. Рассмотрим симметричную ситуацию, где (i) при выборе АЭ усилий a_i получается результат $x_i = a_i + \epsilon_i$, при $i = \overline{1, n}$, (ii) центры нейтральны по отношению к риску и получают полезность от результата x_i, но каждый центр может наблюдать только результаты и может назначать выплаты АЭ как функции от всех результатов (не только одного x_i), (i) ошибки ϵ_i являются независимыми случайными величинами с дисперсией v и (iv) функция затрат АЭ есть

$$C(a_1, \ldots, a_n) = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2.$$

Тогда в равновесии Нэша сумма коэффициентов приращений оплат для случая всех центров при каждом исходе равна

$$m = \frac{1}{1 + nrcv}.$$

Сравнивая данное выражение со случаем одного АЭ ($m = \frac{1}{1+rcv}$ видим, что существование нескольких центров уменьшает стимулы для одного АЭ. Это уменьшение может быть достаточно серьезным если n большое.

Если же мы рассмотрим функцию затрат АЭ

$$C(a_1, \ldots, a_n) = \sum_i (a_i)^2 + k \sum_{i \neq j} a_{ij},$$

так что усилия АЭ для разных центров являются заменяющими при $k > 0$ и дополняющими при $k < 0$, тогда сумма коэффициентов приращений оплат для случая всех центров при каждом исходе равна

$$m = \frac{1}{1 + nrcv[1 + (n-1)k]}.$$

Таким образом мы получили дальнейшее уменьшение стимулов в случае замещающих центров, но усиление стимулов для случая дополняющих центров. Это говорит об организации центров: где возможна, центры должны быть организованы в группы по дополняющей деятельности, но при этом объединение по замещающей деятельности необходимо избегать.

Причина рассмотренного эффекта заключается в следующем. Во-первых, каждый центр хочет увеличить усилия центра по своему измерению и уменьшить по другим измерениям, вот почему данный эффект наиболее силен когда усилия являются заменяющими. Во-вторых, отрицательный коэффициент означает, что АЭ как бы застрахован от плохого исхода по этому направлению, при этом каждый из других центров готов обеспечивать данное страхование для направление, которое не приносит полезности.

Когда причина ясна, становится ясно, как бороться с данным явлением. Необходимо сделать так, чтобы информация о действиях АЭ соответствовала тому, от чего центр получает полезность, или сделать так, чтобы функция оплаты зависела только от такой информации.

Игры с несколькими центрами, в которых присутствует неблагоприятный отбор, были впервые исследованы в **[69]** и **[77]**. В данной ситуации так же присутствуют экстерналии между центрами, т.к. один функция стимулирования одного центра влияет на стимулы АЭ по выявлению АЭ другим центрам данной функции стимулирования и поэтому влияет на функции стимулирования, которые должны использовать другие центры.

Приложение 4. Модели и механизмы формирования состава активных систем (обзор)

В теории активных систем общие подходы к постановке и решению задач синтеза механизмов формирования оптимального состава АС рассматривались, в основном, применительно к формированию состава исполнителей проекта [**44**] и во взаимосвязи с решением задач стимулирования в многоэлементных АС [**50**]. Приведем основные результаты.

Формирование состава исполнителей проекта. Важнейшей задачей, стоящей перед руководителем проекта (центром), является формирование той команды, с которой ему предстоит работать. Действительно, можно правильно сформулировать цели, корректно поставить задачи, выбрать соответствующие методы и механизмы управления, но все это может оказаться напрасным, если не уделить достаточного внимания подбору кадров. Поэтому при известных целях проекта, в первую очередь, необходимо решить, кто будет реализовывать эти цели, иначе говоря - найти исполнителей. Если претендентов на участие в проекте не более одного на каждое задание (например, в случае, когда узко специализированное задание может выполнить только один коллектив или человек), то проблем не возникает. Однако часто существует несколько коллективов или людей, способных решить соответствующие задачи. Исходными данными для задачи формирования состава исполнителей являются:

1) набор требований к проекту и его результатам (качество и объем работ, ресурсы, сроки, риск и т.д.);

2) множество претендентов (потенциальных исполнителей), каждый из которых характеризуется своими возможностями — какие работы он может выполнить и в какие сроки, каково будет при этом качество, каких затрат это потребует и т.д.;

3) правила взаимодействия исполнителей (совместимость, последовательность работ, технология и т.д.).

Задача формирования состава исполнителей проекта в общем случае заключается в выборе из набора потенциальных исполнителей реальных исполнителей, коллектив которых обеспечит реализацию проекта с максимальной эффективностью. Семейство задач порождается различными вариантами задания критерия эффективности.

В общем виде алгоритм решения задачи достаточно прост: необходимо выделить допустимые комбинации претендентов (то есть такие комбинации, которые с учетом правил взаимодействия составляющих их элементов удовлетворяют требованиям, предъявляемым к проекту), а затем — выбрать "наилучшую" комбинацию.

Возникающие при этом трудности можно условно разделить на три класса. Во-первых, не всегда просто формализовать требования к проекту, возможности претендентов, правила их взаимодействия и т.д. Во-вторых, неясно, что такое "наилучшая" комбинация? И в-третьих, если удалось построить достаточно адекватную формальную модель и выбрать критерии оптимальности, то, как правило, вычислительная сложность задачи (число различных вариантов, которые необходимо сравнивать) оказывается настолько высокой, что приходится искать специальные методы ее решения.

Задачи формирования состава активной системы и механизмы стимулирования. Взаимосвязь между задачами формирования состава АС и механизмами стимулирования подробно обсуждалась в [**44**]. Приведем основные результаты, начав с описания формальной постановки задачи.

Пусть имеются N АЭ — потенциальных участников (претендентов на участие) активной системы. Обозначим: $\aleph$ — множество всех подмножеств множества[1] $N = \{1, 2, \ldots, N\}$, $I \in \aleph$ — некоторый элемент этого множества — состав АС, включающий n (пока неизвестное число) активных элементов, $|I| = n \leq N$. Стратегией i-го АЭ является выбор действия $y_i \in A_i$, максимизирующего его целевую функцию $f_i(\sigma(\cdot), y)$, представляющую собой разность между стимулированием $\sigma_i(y)$, получаемым от центра и затратами $c_i(y)$, то есть: $f_i(\sigma(\cdot), y) = \sigma_i(y) - c_i(y)$, $i \in I$, где $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in A' = \prod_{i=1}^{n} A_i$ — вектор действий всех АЭ, входящих в рассматриваемую АС.

Примем следующий порядок функционирования АС (с фиксированным составом). Центру и АЭ на момент принятия решения о выбираемых стратегиях (соответственно — функциях стимулирования и действиях) известны целевые функции и допустимые множества всех участников АС. Центр, обладая правом первого хода, выбирает функции стимулирования и сообщает их АЭ, после чего АЭ при известных функциях стимулирования выбирают действия, максимизирующие их целевые функции.

Известно, что в отсутствии ограничений на стимулирование минимальные затраты центра $\theta(\cdot)$ по побуждению АЭ из множества I к выбору вектора действий $y_I \in A_I = \prod_{i \in I} A_i$ равны[2]

$$\theta(y_I) = \sum_{i \in I} c_i(y_I). \tag{99}$$

Если функция дохода центра $H(\cdot, I)$ в АС с составом I определена на множестве A_I действий АЭ, входящих в АС, и равна нулю при $I = \emptyset$, то есть

$$H(\cdot, I) = H(y_I), \tag{100}$$

то эффективность оптимального управления составом I равна

$$\Phi(I) = \max_{y_I \in A_I} \{H(y_I) - \theta(y_I)\}. \tag{101}$$

[1] Мы надеемся, что использование одного и того же символа для обозначения множества потенциальных участников АС и их числа не приведет к путанице.

[2] Затраты АЭ в общем случае несепарабельны, то есть зависят от дейст-вий всех АЭ.

Тогда *задача определения оптимального состава АС* может быть формально записана как задача определения допустимого состава I^*, $|I^*| = n^*$, максимизирующего эффективность (101):

$$I^* = \underset{I \in \aleph}{\operatorname{argmax}}\, \Phi(I) \tag{102}$$

при условии, что $\Phi(I) \geq 0$.

Последнее условие означает, что выигрыш центра должен быть неотрицателен (условие индивидуальной рациональности центра), так как центр всегда имеет возможность получить нулевой выигрыш, не включая в состав АС ни одного АЭ.

Формулировка и решение задачи (102) в общем случае сопряжены с двумя трудностями. Во-первых, если затраты на стимулирование (99) определяются для произвольного состава АС тривиально (переход от одного состава АС к другому составу производится так, что сумма затрат АЭ вычисляется по АЭ, включенным в АС), то способы определения функции дохода центра (100) и индивидуальных затрат АЭ $c_i(y_I)$ (в общем случае зависящих от действий всех АЭ, входящих в АС) не столь очевидны. Действительно, нужно четко представлять для любого состава $I \in \aleph$ как с содержательной, так и с формальной точки зрения, к каким изменениям дохода центра и затрат каждого из АЭ приводит замена произвольного АЭ $i \in I$ на произвольный АЭ $j \in N$.

Вторая трудность заключается в высокой вычислительной сложности задачи (102). Число элементов множества $\aleph$ равно 2^N, то есть быстро растет с ростом N.

Для определения оптимального состава АС необходимо для каждого набора АЭ $I \in \aleph$ решить задачу стимулирования, то есть при N потенциальных претендентах на участие в АС необходимо решать 2^N задач стимулирования, а затем в соответствии с (102) искать состав, максимизирующий целевую функцию центра. Другими словами, вторая трудность является традиционной "проблемой" дискретной оптимизации.[3] Следовательно, необходимо либо получать эффективные алгоритмы для частных случаев, либо предлагать эвристические алгоритмы решения, оценивать их сложность, эффективность и т.д.

Частным случаем задачи определения оптимального состава АС является *задача оптимизации заданного состава АС*, формулируемая следующим образом. Имеется АС, включающая множество АЭ I_0. Известно также множество J потенциальных участников, $I_0 \cup J = N$ и задан критерий эффективности $K(I)$ состава $I \in \aleph$. Требуется найти оптимальный состав, то есть

$$I^* = \underset{I \in \aleph}{\operatorname{argmax}}\, K(I).$$

---

[3]Несмотря на внешнюю схожесть, задача (102) не является канонической задачей о назначении. Напомним, что в задаче о назначении известен эффект деятельности каждого претендента на каждой должности. В нашем случае распределение должностей соответствовало бы фиксированному вектору действий (или конечному множеству возможных действий АЭ), но, фактически, при фиксированном составе АС производится выбор оптимальных векторов действий АЭ, вошедших в АС (см. выражение (101)). (102) не является канонической задачей о назначении. Напомним, что в задаче о назначении известен эффект деятельности каждого претендента на каждой должности. В нашем случае распределение должностей соответствовало бы фиксированному вектору действий (или конечному множеству возможных действий АЭ), но фактически при фиксированном составе АС производится выбор оптимальных векторов действий АЭ, вошедших в АС (см. выражение (101)).

Частным случаем задачи оптимизации заданного состава АС является задача определения максимальных подмножеств $A \in 2^{I_0}$ и $B \in 2^J$ таких, что $A \subseteq I^*$, $B \subseteq I^*$. Содержательно, A — множество участников АС, которые войдут в оптимальный состав (следовательно $I_0 \backslash A$ — множество работников, подлежащих увольнению), B — множество потенциальных участников, которые входят в оптимальный состав, то есть множество тех АЭ, которых следует принять на работу.

Еще более частной является задача принятия решения об увольнении или найме одного АЭ (случай, когда $|A| = 1$ или $|B| = 1$) — так называемая *задача о приеме на работу*.

Интересным для настоящего исследования представляется следующий пример.

Пример 10. Предположим, что задача стимулирования заключается в распределении между n однородными АЭ фонда заработной платы (ФЗП) R. Если функция затрат каждого АЭ есть $c(y) = y^2/2\beta$, а доход центра пропорционален сумме действий АЭ, то при постоянном фонде заработной платы зависимость эффективности стимулирования от числа АЭ имеет вид: $\Phi^*(n) = \sqrt{2\beta R n} - R$. Содержательно, если выполнено предположение о том, что функция затрат монотонно возрастает, гладкая, выпуклая, равна нулю при нулевом действии и имеет при этом нулевую производную, то центру выгодно задействовать как можно большее число АЭ, стимулируя их за выполнение сколь угодно малых действий потому, что в окрестности действия, минимизирующего затраты ($y = 0$), предельные затраты каждого АЭ минимальны. Следовательно, при фиксированном фонде заработной платы (максимум $\Phi^*(n)$ по R достигается при ФЗП, пропорциональном числу АЭ в АС: $R^* = \beta n/2$) центр заинтересован в неограниченном увеличении числа АЭ (напомним, что рассматривается случай, в котором центр не обязан гарантировать АЭ даже сколь угодно малую положительную полезность — см. также ниже).

Ситуация меняется, если управляющие возможности (возможности по переработке информации) центра ограничены. В большинстве работ используется следующая оценка числа связей между n подчиненными АЭ, контролируемыми одним центром: $\approx 2n$. Содержательно, эта оценка соответствует числу возможных коалиций, и, следовательно, связей между n АЭ.

Учтем информационные ограничения, умножив $\Phi^*(n)$ на показатель $2^{-\xi n}$, где $\xi \geq 0$, то есть: $\Phi(n) = \left(\sqrt{2\beta R n} - R\right) 2^{-\xi n}$.

Максимум выражения $\Phi(n)$ по n достигается при $n = n_{max}$, где

$$n_{max} = \frac{R}{8\beta}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\beta}{\xi R \ln 2}}\right)^2.$$

Предположим теперь, что центр обязан гарантировать каждому АЭ, включенному в АС, некоторый минимальный уровень полезности $\overline{U} \leq \beta/2$ (ограничение резервной заработной платы или ограничение пособия по безработице). Тогда, решая задачу определения оптимального размера вознаграждений АЭ при ограниченном ФЗП, получаем, что при постоянном фонде заработной платы зависимость эффективности стимулирования от числа АЭ имеет вид:

$$\Phi^*(n) = \sqrt{2\beta(R - n\overline{U})n} - R.$$

Максимум этого выражения достигается при $n = n^* = \frac{R}{2\overline{U}}$, то есть ограничение резервной заработной платы определяет оптимальный состав (в случае однородных АЭ — оптимальный размер) активной системы.●

Отметим, что, несмотря на то, что в **[50]** рассматривались многоэлементные (и многоуровневые) АС, взаимозависимость АЭ отсутствовала (как максимум, рассматривались АС со слабо связанными АЭ).

Введем следующие предположения, которые мы будем считать выполненным, если не будет оговорено особо, в ходе всего последующего изложения материала настоящего приложения. Пусть выполнена гипотеза благожелательности (ГБ)[4], а также:

А.1. Целевая функция центра $H(y_I) = \sum\limits_{i \in I} y_i$.

А.2. Функция затрат монотонно возрастает, гладкая, выпукла по действию соответствующего АЭ, равна нулю при нулевом действии и имеет при этом нулевую производную.

Перейдем к описанию результатов исследования задач формирования состава АС, последовательно усложняя рассматриваемые модели — от АС с сепарабельными затратами АЭ к АС с несепарабельными затратами АЭ.

Предположим, что затраты АЭ сепарабельны, то есть $c_i(y) = c_i(y_i)$, $i \in I$. Тогда эффективность оптимального управления составом I равна

$$\Phi(I) = \max_{y_I \in A_I} \sum_{i \in I} \{y_i - c_i(y_i)\}. \tag{103}$$

Задача поиска оптимального состава АС при этом заключается в поиске $I \in \aleph$, максимизирующего выражение 99 на множестве неотрицательных его значений.

Теорема 1. Если выполнены предположения А.1 и А.2, то в АС с сепарабельными затратами АЭ оптимальным является максимальный состав АС, то есть $I^* = N$.

Содержательно результат теоремы 1 обусловлен тремя факторами: во-первых, в окрестности нулевого действия доход центра растет быстрее, чем затраты АЭ; во-вторых, центр имеет постоянный доход на масштаб производства (его функция дохода линейна, то есть не существует никаких технологических ограничений на число АЭ, осуществляющих совместную деятельность в рамках данной АС); и в-третьих, АЭ получают в равновесии нулевую полезность (то есть они безразличны с точки зрения значения своей целевой функции между участием и неучастием в данной АС и входят в состав АС только в силу благожелательно отношения к центру — см. ГБ выше).

Для того, чтобы исследовать класс моделей, в которых оптимален состав АС, отличный от максимального состава, рассмотрим последовательно модели, в которых присутствуют перечисленные выше три фактора.

---

[4] В задачах управления фиксированным составом АС гипотеза благожелательного отношения агентов к центру заключается в том, что каждый из них выбирает из множества максимумов своей целевой функции наиболее благоприятное для центра действие. В задачах формирования состава под ГБ будем понимать, помимо отмеченного выше, дополнительное требование — при одинаковых значениях целевой функции АЭ будет участвовать в АС, если это более предпочтительно с точки зрения центра, чем невхождение данного АЭ в состав рассматриваемой АС.

Предположим, что центр должен гарантировать i-му АЭ, если он включен в АС, в равновесии минимальный уровень полезности[5] $\overline{U}_{i_{\max}}$, и минимальный уровень полезности $\overline{U}_{i_{\min}}$, если он не включен в АС, $\overline{U}_{i_{\max}} \geq \overline{U}_{i_{\min}}$, $i \in N$. При сепарабельных затратах АЭ оптимальной системой стимулирования, реализующей действие y^*, является следующая квазикомпенсаторная система стимулирования:

$$\sigma_i(y^*, y_i) = \begin{cases} c_i(y_i) + \overline{U}_{i_{\max}}, & y_i = y^*; \\ 0, & y_i \neq y^*, \end{cases} \quad i \in N. \tag{104}$$

Определим следующие величины:

$$\Phi_i^* = \max_{y_i \in A_i} \{y_i - c_i(y_i) - \overline{U}_{i_{\max}}\}, \ i \in N \tag{105}$$

При этом целевая функция центра имеет вид:

$$\Phi(I) = \sum_{i \in I} \Phi_i^* - \sum_{i \in N \setminus I} \overline{U}_{i_{\min}}.$$

Следствие 4.5.1. . Оптимален состав $I^* = \{i \in N | \Phi_i^* \geq -\overline{U}_{i_{\min}}\}$. Если $\Phi^* = \Phi(I^*) = \sum\limits_{i \in I^*} \Phi_i^* - \sum\limits_{i \in N \setminus I^*} \overline{U}_{i_{\min}} < 0$, то ни один из составов не является допустимым.

Содержательно в силу следствия 4.5.1 в состав АС следует включать только те АЭ, доход от деятельности которых с учетом затрат на их стимулирование превышает затраты на выплату им компенсаций в случае исключения из состава АС. Если значение целевой функции центра Φ^* на этом составе строго отрицательно, то это значит, что значения резервных заработных плат АЭ из набора N слишком велики по сравнению с тем эффектом, который приносит центру их участие в рассматриваемой АС[6].

Пример 11. Пусть функции затрат АЭ имеют вид: $c_i(y_i) = y_i^2/2r_i$. Тогда $\Phi(I) = \sum\limits_{i \in I} \left(r_i/2 - \overline{U}_{i_{\max}}\right) - \sum\limits_{i \in N \setminus I} \overline{U}_{i_{\min}}$.

Рассмотрим сначала случай однородных АЭ: $r_i = r$, $\overline{U}_{i_{\max}} = \overline{U}_{\max}$, $\overline{U}_{i_{\min}} = \overline{U}_{\min}$, $i \in N$, $\overline{U}_{\min} \leq \overline{U}_{\max}$. При этом

$$\Phi(n) = n(r/2 - \overline{U}_{\max} + \overline{U}_{\min}), \ n = \overline{0, N}.$$

Решение задачи $\Phi(n) \to \max\limits_{0 \leq n \leq N}$ имеет вид:

$$n^* = \begin{cases} N, & r \geq 2\overline{U}_{\max}; \\ 0, & r < 2\overline{U}_{\max}. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь случай шести неоднородных АЭ, параметры которых приведены в таблице 5.

Рассчитаем значения целевых функций центра при различных составах АС (понятно, что при одинаковых $\overline{U}_{i_{\min}}$ включать АЭ в АС следует в порядке убывания Φ_i^*): $\Phi_i(\{1\}) = -3$, $\Phi_i(\{1\} \cup \{4\}) = 0$, $\Phi_i(\{1\} \cup \{2\} \cup \{4\}) = 2$, $\Phi_i(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\}) = 4$, $\Phi_i(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\}) = 5$, $\Phi_i(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\}) = 5$.

[5]"Условие участия" или "условие индивидуальной рациональности АЭ" гласит, что он согласится участвовать в данной АС, если ему в равновесии будет гарантированно обеспечен уровень полезности (или вознаграждение) не ниже заданного.

[6]Следует напомнить, что в рассматриваемой модели центр в любом случае обязан выплатить АЭ из набора N как минимум следующую сумму: $\sum\limits_{i \in N} \overline{U}_{i_{\min}}$.

Таблица 5. Таблица к примеру 11.

Параметр \ i	1	2	3	4	5	6
r_i	12	10	8	6	4	2
$\overline{U}_{i_{\max}}$	4	4	3	1	2	2
$\overline{U}_{i_{\min}}$	1	1	1	1	1	1
Φ_i^*	2	1	1	2	0	-1

Таким образом, оптимальным является либо максимальный состав АС, либо включение первых пяти АЭ. При этом центр безразличен по отношению к включению или не включению в состав АС[7] шестого АЭ так как для него имеет место $\Phi_6^* = -\overline{U}_{6_{\min}}$ — потери от его участия в АС в точности равны той компенсации, которую центру пришлось бы выплачивать ему не включая в состав АС. Если бы $\overline{U}_{\min}$, то центр был бы безразличен между включением и не включением в состав АС пятого АЭ и точно не включил бы шестой АЭ.

Предположим теперь, что "плата за участие в АС" $\{\overline{U}_{i_{\max}}\}$ понизилась и стала равна нулю, а величины $\{\overline{U}_{i_{\min}}\}$ стали равны трем единицам — см. таблицу 6.

Таблица 6. Таблица к примеру 11.

Параметр \ i	1	2	3	4	5	6
r_i	12	10	8	6	4	2
$\overline{U}_{i_{\max}}$	0	0	0	0	0	0
$\overline{U}_{i_{\min}}$	3	3	3	3	3	3
Φ_i^*	6	5	4	3	2	1

Тогда $\Phi_i(\{1\}) = -9$, $\Phi_i(\{1\}\cup\{2\}) = -1$, $\Phi_i(\{1\}\cup\{2\}\cup\{3\}) = 6$, $\Phi_i(\{1\}\cup\{2\}\cup\{3\}\cup\{4\}) = 12$, $\Phi_i(\{1\}\cup\{2\}\cup\{3\}\cup\{4\}\cup\{5\}) = 17$, $\Phi_i(\{1\}\cup\{2\}\cup\{3\}\cup\{4\}\cup\{5\}\cup\{6\}) = 21$. Теперь центру выгодно включать в состав АС все шесть АЭ.•

В рассмотренной выше модели учитывалась необходимость обеспечения участникам АС и АЭ, не входящим в ее состав, некоторого гарантированного уровня полезности. Опишем модели, в которых АЭ гарантируется нулевой уровень полезности (как и в моделях, описанных в первых девяти частях настоящей работы), но доход центра от привлечения дополнительных АЭ убывает (или растет медленнее, то есть предельный продукт труда убывает — см. выше) с ростом числа АЭ, уже вошедших в состав АС. Более конкретно, будем считать, что в n-элементной АС ($n = |I|$) функция дохода центра имеет вид

$$H(y_I) = g(n) \sum_{i \in I} y_i, \tag{106}$$

где $g(n)$ — убывающая функция числа АЭ в АС.

[7] В подобных случаях, наверное, целесообразно принять гипотезу благожелательного отношения центра к АЭ — включение АЭ в состав АС (трудоустройство), даже при обеспечении ему нулевого уровня полезности, является важным мотивирующим фактором.

Тогда, в рамках предположений А.1 и А.2, очевидно, существует оптимальный размер n^* АС, который может быть определен методами, описываемыми ниже.

Содержательно, наличие в выражении (106) убывающей по n функции может объясняться необходимостью создания новых рабочих мест, ростом постоянных издержек и т.д.

Пусть АЭ однородны. Запишем целевую функцию центра в виде:

$$\Phi(y, n) = ng(n)y - nc(y).$$

Вычислим оптимальное для центра реализуемое действие АЭ: $y^* = \xi(g(n))$, где $\xi(\cdot) = c'^{-1}(\cdot)$ — функция, обратная производной функции затрат. Подставляя в выражение для $\Phi(y, n)$ значение $y = y* = \xi(g(n))$, получим:

$$\Phi(n) = ng(n)\xi(g(n)) - nc(\xi(g(n))). \tag{107}$$

Вычислим производную выражения (107):

$$\frac{d\Phi(n)}{dn} = \xi(g(n)) \left[g(n) + n\frac{dg(n)}{dn} \right] - c(\xi(g(n)). \tag{108}$$

Если АЭ имеют функции затрат типа Кобба-Дугласа, то есть $c(y) = \frac{1}{\alpha}y^\alpha r^{1-\alpha}$, то приравнивая (108) нулю и проверяя знак второй производной, получаем, что максимизирующая целевую функцию центра зависимость $g^*(n)$ должна удовлетворять следующему дифференциальному уравнению:

$$g^{1/(\alpha-1)}(n) \left[\frac{\alpha - 1}{\alpha} g(n) + n\frac{dg(n)}{dn} \right] = 0. \tag{109}$$

Решение уравнения (109) при условии $g(1) = 1$ есть

$$g^*(n) = n^{(1-\alpha)/\alpha}. \tag{110}$$

Теорема 2. Если АЭ имеют функции затрат типа Кобба-Дугласа, то при функциях $g(n)$, всюду убывающих быстрее функции $g^*(n)$, определяемой (110), оптимальным является минимальный состав АС ($n^* = 1$), при $g(n)$, всюду убывающих медленнее $g^*(n)$, оптимальным является максимальный состав АС ($n^* = N$), в остальных случаях может существовать промежуточный оптимальный размер АС.

Пример 12. Пусть функции затрат однородных АЭ имеют вид: $c_i(y_i) = y_i^2/2r$, тогда АЭ имеют функции затрат типа Кобба-Дугласа с $\alpha = 2$. Тогда $\Phi(y, n) = g(n)ny - ny^2/2r$. Вычисляя при фиксированном n максимум $\Phi(y, n)$ по y, получим: $\Phi^*(n) = \max\limits_{y \in A}\{g(n)ny - ny^2/2r\} = ng^2(n)r/2$. Вычисляя максимум $\Phi^*(n)$ по n, получаем дифференциальное уравнение для функции $g(n) : g(n) + 2n\frac{dg(n)}{dn} = 0$. Легко видеть, что оптимальная зависимость дохода центра от "масштабов производства" получается при $g(n) \approx 1/n^{1/2}$. Если функция $g(n)$ всюду убывает медленнее, чем $1/n^{1/2}$, то оптимальным является максимальный состав АС, если всюду убывает быстрее, чем $1/n^{1/2}$, то оптимальным является минимальный состав АС, а в остальных случаях может существовать промежуточный оптимальный размер АС.

Подставляя в выражение для $\Phi^*(n)$ конкретную зависимость $g(n) = \alpha/n$, получаем, что максимум целевой функции центра достигается при $n = n^* = 1$.

Если $g(n) = 1/n^{1/4}$, то $n^* = N$, если $g(n) = e^{-\gamma n}$, то $n^* = 1/2\gamma$, если $g(n) = \frac{1}{1+\gamma n^2}$, то $n^* = \sqrt{\frac{1}{3\gamma}}$ и т.д.•

Рассмотрим теперь задачу формирования состава АС в случае, когда центр использует унифицированную пропорциональную систему стимулирования со ставкой оплаты $\lambda < 1$.[8] Тогда в рамках предположений А.1 и А.2 действия, выбираемые АЭ, есть $y_i^* = \xi_i(\lambda)$, где $\xi_i(\cdot) = c_i^{'-1}(\cdot)$, $i \in I$.

Целевая функция центра, представляющая собой разность между линейным доходом (см. предположение А.1.) и затратами на стимулирование, имеет при этом вид:

$$\Phi(y_I) = (1 - \lambda) \sum_{i \in I} \xi_i(\lambda). \tag{111}$$

Легко видеть, что в рамках предположения А.2, $\xi_i(\cdot)$ — непрерывные возрастающие вогнутые функции, поэтому (111) также является вогнутой функцей. Следовательно, для каждого фиксированного состава АС $I \in \aleph$ существует единственная оптимальная с точки зрения центра ставка оплаты $\lambda^*(I)$. Другими словами, оптимальной будет следующая стратегия центра — либо включать в состав АС все АЭ, либо никого.

Для того, чтобы уйти от полученного тривиального решения, предположим, что у каждого АЭ существует свой резервный уровень заработной платы $\overline{U}_i$ (отметим, что речь идет о резервной заработной плате, а не соответствующей ей резервной полезности), то есть АЭ соглашается участвовать в АС, только если его вознаграждение превышает резервную полезность. Таким образом, условие участия i-го АЭ имеет вид:

$$\lambda \xi_i(\lambda) \geq \overline{U}_i,\ i \in N. \tag{112}$$

Обозначим λ_i — решение уравнения $\lambda \xi_i(\lambda) = \overline{U}_i$, $i \in N$, относительно λ, и упорядочим АЭ в порядке возрастания λ_i. Значение целевой функции центра при включении в АС первых k АЭ равно:

$$\Phi(k) = (1 - \lambda_k) \sum_{i=1}^{k} \xi_i(\lambda_k),\ k = \overline{1, N}. \tag{113}$$

Решение задачи синтеза оптимального состава АС имеет вид: $I^* = \{1, 2, ..., k^*\}$, где

$$k^* = \underset{k=\overline{1,N}}{\operatorname{argmax}}\, \Phi(k). \tag{114}$$

Пример 13. Пусть функции затрат АЭ имеют вид: $c_i(y_i) = y_i^2/2r_i$, тогда $\xi_i(\lambda) = \lambda r_i$, $\Phi(y_I) = (1 - \lambda)\lambda \sum_{i \in I} r_i$. Минимальные ставки оплаты, за которые соответствующие АЭ согласятся участвовать в АС, равны $\lambda_i = \sqrt{\frac{\overline{U}_i}{2r_i}}$. Если имеется

[8] Так как функция дохода центра прямо пропорциональна действиям АЭ, то использование ставок оплаты, больших единицы, приведет к отрицательным значениям целевой функции центра и ее убыванию по любым допустимым действиям АЭ.

всего пять АЭ — претендентов на участие в АС — с параметрами, приведенными в таблице 7, то $k^* = 4$, то есть оптимальным является состав АС, включающий первые (в упорядочении λ_i) четыре АЭ.●

Таблица 7. Таблица к примеру 13.

Параметр \ i	1	2	3	4	5
r_i	1	1	1	1	1
$\overline{U}_i$	0.6	0.7	0.75	0.8	0.9
λ_i	0.77	0.84	0.87	0.89	0.95
$\Phi(i)$	0.1746	0.2733	0.3481	0.3777	0.2434

Проведенный анализ результатов решения задач формирования состава многоэлементных АС с сепарабельными затратами АЭ позволяет сделать вывод, что в этом классе моделей удается на основании имеющейся информации упорядочить АЭ, и решать задачу определения оптимальной комбинации АЭ на множестве N комбинаций, а не на множестве всех возможных 2^N комбинаций.

Откажемся от предположения о сепарабельности затрат, оставив в силе предположения А.1 и А.2. Задача синтеза оптимального состава АС примет вид:

$$I^* = \operatorname*{argmax}_{I \in \aleph} \Phi(I), \tag{115}$$

где

$$\Phi(I) = \max_{y_I \in A_I} \sum_{i \in I} (y_i - c_i(y_I)) \tag{116}$$

при условии, что $\Phi(I^*) \geq 0$[9].

Как неоднократно отмечалось выше, при решении задачи (115) возникают две основные проблемы: высокая вычислительная сложность (большое число составов АС, для которых необходимо вычислять максимальные эффективности управления и сравнивать их между собой) и необходимость конструктивного определения затрат АЭ в зависимости от состава АС и действий всех АЭ, входящих в этот состав (напомним, что соответствующая зависимость для функции дохода центра вводится в предположении А.1.).

Рассмотрим следующий пример, иллюстрирующий специфику сформулированной задачи (см. также примеры, приведенные выше).

Пример 14. Пусть АЭ однородны и имеют функции затрат ($|\alpha| \leq 1/n$)

$$c_i(y_I) = \frac{\left(y_i + \alpha \sum\limits_{j \in I \setminus i} y_j\right)}{2r}, \; i \in N. \tag{117}$$

Если центр должен гарантировать каждому АЭ уровень полезности $\overline{U}$, то оптимальной является квазикомпенсаторная система стимулирования, при использовании которой значение целевой функции центра равно:

$$\Phi(y_I) = g(n) \sum_{i \in I} y_i - \sum_{i \in I} c_i(y_I) - n\overline{U}, \tag{118}$$

[9]Данное ограничение может не рассматриваться, если $\Phi(\emptyset) = 0$.

где $g(n)$ — множитель, отвечающий за убывание дохода центра с ростом числа АЭ, включенных в состав АС. Определим действия АЭ, наиболее выгодные для центра: $y^* = \frac{rng(n)}{(1+\alpha(n-1))^2}$. Тогда зависимость целевой функции центра от числа n АЭ, входящих в АС, имеет вид:

$$\Phi(n) = \frac{n^2 g^2(n) r}{2(1+\alpha(n-1))^2} - n\overline{U}. \tag{119}$$

Обсудим роль параметра α, входящего в функцию затрат АЭ и отвечающего за влияние действий других АЭ на затраты данного АЭ.

Во-первых, при $\alpha \geq 0$ затраты каждого АЭ возрастают с ростом действий других АЭ, а при $\alpha \leq 0$ — убывают. Содержательно этот факт может интерпретироваться следующим образом: в первом случае АЭ "мешают" друг другу (например, при ограниченных технологией возможностях производства), а во втором — "помогают" (например, происходит разделение труда и т.д.). Во-вторых, функция (119) убывает по параметру α, то есть с его ростом при любом фиксированном составе доход центра убывает. Будем считать, что $\alpha < 0$, тогда при $g(n) = n^{-1/2}$ получаем, что $\Phi(n) = \frac{r}{2(1+\alpha(n-1))^2} - n\overline{U}$. Предполагая существование ненулевого внутреннего решения, получим, что оптимальный размер АС равен: $n^* = 1 - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha r}{\overline{U}}\right)^{1/3}$.

С уменьшением значения параметра[10] α растет оптимальный размер АС, с увеличением гарантированного уровня полезности $\overline{U}$ он убывает.•

В более общем случае можно рассмотреть два типа взаимовлияния АЭ:

- с увеличением состава АС затраты каждого АЭ не возрастают:

$$\forall i \in N,\ \forall I \in \aleph,\ \forall j \in N \backslash I,\ \forall y \in \prod_{i \in N} A_i\ c_i(y_I) \geq c_i(y_{I \cup \{j\}});$$

- с увеличением состава АС затраты каждого АЭ не убывают:

$$\forall i \in N,\ \forall I \in \aleph,\ \forall j \in N \backslash I,\ \forall y \in \prod_{i \in N} A_i\ c_i(y_I) \leq c_i(y_{I \cup \{j\}}).$$

Содержательные интерпретации обоих случаев очевидны.

[10]Отметим, что в рассматриваемом примере при $\alpha > 0$ оптимальный размер АС не превышает единицы.

Приложение 5. Персонифицированные системы стимулирования

Рассмотрим задачу минимизации затрат для реализации некоторого действия в активных системах АС1 и АС5 — мы можем назначать каждому из активных элементов персональную систему стимулирования (считаем, что тип каждого активного элемента нам точно известен и что по этому типу мы можем точно восстановить его функцию затрат).

Рассмотрим дискретный случай, а именно, пусть в активной системе имеется n активных элементов, причем i-й активный элемент имеет тип $r_i \in \Omega$, $\{r_i\}_{i=1}^n = \Omega' \subset \Omega$.

Тогда задача минимизации суммарных затрат на стимулирование записывается следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i(f(r_i)) \to \min_{f(r), \sigma_i(x) \in M} \tag{120}$$

при выполнении условий

$$f(r_i) \in \operatorname*{Argmax}_x (\sigma_i(x) - c(r_i, x)); \tag{121}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(r_i) = \bar{x}, \tag{122}$$

где $f(r)$ есть функция действия активных элементов, а $\sigma_i(x)$ — функция стимулирования i-го активного элемента.

В [**47**] показано, что при данной постановке задачи оптимальными являются квазикомпенсаторные системы стимулирования, и вместо функций стимулирования достаточно рассматривать c_i — точечные стимулирования активных элементов при реализации необходимых действий x_i, причем $c_i = c(r_i, x_i)$. Тогда, поскольку $\sigma_i(x) = c_i I_{\{x = x_i\}}$, где $I_{\{\cdot\}}$ — функция-индикатор, задача переписывается в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{n} c(r_i, x_i) \to \min_{\{x_i\}}$$

при выполнении условия

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}.$$

Решая минимизационную задачу методом множителей Лагранжа

$$L = \sum_{i=1}^{n} c(r_i, x_i) + \lambda \left(\bar{x} - \sum_{i=1}^{n} x_i \right) \to \min_{\{x_i\}}$$

получаем, что

$$c_x(r_i, x_i) = \lambda \geq 0, \qquad i = \overline{1, n},$$

следовательно должно выполняться

$$c_x(r_i, x_i) = c_x(r_j, x_j), \quad j, i = \overline{1, n}. \tag{123}$$

Пример 15. Рассмотрим случай квадратичных затрат активных элементов $c(r_i, x) = x^2/r_i$, и пусть множество возможных типов есть $\Omega' = \{r_i\}_{i=1}^n$, $\Omega' \subset \Omega$. Тогда

$$c_x(r_i, x_i) = c_x(r_j, x_j) \Rightarrow 2x_i/r_i = 2x_j/r_j \Rightarrow x_i = x_j r_i/r_j.$$

Суммарное действие

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_1 r_i/r_1 = x_1 \sum_{i=1}^{n} r_i/r_1;$$

$$x_1 = \bar{x} r_1 \Bigg/ \sum_{i=1}^{n} r_i \, .$$

В силу этого получаем, что действие i-го АЭ

$$x_i = \bar{x} r_i \Bigg/ \sum_{k=1}^{n} r_k \, .$$

Минимальные затраты на реализацию действия $\bar{x}$ равны

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i(x_i) = \sum_{i=1}^{n} c(r_i, x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\bar{x} r_i \Big/ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} r_i \right) \right)^2}{r_i}$$

$$= \frac{\bar{x}^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} r_i \right)^2} \sum_{i=1}^{n} r_i = \frac{\bar{x}^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i} . \bullet$$

Лемма 1. Пусть $x_i^*(\bar{x})$ — решение задачи (120)-(122) при заданном $\bar{x}$. Тогда

$$\frac{d \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i(x_i^*)}{d\bar{x}} = c_x(r_j, x_j^*), \qquad j = \overline{1, n};$$

$$\frac{d^2 \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i(x_i^*)}{d\bar{x}^2} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{c_{xx}(r_i, x_i^*)}}.$$

Заметим, что по Лемме 1 и в силу условий на функции затрат выполнено

$$\frac{d^2 \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i(x_i^*)}{d\bar{x}^2} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{c_{xx}(r_i, x_i^*)}} > 0,$$

то есть функция средних минимальных затрат на реализацию действия выпукла. Это, в частности, говорит о том, что центру невыгодно использовать смешанные стратегии.

Пример 16. Рассмотрим затраты вида

$$c(r,x)=\frac{x^{1+\alpha}}{(1+\alpha)r^{\alpha}},\qquad \alpha>0; \tag{124}$$

$$c_i''(x_i)=\alpha\frac{x_i^{\alpha-1}}{r_i^{\alpha}},\qquad i=\overline{1,n}.$$

Исходя из условия (123), получаем:

$$\frac{x_i}{r_i}=\frac{x_j}{r_j}\Rightarrow x_i=r_i\frac{x_j}{r_j},\qquad i=\overline{1,n}.$$

В силу равенства $\sum x_i=\bar{x}$

$$\sum_{i=1}^{n} r_i\frac{x_j}{r_j}=\bar{x}\Rightarrow x_j=\frac{r_j}{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i}\bar{x},\quad \text{и}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_i(x_i)}{d\bar{x}^2}&=\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{c_i''(x_i)}}\\&=\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{r_i^{\alpha}}{\alpha\left(\frac{r_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i}\bar{x}\right)^{\alpha-1}}}=\alpha\frac{\bar{x}^{\alpha-1}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} r_i\right)^{\alpha}}.\end{aligned}$$

При этом суммарные затраты равны

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma_i(x_i)=\alpha\frac{\bar{x}^{\alpha+1}}{(1+\alpha)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} r_i\right)^{\alpha}}. \tag{125}$$

Сравнивая суммарные затраты с затратами одного элемента (уравнения (124) и (125)) можно заметить, что при наличии нескольких элементов можно считать, что в системе вместо этих нескольких элементарных элементов имеется один составной элемент, причем этот составной элемент по своим затратам эквивалентен элементарному элементу с типом, равным сумме типов элементарных элементов (см. также механизмы внутрифирменного регулирования в [**47**]).•

Перейдем теперь к рассмотрению непрерывного случая, а именно, рассмотрим ситуацию, когда типы активных элементов имеют равномерное на Ω распределение. Вновь будем предполагать, что тип каждого из активных элементов центру точно известен и каждому из них можно сопоставить соответствующую систему стимулирования.

Рассуждая аналогично дискретному случаю, получаем, что оптимальное стимулирование элемента r для реализации действия $f(r)$ есть $c(r,f(r))I_{\{x=x_i\}}$ и задача минимизации затрат записывается следующим образом:

$$\mathbf{E}\,c(r,f(r))\to\min_{f(\cdot)}\quad \text{при выполнении} \tag{126}$$

$$\mathbf{E}\,f(r)=\bar{x}. \tag{127}$$

Для $f(r)$ — решения этой задачи — при любом r должно выполняться равенство $c_x(r, f(r)) = \lambda > 0$.

Пример 17. Рассмотрим случай квадратичных затрат активных элементов $c(r,x) = x^2/r$. Тогда должно выполняться равенство $c_x(r, f(r)) = \lambda$, следовательно $f(r) = \frac{\lambda r}{2}$.

Исходя из ограничения (127)

$$\begin{aligned}\bar{x}(r_1 - r_0) &= (r_1 - r_0)\,\mathbf{E}\,f(r) \\ &= \int\limits_{r_0}^{r_1} f(r)\,dr = \int\limits_{r_0}^{r_1} \frac{\lambda r}{2}\,dr = \frac{\lambda}{4}(r_1^2 - r_0^2),\end{aligned}$$

и константа $\lambda = \frac{4\bar{x}}{r_1 + r_0}$, а $f(r) = r\frac{2\bar{x}}{r_0 + r_1}$ (поскольку для АЭ типа r, реализующего действие $f(r)$, $\sigma(f(r)) = c(r, f(r)))$.

Средние затраты на стимулирование равны

$$\begin{aligned}C_2 &= \mathbf{E}\,c(r, f(r)) \\ &= \frac{1}{r_1 - r_0}\int\limits_{r_0}^{r_1} r_1 \frac{1}{r}\left(\frac{2\bar{x}r}{r_1 + r_0}\right)^2 dr = \frac{2\bar{x}^2}{r_1 + r_0}.\end{aligned}$$

Функция стимулирования находится из условия

$$\sigma(f(r)) = c(r, f(r)).$$

Действительно, обозначив $x = f(r)$, имеем: $r = f^{-1}(x) = \frac{x(r_0 + r_1)}{2\bar{x}}$ и

$$\sigma(x) = \frac{x^2}{r} = \frac{2\bar{x}}{r_1 + r_0}x.\bullet$$

Приложение 6. Модели оперативного управления персоналом

Рассмотрим следующую динамическую модель изменения состава фирмы. Предположим, что на рынке труда имеется бесконечное множество сотрудников, каждый из которых определяется своим типом. При выборе какого-то конечного количества сотрудников (и со временем) общее распределение типов не меняется, т.е. тип нового случайно выбранного сотрудника имеет такое же распределение, как и предыдущего.

При количестве сотрудников c фирма получает прибыть $f_\theta(c)$, где θ определяет ту часть хороших сотрудников из общего числа, которую фирма принимает на работу. Т.е. если тип сотрудника соответствует $\theta * 100\%$ лучших на рынке труда сотрудников, то он гарантированно принимается на работу. В начале работы каждая фирма определяет свое θ. Заметим, что в силу разных условий труда понятие "лучший сотрудник" отличается для разных фирм, поскольку один хорошо может учить детей, но плохо печет хлеб, другой хорошо печет хлеб, но не может хорошо учить детей. Тогда с точки зрения хлебопекарни у второго работника хороший тип, а у первого — плохой, а с точки зрения школы у первого работника хороший тип, а у второго — плохой. Поскольку процесс приема на работу ведется сразу многими фирмами, то на рынке соблюдается равновесие: первый работник принимается на работу как учитель, а второй — как пекарь (доля работников с хорошим типом не уменьшается, т.к. работники с плохим типом в одной области являются хорошими сотрудниками в других областях).

Для определения типа поступающих s сотрудников фирма должна понести затраты $g(s)$, при этом из s людей на работу будут приняты только θs, поскольку именно столько людей обладают нужным фирме типом. При приеме на работу недостаточно определить, принимать человека на работу или нет, надо точно знать его тип для того, чтобы полнее использовать его возможности. Таким образом $g(s)$ не зависит от θ.

Моментальная полезность фирмы есть разность между прибылью и затратами на тестирование новых сотрудников:

$$\pi = f_\theta(c) - g(s). \tag{128}$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что $f_\theta(c)$ как функция от c обладает стандартными свойствами: $f_\theta(0) = 0$, $f'_\theta(0) = \infty$, $f'_\theta(c) > 0$, $f''_\theta(c) < 0$, $f'_\theta(\infty) = 0$. Кроме того, $f_\theta(c)$ убывает вместе со своей производной по θ. Там, где не будет рассматриваться изменение параметра θ, у функции $f_\theta(c)$ параметр θ будем опускать: $f(c)$.

Функция $g(s)$ обладает следующими свойствами: $g(0) \geq 0$, $g'(0) \geq 0$, $g'(s) \geq 0$, $g''(s) > 0$. Исходя из условий задачи c и s должны быть не меньше нуля.

Будем считать, что принятые на работу люди увольняются (по разным причинам — переход на другую работу, выход на пенсию и т.п.) со скоростью λ. Тогда динамика изменения количества работающих людей описывается уравнением

$$\dot{c} = \theta s - \lambda c. \tag{129}$$

Заметим, что c и s есть функции времени: $c = c(t)$, $s = s(t)$, причем по смыслу функция $c(t)$ должна быть непрерывной и почти всюду дифференцируемой, а функция $s(t)$ может иметь конечное число разрывов на любом отрезке (соответствующих изменению управления). Управлением для фирмы является параметр s (при этом c определяется исходя из уравнения 129).

Предположим, что в описываемой модели существует дисконтирование прибыли в размере r. Тогда при начальном количестве сотрудников c_0 задача максимизации прибыли записывается в следующем виде:

$$\Pi = \int\limits_0^\infty e^{-rt}(f(c) - g(s))\, dt \to \max_s \tag{130}$$

при выполнении условий:

$$\dot{c} = \theta s - \lambda c; \tag{131}$$

$$s \geq 0; \tag{132}$$

$$c \geq 0; \tag{133}$$

$$c(0) = c_0. \tag{134}$$

Для решения задачи (130)-(134) запишем гамильтониан (без условий (132)-(133); их влияние будет обсуждено позднее):

$$\mathcal{H} = e^{-rt}(f(c) - g(s)) + \mu(\theta s - \lambda c), \tag{135}$$

где $\mu \geq 0$ — некоторая неотрицательная функция времени.

Функции $c(t)$ и $s(t)$ будут решением задачи только тогда, когда

$$0 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s} = -e^{-rt} g'(s) + \mu\theta; \tag{136}$$

$$\dot{\mu} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} = -e^{-rt} f'(c) + \mu\lambda. \tag{137}$$

Из уравнения (137):

$$\dot{\mu} = -e^{-rt} f'(c) + \mu\lambda \overset{(136)}{=} -e^{-rt} f'(c) + \frac{\lambda}{\theta} e^{-rt} g'(s). \tag{138}$$

Возьмем полную производную по t уравнения (136):

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt}(-e^{-rt} g'(s) + \mu\theta) = re^{-rt} g'(s) - e^{-rt} g''(s)\dot{s} + \theta\dot{\mu} \overset{(136)}{=} \\ = re^{-rt} g'(s) - e^{-rt} g''(s)\dot{s} - \theta e^{-rt} f'(c) + \lambda e^{-rt} g'(s); \end{aligned} \tag{139}$$

$$rg'(s) - g''(s)\dot{s} - \theta f'(c) + \lambda g'(s); \tag{140}$$

$$\dot{s} = \frac{(r+\lambda)g'(s) - \theta f'(c)}{g''(s)}. \tag{141}$$

Таким образом мы доказали теорему:

Теорема 4.5.2.Поведение системы (количество уже приняты сотрудников, скорость приема сотрудников) на оптимальной траектории (оптимизирующей прибыль фирмы) описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{c} = \theta s - \lambda c; \\ \dot{s} = \frac{(r+\lambda)g'(s) - \theta f'(c)}{g''(s)}. \end{cases} \tag{142}$$

С помощью фазовой плоскости в координатах c (ось абсцисс) и s (ось ординат) опишем поведение траекторий системы (142). Нас интересует только квадрант $c \geq 0$, $s \geq 0$ (см. условия (132) и (133)).

Мы будем искать возможные траектории — такие пути на плоскости, по которым пойдет фирма, если будет руководствоваться в выборе кадровой политики написанной выше системой уравнений. Скачки траекторий возможны только в начальный момент времени, т.е. только тогда, когда принимаются решения. Дальше уже фирма будет действовать в соответствии с оптимальной стратегией. Изменение стратегии может быть вызвано только изменением информации, шоками, и т.д., когда, во-первых, изменяется поле направлений на фазовой плоскости, а, во-вторых, фирма выбирает новую стратегию.

Прежде всего, прямая $\theta s - \lambda c$ делит фазовую плоскость на две части (см. рис. 5). В соответствии с первым уравнением системы (142) над этой прямой производная c по времени больше нуля, под прямой — меньше нуля (соответственно на прямой производная c по времени равна нулю).

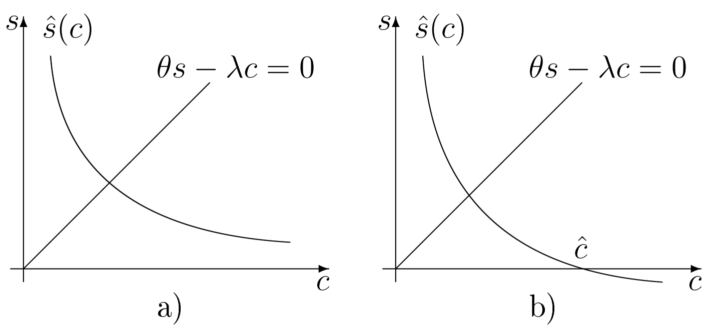

Рис. 5. Различные варианты поведения функции $\hat{s}(c)$ на фазовой плоскости.

Поскольку $g''(s) > 0$, то знак производной s по времени определяется числителем второго уравнения системы (142). Рассмотрим его подробнее. Поскольку $f'(c) > 0$ — убывающая функция, а $g'(s) \geq 0$ — возрастающая функция, то уравнение

$$0 = (r+\lambda)g'(s) - \theta f'(c) \tag{143}$$

может иметь самое большее одно решение при фиксированном c или s. Обозначим $\hat{s}(c)$ — решение уравнения (143) в зависимости от c. В силу убывания (монотонного и непрерывного) $f'(c)$ и непрерывного возрастания $g'(s)$ функция $s(c)$ непрерывна и монотонно убывает. При c стремящемся к нулю $f'(c)$ стремится к $+\infty$, следовательно $\hat{s}(c)$ стремится к $+\infty$ поскольку $g'(s)$ стремится к $+\infty$ тогда и только тогда, когда s стремится к $+\infty$.

Поведение функции $\hat{s}(c)$ существенно зависит от того, равна ли нулю производная функции $g(s)$ в точке $s = 0$. Если производная равна нулю (см. рис. 5a), то при любом c существует решение уравнения (143), и функция $\hat{s}(c)$ убывает до нуля при $c \to +\infty$. Если же $g'(0) > 0$ (см. рис. 5b), то существует такое $\hat{c}$, что $s(\hat{c}) = 0$, и функция $\hat{s}(c)$ убывает на отрезке от 0 до $\hat{c}$ и неопределена при $c > \hat{c}$. В случае, когда $\hat{s}(c)$ не пересекает ось s (т.е.$g'(0) = 0$), будем считать $\hat{c} = +\infty$.

Различные варианты поведения функции $\hat{s}(c)$ изображены на рис. 5.

На фазовой плоскости производная функции s по времени над кривой $\hat{s}(c)$ положительна, под кривой — отрицательна, а на кривой равна нулю. Поле направлений изображено на рис. 6. бесконечность.

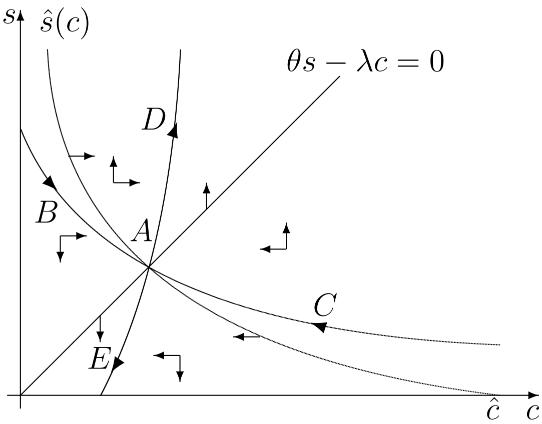

Рис. 6. Поле направлений для системы (142).

Обозначим точку пересечения (которая всегда существует) функции $\hat{s}(c)$ с прямой $\theta s - \lambda c = 0$ за A (с координатами s_A и c_A). Как видно из поля направлений, точка A является седловой точкой, и в ней $\dot{c} = \dot{s} = 0$, следовательно, если фирма оказалась в точке A, то она в ней и останется. Будем называть данную точку стационарным состоянием (т.к. в системе не происходит никаких изменений). Заметим, что A не является устойчивой точкой.

Точка A есть единственная точка равновесия, в которой и количество рабочих и скорость приема на работу не изменяются (скорость приема на работу и скорость увольнения равны). Точка А является седлом (равновесие неустойчиво), т.е. при небольшом изменении параметров мы можем перейти на траекторию, уходящую в бесконечность.

Из поля направлений видно, что устойчивая седловая траектория (проходящая через точку A) проходит по фазовой плоскости как показано на рисунке: слева направо, сверху вниз (иначе было бы противоречие с полем направлений). Обозначим седловую траекторию, входящую в т. A слева за B, а траекторию, входящую в стационарную точку справа — за C. Исходящие траектории обозначим за C и D (соответственно сверху и снизу).

В качестве решения задачи (130)-(134) нас интересуют только седловые траектории, поскольку при других мы либо увеличиваем количество сотрудников до $+\infty$, что невозможно, поскольку в этом случае затраты на прием увольняющихся превысят доход от работы, либо количество принимаемых уменьшится до нуля, что тоже невозможно т.к. это будет нестационарной точкой (или же при этом количество работающих будет равно нулю). Таким образом, при заданном начальном количестве работников посредством выбора s фирма должна перейти на седловую траекторию B или C. Существует несколько вариантов (см. рис. 7).

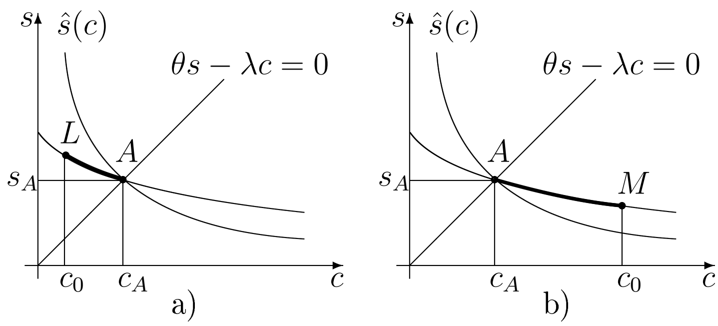

Рис. 7. Описание прихода системы в стационарное состояние: а) при $c_0 < c_A$; b) при $c_0 > c_A$.

1. $c_0 =_A$. Выбором $s = s_A$ фирма сразу попадает в стационарное состояние и продолжает там находиться. То есть если на фирме уже работает количество сотрудников, соответствующее точке A, то фирма уже находится в равновесной точке.

2. $c_0 < c_A$. В этом случае фирма перейдет на седловую траекторию, при этом количество принимаемых на работу будет больше, чем количество принимаемых на работу в стационарном состоянии (поскольку мы окажемся на траектории B, а эта траектория ведет к состоянию A сверху вниз, слева направо). Со временем c будет увеличиваться, а s будет уменьшаться: фирма будет подходить к стационарному состоянию все ближе и ближе, при этом количество работающих сотрудников будет постепенно увеличиваться, а скорость приема на работу уменьшаться до стационарного.

3. $c_0 < c_A$. При этом возможны 2 варианта: седловая траектория C проходит через c_0 при $s \geq 0$ или не проходит. Если проходит, то фирма выбирает s так, чтобы оказаться на данной седловой траектории, после этого c будет уменьшаться (запас сотрудников "проедаться" для получения сиюминутной прибыли), а s будет постепенно увеличиваться. Фирма будет подходить к стационарному состоянию.

Если же седловая траектория C не проходит через c_0 при $s \geq 0$ (она успела уйти в область минусовых s), то s становится равной нулю, и c естественным образом уменьшается до тех пор, пока не достигнет такого значения, чтобы фирма могла перейти на седловую траекторию. При этом $s = 0$, а c уменьшается. Начиная с момента перехода на седловую траекторию s постепенно увеличивается (по мере подхода к стационарной точке A от 0 до $s(A)$, а c уменьшается до c_A). Таким образом, в данном случае фирма будет постепенно уменьшать количество работающих за счет "недостаточного"(т.е. меньшего, чем в стационарной точке) приема на работу, при этом скорость приема на работу будет увеличиватсья, а количество работающих — уменьшаться. В определенных случаях может возникнуть ситуация, когда фирма никого не будет принимать на работу.

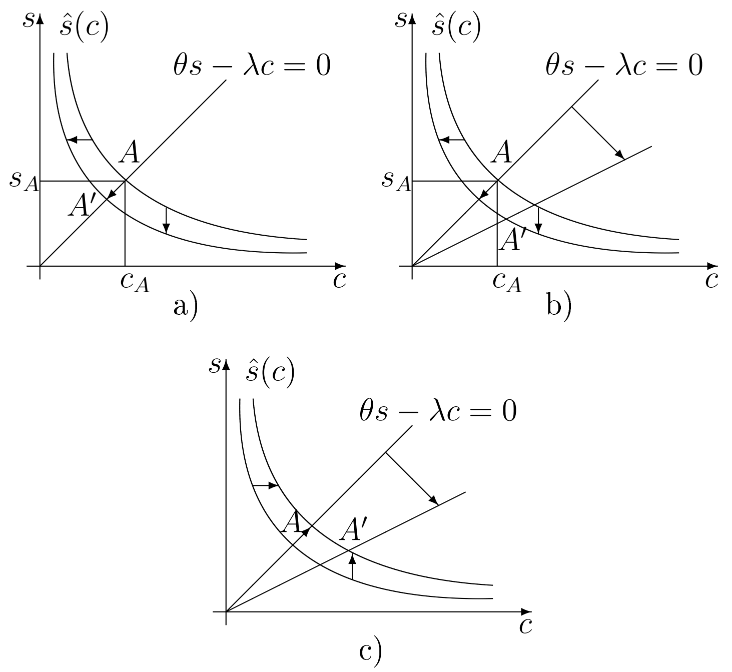

Рис. 8. Смещение стационарной точки при шоках: a) увеличение r; b) увеличение λ; c) увеличение θ.

Рассмотрим, что будет происходить с фирмой при шоках — изменениях параметров (см. рис. 8). Будем интересоваться изменением стационарного состояния, поскольку процесс перехода из некоторого состояния в стационарное изучен выше.

Рассмотрим сперва случай изменения r. Предположим, что коэффициент дисконтирования r увеличился (в противном случае произойдут обратные изменения), т.е. мы стали больше ценить настоящее. При этом прямая $\theta s - \lambda c$ не изменится. Как поведет себя $\hat{s}(c)$? Данная кривая является решением уравнения 143

$$0 = (r + \lambda)g'(s) - \theta f'(c).$$

Но если r увеличился, то при фиксированном c значение s должно уменьшится для того, чтобы равенство осталось верным, поскольку $(r + \lambda)g'(s)$ измениться не должно, r увеличился, а $g'(s)$ увеличивается с увеличением s. Таким образом, как видно из рисунка 8а), в новой стационарной точке c и s уменьшатся, т.е. и прием на работу, и количество работающих будет меньше, чем раньше.

Рассмотрим случай изменения λ. Опять предположим, что коэффициент λ увеличился, т.е. увеличилась скорость увольнения сотрудников. Повторяя предыдущие рассуждения, кривая $\hat{s}(c)$ сместится вниз. Но в данном случае произойдут изменения и с прямой $\theta s - \lambda c = 0$ — ее наклон увеличится. Как видно из рисунка, c при этом уменьшится, а об изменении s ничего сказать нельзя. С одной стороны работников будет меньше, но с другой стороны и увольняться они будут чаще (т.е. неизвестно, как изменится скорость приема на работу).

При увеличении θ, т.е. при увеличении процента людей, принимаемых на работу, уменьшится наклон прямой $\theta s - \lambda c = 0$. Однако для того, чтобы предсказать поведение кривой $\hat{s}(c)$, необходимо сделать дополнительные предположения о зависимости функции $f_\theta(c)$ от θ. Если зависимости нет, то $\hat{s}(c)$ как решение уравнения 143 должно сдвинуться вверх, т.е. в новой стационарной точке c увеличится, а s может измениться в любую сторону, т.е. работать на фирме будет большее количество людей, но ничего нельзя сказать о том, как изменится скорость приема на работу..

Результаты шоков (изменения параметров) сведены в таблицу (предполагаем отсутствие зависимости функции $f(c)$ от параметра θ):

Таблица 8. Изменение стационарного состояния при действии различных шоков

Шок	$\theta s - \lambda c = 0$	$s(c)$	c_A	s_A
Увеличение r	не изменяется	сдвиг вниз	$\downarrow$	$\downarrow$
Увеличение λ	наклон увеличивается	сдвиг вниз	$\downarrow$	$\downarrow\uparrow$
Увеличение θ	наклон уменьшается	сдвиг вверх	$\uparrow$	$\downarrow\uparrow$

Мы рассматривали случай с дисконтированием прибыли. В случае важности сиюминутной прибыли надо, разумеется, уменьшить до нуля количество принимаемых на работу (поскольку в настоящий момент времени это не приносит результатов), и извлекать прибыль из работающих.

Предположим теперь, что нам надо максимизировать везде, т.е. все будущее мы ценим одинаково. Таким образом, решаем задачу

$$f(c) - g(s) \to \max_s \tag{144}$$

при выполнении условия

$$\dot{c} = \theta s - \lambda c = 0. \tag{145}$$

Тогда $s = \frac{\lambda}{\theta}c$ (s и c не изменяются, следовательно их можно положить равными константе) и задача переписывается как

$$f(c) - g(\frac{\lambda}{\theta}c) \to \max_s; \tag{146}$$

$$f'(c) - \frac{\lambda}{\theta}g'(s) = 0; \tag{147}$$

$$\theta f'(c) - \lambda g'(s) = 0. \tag{148}$$

Обозначим решение данной задачи за E. Как относительно располагаются на фазовой плоскости точки A и E?

Прежде всего, в обоих случаях присутствует уравнение

$$\theta s - \lambda c = 0. \tag{149}$$

Но $\hat{s}(c)$ — решение уравнения 148 — лежит ниже решения уравнения 143, и, следовательно, $s_E < s_A$, $c_E < c_A$, а ситуация на фазовой плоскости эквивалентна ситуации увеличения коэффициента дисконтирования. И на самом деле, решая задачу 146 мы как бы предполагаем, что дисконтирования нет, т.е. что все времена мы одинаково ценим: и будущее, и настоящее.

Таким образом, в рассмотренном случае (когда мы одинаково ценим как будущее, так и настоящее), стационарная точка смещается вниз и влево, по сравнению со случаем с дисконтированием, т.е. как скорость приема на работу, так и количество работающих (в неподвижной точке) падает.