УДК 519.714.3

М.В. Губко
А.П. Караваев

(Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН, Москва)

Согласование интересов в матричных структурах управления

Рассмотрены задачи стимулирования, характерные для матричных структур управления организационными системами: найдено множество равновесий Нэша в двухуровневой активной системе (АС) с распределенным контролем. Для исследования коалиционных взаимодействий построена характеристическая функция и исследованы условия реализуемости коалиции всех элементов среднего звена управления. Поставлена и решена задача согласования интересов различных уровней иерархии путем «внутреннего налогообложения» среднего звена управления.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в теории и практике менеджмента считается перспективным организация управления компанией с помощью матричных структур управления (МСУ). Их суть [1] заключается в том, что на иерархическую организационную структуру накладывается «горизонтальная» структура проектов (см. рис. 1).

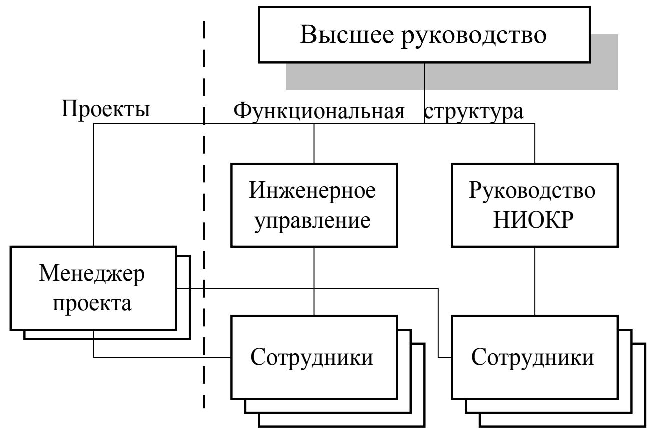

Рис. 1. Пример матричной организационной структуры

Одним из недостатков МСУ является то, что при недостаточном разделении полномочий между менеджерами проектов и руководителями функциональных подразделений возможен конфликт между ними. Представляет интерес исследование этого конфликта с целью сравнения возможных потерь в эффективности при той или иной организации управления и определение условий максимальной эффективности управления.

В качестве аппарата исследования используется теоретико-игровое моделирование [2], применяемое в теории активных систем (ТАС) для изучения систем организационного управления [3].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим активную систему (АС) [4] со структурой, изображенной на рис. 2. Центры представляют собой менеджеров проектов и руководителей функциональных подразделений, а активный элемент (АЭ) – сотрудника подразделения или подразделение в целом. Далее будет рассматриваться в основном взаимодействие центров и АЭ, роль высшего руководства будет проанализирована в последнем разделе статьи.

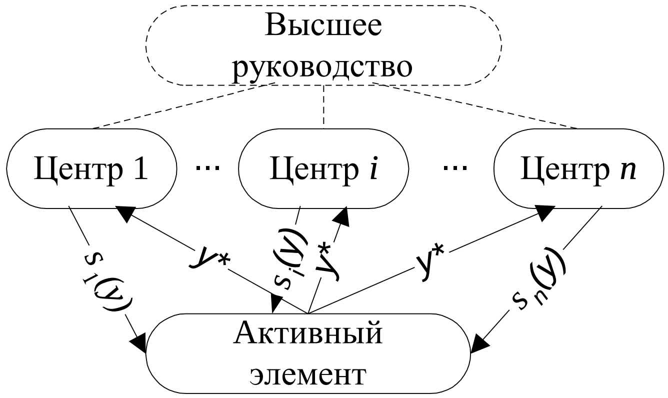

Рис. 2. Модель АС с несколькими центрами

Интересы n центров описываются их функциями полезности
$\Phi_i(y) = H_i(y) - s_i(y)$, $i \in N = \{1,2,...,n\}$,
где $H_i(y)$ – кусочно-непрерывная функция дохода i-го центра от выбора АЭ действия $y \in A = [0,+\infty)^m$, $\sigma_i(y)$ – неотрицательная функция стимулирования АЭ i-м центром в зависимости от выбираемого АЭ действия.

Интересы АЭ представлены функцией полезности $f(y) = \sum_{i \in N} s_i(y) - c(y)$, где $c(y)$ – положительная выпуклая возрастающая по всем компонентам вектора y функция затрат АЭ в зависимости от выбираемого действия y, причем существует непрерывная третья производная $c'''(y)$.

Все центры и АЭ имеют полную информацию о функциях $H_i(y)$ и $c(y)$, а также о множестве A.

Порядок функционирования системы следующий:

1. Центры одновременно сообщают АЭ функции стимулирования $\sigma_i(y)$;
2. Если есть точка, в которой $f(y) \geq 0$, то АЭ выбирает действие $y^* \in \operatorname{Arg}\max_{y \in A} [\sum_{i \in N} s_i(y) - c(y)]$ и несет затраты $c(y^*)$, иначе он отказывается от игры, и все ее участники получают нулевые выигрыши.
3. Центры получают доходы $H_i(y^*)$ и выплачивают АЭ суммы $\sigma_i(y^*)$.

Аксиома 1. Для функций стимулирования центров должно выполняться балансовое ограничение: $s_i(y^*) \le H_i(y^*)$, то есть центры должны иметь достаточно средств, чтобы оплатить АЭ обещанную сумму.

Аксиома 2. Условие «обоснованности угроз», или «условие запрета блефа»,

(1) $s_i(y) \le H_i(y) \quad \forall y \in A, \forall i \in N$,

говорящее о том, что все обещания любого центра не превышают его дохода.

На протяжении всей статьи будем требовать выполнения аксиомы 1. Если потребуется выполнение более сильной аксиомы 2 – будем оговаривать это особо.

Для завершения описания модели необходимо указать, какое действие выберет АЭ, если множество $Y(s) = \mathrm{Arg}\max_{y \in A}[\sum_{i \in N} s_i(y) - c(y)]$, где $s = (s_i(y))_{i \in N}$ – вектор функций стимулирования всех центров, состоит более чем из одной точки, и АЭ должен выбрать одно действие из множества равнозначных для него действий. Для описания процесса выбора АЭ действия из множества «оптимальных» действий Y введем функцию $\Psi(s)$, известную всем центрам, которая каждому вектору функций стимулирования s ставит в соответствие точку из соответствующего множества $Y(s)$.

Аксиома 3. Для функции $\Psi(s)$ выполняется свойство независимости от посторонних альтернатив: для любых векторов стратегий s^1, s^2

$\Psi(s^1) \in Y(s^2) \subset Y(s^2) \Rightarrow \Psi(s^2) = \Psi(s^1)$,

то есть если АЭ выбрал действие $\Psi(s^1)$ из более широкого множества $Y(s^1)$, то и из более узкого множества $Y(s^2)$ он выберет действие $\Psi(s^1)$ (если оно содержится в $Y(s^2)$).

3. ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВА РАВНОВЕСИЙ НЭША ДЛЯ АС С НЕСКОЛЬКИМИ ЦЕНТРАМИ

Задача представляет собой анализ игры центров [4], стратегиями которых является выбор функции стимулирования. Эта игра довольно сложна, так как множество стратегий представляет собой функциональное пространство. Хотелось бы упростить ее, введя ограничения на рассматриваемые функции стимулирования. Ниже в этом разделе доказывается теорема 2 о том, что достаточно рассматривать только функции стимулирования, отличные от нуля не более чем в n точках, что редуцирует стратегию каждого центра до конечномерного вектора. Затем приводится характеризация (с помощью системы неравенств) множества равновесий Нэша редуцированной задачи.

Далее значком «$\mathbf{0}$» обозначается стратегия АЭ, в которой он отказывается от игры. Также для краткости будем обозначать $(s_i(y))_{i \in N} \Rightarrow y^*$ тот факт, что вектор стратегий $(s_i(y))_{i \in N}$ реализует точку y^*, то есть, что

(2) $$y^* = \begin{cases} \Psi(s), \max\limits_y [\sum\limits_{i \in N} s_i(y) - c(y)] \ge 0; \\ \mathbf{0} \quad , \max\limits_y [\sum\limits_{i \in N} s_i(y) - c(y)] < 0. \end{cases}$$

Решением игры будем считать набор e-равновесных по Нэшу ситуаций. Напомним, что e-равновесием Нэша называется такой вектор стратегий $s = (s_i(y))_{i \in N}$, что для любого игрока i и любой его стратегии $s'_i(y)$

(3) $$\Phi_i(\Psi((s'_i(y), s_{-i}(y)))) - \Phi_i(\Psi(s)) \le e,$$

где $s_{-i}(y) = (s_j(y))_{j \in N, j \ne i}$ [2].

Определение e-равновесия Нэша при e=0 переходит в определение равновесия Нэша.

Введем обозначение для всех функций стимулирования, отличных от нуля только в одной точке:

(4) $$P(p, y^*) := \begin{cases} p, y = y^*; \\ 0, y \ne y^*. \end{cases}$$

Лемма 1. Пусть $(s_i(y))_{i\in N}$ – произвольный вектор стратегий центров. Тогда для центра i существует стратегия (функция стимулирования) вида (4), которая при заданной обстановке $s_{-i}(y)=(s_j(y))_{j\in N, j\neq i}$ дает i-му центру тот же выигрыш, что и исходная стратегия $s_i(y)$.

Для доказательства леммы 1 достаточно взять стратегию i-го центра

(5) $\tilde{s}_i(y)=P(s_i(y^*),y^*)$,

где $(s_i(y))_{i\in N}\Rightarrow y^*$. По аксиоме 3 АЭ выберет то же действие, что и при исходном векторе стратегий.

Следствие 1. Для любого центра i при фиксированной обстановке $s_{-i}(y)$ любое достижимое с помощью произвольной стратегии значение его целевой функции Φ_i достижимо с помощью стратегии вида (5).

Теорема 1. Пусть $(s_i(y))_{i\in N}$ – e-равновесие Нэша игры центров, $(s_i(y))_{i\in N}\Rightarrow y_0$ и выигрыш центра i в равновесии равен Φ_i. Тогда центр i может в одиночку изменить свою стратегию на стратегию вида

(6) $\tilde{s}_i(y)=P(s_i(y_0),y_0)+\sum_{j\neq i}P(s_i(y_j),y_j)$,

где y_j находится из условия $(s_j(y)=0,s_{-j}(y))\Rightarrow y_j$, и полученный набор стратегий $(\tilde{s}_i(y),s_{-i}(y))$ будет e-равновесием Нэша, реализующим ту же точку y_0, причем выигрыш всех центров не изменится.

Доказательство теоремы 1 приведено в приложении.

Иначе говоря, для любого e-равновесия Нэша можно найти e-равновесие, реализующее ту же точку, что и исходное, дающее всем центрам те же выигрыши, но в котором функция стимулирования центра i отлична от нуля не более чем в n точках.

Теорема 2. Для произвольного набора чисел y_0, Φ_1, …, Φ_n, такого, что существует e-равновесие Нэша, реализующее действие y_0 и дающее центру i выигрыш Φ_i, $i\in N$, найдется e-равновесие Нэша со стратегиями центров вида (6), реализующее действие y_0, и дающее i-му игроку выигрыш Φ_i.

Доказательство теоремы 2 производится n-кратным применением теоремы 1.

Необходимость рассмотрения e-равновесий Нэша обусловлена тем, что функцию $\Psi(s)$ в некоторых случаях можно определить так, что множество равновесий Нэша (но не множество e-равновесий) будет пусто. В то же время, справедливо следующее замечание:

Замечание 1. Можно положить e=0 и считать e-равновесия, в которых стратегии игроков имеют вид (5) обычными равновесиями Нэша, дополнительно указывая, что АЭ при прочих равных условиях должен выбирать действие y_0. То есть переход к рассмотрению равновесий Нэша требует введения предположения о том, что при прочих равных условиях АЭ выбирает «нужное центрам» действие y_0.

Если равновесные стратегии центров имеют вид (5), то равновесие Нэша можно полностью описать набором n+1 действий y_0, y_1, …, y_n и значениями функций стимулирования всех игроков в n точках (всего n^2+n+1 чисел).

Таким образом, если интересоваться (что достаточно для дальнейшего изложения) только выбираемым АЭ действием y_0 и выигрышами $\{\Phi_i\}_{i\in N}$ всех центров в равновесии, то достаточно рассматривать только равновесия, в которых все игроки используют стратегии вида

(7) $$s_i(y) = P(s_i^0, y_0) + \sum_{j\in N} P(s_i^j, y_j),$$

где $s_i^k \geq 0, s_i^i = 0\ \forall i \in N, k \in \{0\} \cup N$.

Опишем множество равновесий Нэша, в которых стратегии всех центров имеют вид (7).

Введем обозначения:

(8) $$G_i = \max_y \{H_i(y) - c(y)\}, i \in N,$$

выигрыш i-го центра, который он может получить в одиночку (будем считать, что G_i>0, $i \in N$, то есть у каждого из центров достаточно средств, чтобы АЭ не отказался от игры);

(9) $f = \sum_{i \in N} s_i^0 - c(y_0) \geq 0$,

выигрыш АЭ в равновесии.

Теорема 3. Все равновесия Нэша (в смысле Замечания 1), в которых стратегии центров имеют вид (7), можно разбить на два типа: равновесия С-типа («сотрудничество»), в которых $f = 0$ (то есть центры не переплачивают АЭ за выбор нужного им действия y_0), определяемые системой условий

(10) $\sum_{i \in N} s_i^0 = c(y_0)$, $\sum_{i \in N} s_i^j \leq c(y_j) \quad \forall j \in N$,

(11) $0 \leq s_i^0 \leq H_i(y_0) - G_i$;

и равновесия К-типа («конкуренция»), определяемые системой условий

(12) $\sum_{i \in N} s_i^j - c(y_j) = f > 0 \quad \forall j \in \{0\} \cup N$,

(13) $\max[H_i(y_i); G_i - f] \leq H_i(y_0) - s_i^0 \leq H_i(y_0)$,

(14) $0 \leq H_i(y_j) - s_i^j \leq \min[H_i(y_j); H_i(y_0) - s_i^0] \quad \forall i, j \in N$ (первое неравенство в (14) должно выполняться, если требуется выполнение аксиомы 2).

Доказательство теоремы 3 приведено в приложении.

Из доказательства теоремы 3 следует, что условия (10)-(14) являются необходимым и достаточным условием того, что набор стратегий вида (7) является равновесием Нэша.

Для исследования кооперации центров в рассматриваемой задаче потребуется искать равновесия Нэша игры, в которой только два центра. Определим множество равновесий Нэша игры при n=2:

Равновесия С-типа можно записать как

(15) $c(y_0) - H_2(y_0) + G_2 \leq s_1^0 \leq H_1(y_0) - G_1$, $s_2^0 = c(y_0) - s_1^0$.

Эта область не пуста при $G_1 + G_2 \leq \max_{y_0 \in A}[H_1(y_0) + H_2(y_0) - c(y_0)]$.

Множество равновесий К-типа задается условиями

(16) $s_1^0 + s_2^0 - c(y_0) = s_2^1 - c(y_1) = s_1^2 - c(y_2) = f > 0$,

(17) $\max[H_1(y_1), G_1 - f] \leq H_1(y_0) - s_1^0 \leq H_1(y_0)$,

$\max[H_2(y_2), G_2 - f] \leq H_2(y_0) - s_2^0 \leq H_2(y_0)$,

$$(18)\ 0 \le H_1(y_2) - c(y_2) - f \le H_1(y_0) - s_1^0,\ 0 \le H_2(y_1) - c(y_1) - f \le H_2(y_0) - s_2^0.$$

4. КООПЕРАТИВНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЦЕНТРОВ В АС С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ КОНТРОЛЕМ

Для исследования возможностей кооперации центров в рассматриваемой игре построим характеристическую функцию [2] $v(S)$ (далее S обозначает коалицию центров, непустое подмножество N), ставящую в соответствие каждой коалиции суммарный выигрыш, на который могут рассчитывать ее участники, играя совместно. Обычно [2, 6] характеристическая функция определяется как равновесный по Нэшу выигрыш коалиции S в игре с коалицией $N \backslash S$, состоящей из всех остальных игроков. Тогда задача исследования игры состоит в том, чтобы определить, какие коалиции будут образованы, и каким образом доход коалиций будет распределен между их участниками.

Построение функции $v(S)$ можно разбить на следующие этапы:

- Определение целевой функции коалиций S и $N \backslash S$ и множеств их стратегий.
- Построение множества равновесий Нэша получившейся игры двух лиц.
- Выбор одного из равновесий в качестве основы для вычисления характеристической функции.

В данной задаче целевая функция коалиции S запишется как

$$(19)\ \Phi_S(y, (s_i(y))_{i \in S}) = \sum_{i \in S} H_i(y) - \sum_{i \in S} s_i(y) = H_S(y) - s_S(y),$$

где $H_S(y) = \sum_{i \in S} H_i(y),\ s_S(y) = \sum_{i \in S} s_i(y)$.

Соответственно, для коалиции $N \backslash S$

$$(20)\ \Phi_{N \backslash S}(y, (s_i(y))_{i \in N \backslash S}) = H_{N \backslash S}(y) - s_{N \backslash S}(y).$$

Для такой игры двух лиц множество равновесий Нэша описывается условиями (15)-(18). Это множество достаточно обширно и состоит из равновесий двух типов – С и К. Наличие равновесий С-типа может интерпретироваться как возможность совместной работы для центров. Отсутствие равновесий С-типа говорит о принципиальной невозможности кооперации центров. Поэтому в дальнейшем изложении предполагается, что для произвольной коалиции S выполнено неравенство

(21) $G_S + G_{N\backslash S} \le G_N$

и зона С-равновесий не пуста.

Для построения характеристической функции необходимо взять одно из равновесий (или несколько, дающих коалиции S одинаковый выигрыш) за основу, то есть предположить, что центры, присоединяясь к коалиции S и оценивая перспективу совместных действий, рассчитывают именно на этот результат. Механизм выбора того или иного равновесия зависит от условий решаемой прикладной задачи. Рассмотрим некоторые возможные варианты:

1. Одним из общепринятых методов оценки выигрыша является принцип *максимального гарантированного результата* [5], когда в качестве оценки берется наихудший из возможных исходов.

1.1 *Гарантированный результат в игре с разрешенным блефом.* В игре, где блеф разрешен, всегда найдется равновесие К-типа, в котором выигрыш коалиции S $v_{\Gamma 1}(S) = \max[\min\limits_{y \in A} H_S(y);0]$. Это следующее равновесие:

(22)
$$\begin{aligned} &s_S^0 = H_S(y_0) - \max[\min_{y \in A} H_S(y);0], s_{N\backslash S}^0 = H_{N\backslash S}(y_0) - \max[\min_{y \in A} H_{N\backslash S}(y);0],\\ &s_S^{N\backslash S} = f(y_0) + c(y_{N\backslash S}), s_{N\backslash S}^S = f(y_0) + c(y_S),\\ &y_S = \arg\min_{y \in A} H_S(y), y_{N\backslash S} = \arg\min_{y \in A} H_{N\backslash S}(y),\\ &y_0 = \arg\max_{y \in A}[H_S(y_0) + H_{N\backslash S}(y_0) - c(y_0)], \end{aligned}$$

где $f(y_0)$ – выигрыш АЭ в точке y_0.

1.2 *Гарантированный результат в игре с запрещенным блефом.* Из (18) следует, что $f \le \min[H_S(y_{N\backslash S}) - c(y_{N\backslash S}); H_{N\backslash S}(y_S) - c(y_S)]$.

Тогда на основании формулы (17) можно записать условие на Φ_S:

$\Phi_S \ge \max[H_S(y_S); G_S - H_S(y_{N\backslash S}) + c(y_{N\backslash S}); G_S - H_{N\backslash S}(y_S) + c(y_S)]$.

Это выражение достигает минимума при

(23) $G_S = H_S(y_S^*) + H_{N\backslash S}(y_S^*) - c(y_S^*) = H_N(y_S^*) - c(y_S^*)$,

$y_{N\backslash S} = \arg\max\limits_{y \in A}[H_S(y) - c(y)]$, и равно

$v_{\Gamma 2}(S) = \max[G_S - H_{N\setminus S}(y_S^*);0]$,

где y_S^* определяется из уравнения (23).

2. *Равновесия, оптимальные по Парето.* Другим способом сужения множества равновесий Нэша является выделение среди них оптимальных по Парето ситуаций. Действительно, выбираемая точка y_0 в равновесиях вида (7) является, по сути дела, результатом неких «переговоров» между коалициями S и $N\setminus S$. Результаты же переговоров обычно не доминируются по Парето. Оптимальными по Парето будут решения, реализующие действие

(24) $y_N := \mathrm{Arg}\max_y G_N(y) = Arg\max_y [H_S(y) + H_{N\setminus S}(y) - c(y)]$.

2.1 *Гарантированный результат по равновесиям, оптимальным по Парето.* Если область равновесий С-типа не пуста, то есть, справедливо неравенство (21), достаточно рассматривать только равновесия С-типа. Тогда гарантированный результат коалиции S $v_{\Pi 1}(S) = G_S$. К этому же результату приводит и более слабое, чем оптимальность по Парето, ограничение на равновесие, а именно, «условие благожелательности» $f = 0$.

Действительно, из (16) следует, что при реализации одного из равновесий С-типа, наихудшее для коалиции равновесие реализуется при $s_S = H_S(y_0) - G_S$. Тогда гарантированный выигрыш коалиции S будет равен G_S, независимо от реализуемого действия y.

Применимость условия $f = 0$ (при непустой области С-равновесий) обусловлена тем, что для любого равновесия К-типа один из игроков или оба сразу могут изменять свою функцию стимулирования, не уменьшая своего выигрыша, но увеличивая выигрыш противника, до тех пор, пока не будет реализовано одно из равновесий С-типа. Поэтому, при доброжелательности по отношению к противникам, реализация таких равновесий более вероятна.

2.2 *Средний выигрыш по равновесиям, оптимальным по Парето.* Коалиция может более оптимистично оценивать результаты переговоров, рассчитывая не на наихудший их исход, а, например, на среднее значение выигрыша. При непустой области С-равновесий и реализации действия (24) среднее значение выигрыша $v_{СП}(S) = 0.5(G_S + G_N - G_{N \setminus S})$.

Завершая рассмотрение способов построения характеристической функции, отметим, что во всех случаях имеет место $v(N) = G_N$.

Для целей управления особенно важны условия, при которых возможно объединение всех центров в максимальную коалицию N. При этом все они действуют как один игрок с целевой функцией

(25) $\Phi_N(.) = \sum_{i \in N} H_i(y) - \sum_{i \in N} s_i(y)$.

Необходимым условием такого объединения является условие супераддитивности характеристической функции [2], записываемое в виде

(26) $\forall S, T \subseteq N : S \cap T = \varnothing \quad v(S) + v(T) \le v(S \cup T)$.

Можно показать, что, в рамках предположения (21), игра супераддитивна независимо от того, какой из рассмотренных выше способов построения характеристической функции использовался.

Однако при наличии более чем двух центров условие (26) не является достаточным условием образования максимальной коалиции. Необходимым и достаточным является более сильное условие *сбалансированности* [6],

(28) $\sum_{S \subset N} d(S) \cdot v(S) \le v(N) \quad \forall d(S)$,

где $d(S)$ – функция, которая ставит в соответствие каждой коалиции, кроме максимальной, положительное число. Кроме того, $d(S)$ должно являться *сбалансированным покрытием*, то есть $\sum_{S : i \in S} d(S) = 1 \quad \forall i \in N$.

Проверка условия сбалансированности произвольной кооперативной игры сводится к задаче линейного программирования.

Интересным представляется, однако, нахождение просто интерпретируемых достаточных условий сбалансированности игры (то есть, достаточных условий образования коалиции всех центров) при произвольном числе центров.

5. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СБАЛАНСИРОВАННОСТИ ИГРЫ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ЧИСЛЕ ЦЕНТРОВ

Если для построения характеристической функции используется гарантированный результат с разрешенным блефом, то $v(S) = \max[\min_{y\in A} \sum_{i\in S} H_i(y);0]$ для всех коалиций, кроме максимальной коалиции N, для нее $v(N) = G_N$.

Теорема 4: Если, независимо от номера $i \in N$, $\min_{y\in A} H_i(y)$ достигается в одной точке $y_{\min} := \arg\min_{y\in A} H_i(y)$, то игра сбалансирована.

Доказательство теоремы 4 приведено в приложении.

При $v(S) = v_{СП}(S)$ кооперативная игра является игрой с постоянной суммой [2], то есть, $v(S) + v(N \setminus S) = v(N) \quad \forall S \subset N$. Такие игры не сбалансированы [2], если $\sum_{i\in N} v(\{i\}) \neq v(N)$, то есть почти всегда.

Рассмотрим теперь случай $v(S) = v_{ГП}(S) = G_S$. Для начала ограничимся линейными доходами центров $H_i(y) = l_i y$ и скалярным действием $y \in [0,+\infty)$. Приведем несколько вспомогательных результатов:

Лемма 3. Для любого сбалансированного покрытия d и произвольных действительных чисел A_i, $i\in N$, справедливо равенство

(29) $\sum_{S\subset N} d_S \sum_{i\in S} A_i = \sum_{i\in N} A_i$.

Доказательство леммы 3 приведено в приложении**.**

Лемма 4. Если $v(S) = p(\sum_{i\in S} A_i)$, где $A_i \geq 0$ и $p(.)$ – выпуклая функция, причем $p(0) \leq 0$, то игра сбалансирована.

Доказательство леммы 4 приведено в приложении**.**

Теорема 5. Игра, в которой затраты АЭ – произвольная выпуклая по всем компонентам вектора действия функция, а доходы центров – линейные возрастающие по всем компонентам вектора действия функции, сбалансирована.

Доказательство теоремы 5 приведено в приложении.

Следствие 2. Увеличение функции дохода всех центров на константу никак не влияет на полученный результат. Действительно, пусть $H_i(y) = h_i + l_i y$. Тогда, как легко видеть, характеристическая функция $w(S)$ полученной игры равна $w(S) = \sum_{i\in S} h_i + v(S)$ (где $v(S)$ определяется формулой (П15)). Обозначим $u(S) = \sum_{i\in S} h_i$, тогда $w(S) = u(S) + v(S)$.

По свойствам характеристических функций [2], если игры $u(S)$ и $v(S)$ сбалансированы, то сбалансирована и игра $w(S)$. Но, по лемме 3, $u(S)$ сбалансирована, по теореме 5 сбалансирована и $v(S)$.

Теорема 6. Для произвольных вогнутых функций дохода $H_i(y)$ и выпуклых затрат $c(y)$ игра сбалансирована.

Доказательство теоремы 6 приведено в приложении.

Следствие 3. Результат теоремы 5 можно обобщить на еще более широкий класс функций дохода центров, а именно, на все функции дохода, которые можно так аппроксимировать сверху возрастающими линейными функциями, чтобы данные аппроксимирующие функции касалась функций дохода центров в точке y_N (плановая точка максимальной коалиции).

Для $v_{Г2}(S) = \max[G_S - H_{N\setminus S}(y_S^*);0]$ справедлив следующий результат:

Теорема 7. В рамках условий следствия 3, игра $v_{Г2}(S)$ сбалансирована.

Доказательство теоремы 7 приведено в приложении.

Следствие 4. В рамках условий следствия 3, игра $v_{Г1}(S)$ сбалансирована.

Доказательство следствия 4 аналогично доказательству теоремы 7.

Итак, на основании приведенных результатов можно сделать вывод, что для образования максимальной коалиции осторожных игроков (то есть игроков, использующих гарантированный результат для оценки выигрыша) достаточно, чтобы функции их доходов удовлетворяли условиям следствия 3.

Если же игроки более оптимистично настроены на результат переговоров ($v(S) = v_{СП}(S)$), то кооперация им не нужна, так как переговоры между коалициями дают им то же значение выигрыша, что и переговорный процесс внутри коалиции N всех центров.

6. СОГЛАСОВАНИЕ ИНТЕРЕСОВ ЦЕНТРОВ С ИНТЕРЕСАМИ ВЫСШЕГО РУКОВОДСТВА

Итак, в предыдущем разделе были исследованы случаи, когда в матричной структуре управления центрам (например, менеджерам проектов) выгодно объединяться в одну коалицию и совместно выбирать план АЭ. При этом всех центров можно рассматривать как одного игрока с целевой функцией

(30) $\Phi_N(.) = \sum_{i \in N} H_i(y) - c(y)$.

Хорошо это или плохо с точки зрения высшего руководства (ВР), представляющего интересы организации в целом? Для того чтобы ответить на этот вопрос, необходимо определить интересы ВР и методы его воздействия на функционирование системы.

Предположим, что цели ВР заключаются в увеличении, насколько это возможно, дохода всех проектов и в уменьшении затрат по эти проектам. Простейшим способом представления таких интересов является линейная свертка с неотрицательными весами a_i всех подцелей в единый критерий:

(31) $F(y) = \sum_{i \in N} a_i H_i(y) - c(y)$.

Таким образом, при $a_i \neq 1$ наблюдается рассогласование интересов ВР и менеджеров проектов, которые реализуют не то действие, которое необходимо ВР. Следовательно, ВР должно воздействовать каким-то образом на руководство среднего звена с тем, чтобы приблизить реализуемое действие y к требуемому.

Методов воздействия на функционирование системы у ВР может быть много, но в рамках данной статьи рассмотрим лишь один из них – внутрифирменное «налогообложение», когда устанавливается ставка b_i отчислений в пользу ВР с доходов $H_i(.)$ или ставка g_i отчислений с прибыли $H_i(.) - s_i(.)$

по проекту i. Как будет показано ниже, для согласования интересов достаточно единой ставки $g \in [0; g_{\max}]$ налога с прибыли, поэтому рассматривается только этот случай.

С учетом единой ставки налога с прибыли и дифференцированной ставки подоходного налога, целевые функции ВР и коалиции из всех центров среднего звена можно записать соответственно как

(32) $F(y) = g[\sum_{i \in N} a_i b_i H_i(y) - a_0 c(y)]$ и $\Phi(y) = (1-g)[\sum_{i \in N}(1-b_i)H_i(y) - c(y)]$.

Для согласования интересов ВР и менеджеров достаточно, чтобы их целевые функции достигали максимума в одной точке. Из (32) следует, что это условие выполнено при $a_i b_i / a_0 = 1 - b_i$, то есть, при ставках подоходного налога $b_i = \frac{1}{1 + a_i / a_0}$. ВР заинтересовано в увеличении своей доли прибыли, поэтому $g = g_{\max}$. При такой системе налогообложения достигается полное согласование интересов ВР и менеджеров. Так, например, если $a_i = 1$, ставка подоходного налога должна быть равна 0.5.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследована характерная для матричных структур управления модель стимулирования одного АЭ несколькими центрами. Для этой задачи найдено множество равновесий Нэша. Предложены несколько способов определения характеристической функции игры центров с целью построения кооперативной игры и исследования возможностей образования коалиций центров:

1. Гарантированный выигрыш по равновесиям Нэша для игры с блефом;
2. Гарантированный выигрыш по равновесиям Нэша для игры без блефа;
3. Гарантированный выигрыш среди Парето-оптимальных равновесий Нэша;
4. Средний выигрыш среди оптимальных по Парето равновесий Нэша.

Для всех, кроме последнего, способов построения характеристической функции доказаны достаточные условия реализуемости коалиции всех центров (менеджеров среднего звена управления), что описывает условия, когда возможно согласование интересов менеджеров среднего звена управления. Для четвертого способа показано, что полная кооперация невозможна.

Также в работе поставлена и (с помощью системы внутреннего «налогообложения») решена задача согласования интересов высшего руководства и среднего звена управления.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Очевидно, что $(\tilde{s}_i(y), s_{-i}(y))$ реализует точку y_0. Действительно, выигрыш АЭ в точках y_i ($i \in \{0\} \cup N$) остался прежним, во всех же прочих точках не увеличился, то есть, по аксиоме 3 действие y_0 останется выбором АЭ. Выигрыш всех центров не изменился, так как значение их стимулирования в точке y_0 не изменилось. Необходимо теперь доказать, что новый вектор стратегий будет e-равновесием Нэша. Для этого нужно показать, что стратегии центров являются наилучшими (с точностью до e) ответами на новую обстановку.

Стратегия $s_i(y)$ центра i была одним из наилучших (с точностью до e) ответов на обстановку $s_{-i}(y)$ (так как исходный вектор стратегий был e-равновесием Нэша). Его выигрыш при использовании стратегии (5) не изменился, то есть эта стратегия является наилучшим с точностью до e ответом на ту же обстановку $s_{-i}(y)$.

Рассмотрим теперь произвольный центр k ($k \neq i$). По следствию 1 при фиксированной обстановке $s_{-k}(y)$ все значения его целевой функции достигаются на множестве его стратегий вида (5), кроме того, одним из его e-наилучших ответов является функция $P(s_k(y_0), y_0)$ (так как исходный вектор стратегий является e-равновесием Нэша). Поскольку функция стимулирования (5) i-го центра уменьшилась по сравнению со своим исходным значением во всех точках, кроме y_j ($j \in \{0\} \cup N$), а стратегии остальных центров не изменились, то и в новой ситуации центру k выгодна реализация действия y_0.

В то же время, в новой ситуации k-ый центр не может уменьшить значение своей функции стимулирования в точке y_0. Действительно, в исходной ситуации выбор k-м центром стратегии $P(s'_k, y_0)$, где $s'_k < s_k(y_0)$ приводит к реализации точки y_k, то есть, равнозначен выбору стратегии $s_k(y) = 0$. В новой ситуации значение целевой функции АЭ в точке y_k не изменилось (так как не изменилось суммарное стимулирование в этой точке). Значит, при уменьшении k-м центром значения своего стимулирования в точке y_0 АЭ выберет действие y_k, что приносит k-му центру меньший выигрыш, что следует из того, что $s_k(y) = 0$ не являлась наилучшим ответом в исходной ситуации. Следовательно, $(\tilde{s}_i(y), s_{-i}(y))$ является e-равновесием Нэша.

Доказательство теоремы 3. Введем обозначения:

(П1) $f_{-i}^j = \sum\limits_{k \in N \setminus \{i\}} s_k^j - c(y_j)$ – значение целевой функции АЭ в точке y_j: $j \in N \cup \{0\}$, при условии, что $s_i(y_j) = 0$.

(П2) $f_{-i} = \max[\max\limits_{j \in N \cup \{0\}} f_{-i}^j; 0]$ – значение целевой функции, которое i-й центр должен обеспечить АЭ в некоторой точке y при фиксированных стратегиях других центров для того, чтобы АЭ выбрал действие y.

Набор стратегий $s_i(y)$ вида (7) будет равновесием Нэша, реализующим точку y_0 в смысле Замечания 1, если стратегия каждого центра будет наилучшим ответом на стратегии остальных центров [2]. Для стратегий игроков вида (7) неравенство (3) можно записать в виде условий (П3)-(П6):

(П3) $s_i^0 = f_{-i} - f_{-i}^0$ – условие наименьших затрат при реализации действия y_0. Это же условие обеспечивает выгодность для АЭ участия в игре.

(П4) $H_i(y_0) + f_{-i}^0 \geq H_i(y_j) + f_{-i}^j \quad \forall j \in N$,

(П5) $H_i(y_0) + f_{-i}^0 \geq H_i(y) - c(y) \quad \forall y \in A$

– условия выгодности реализации точки y_0 для i-го центра, как в точках y_j, так и во всех прочих.

(П6) $0 \le s_i^j \le H_i(y_j)$ – балансовое ограничение (если требуется выполнение аксиомы 2, то это неравенство должно выполняться для всех $j \in N \cup \{0\}$, в противном случае – только для j=0).

Так как (П5) должно выполняться для всех y, его можно записать как $H_i(y_0) - s_i^0 \ge G_i$ (см. определение G_i, формула (8)).

Из формул (9), (П3) следует, что, так как $s_i^0 + f_{-i}^0 = f$, то $f_{-i} = f \quad \forall i \in N$.

Предположим, что f=0 (равновесия С-типа). Тогда из (9) следует, что

(П7) $\sum_{i \in N} s_i^0 = c(y_0)$, то есть, доказано условие (10).

Формулы (П5), (П6) можно записать в виде

(П8) $0 \le s_i^0 \le H_i(y_0) - G_i$, положив s_i^j при $j \ne 0$ равными нулю, так как они не влияют на выигрыши центров в равновесии. Доказано условие (11).

Пусть теперь f>0 (равновесие К-типа). Тогда (П3) преобразуется к виду

(П9) $f = f_{-i} = \max_{j \in N} f_{-i}^j = \max_{j \in N}[\sum_{k \in N} s_k^j - c(y_j) - s_i^j] \; \forall i \in N$.

Для дальнейшего доказательства требуется дополнительный результат:

Лемма 2. Из формулы (П9) следует, что

(П10) $f = \sum_{k \in N} s_k^j - c(y_j) \quad \forall j \in N \cup \{0\}$, а не только для j=0, как следует из (9).

Доказательство леммы 2. Обозначим $j(j) = \sum_{k \in N} s_k^j - c(y_j)$. Надо доказать, что $j(j) = f \; \forall j \in N$. Предположим, что $\exists j^* : j(j^*) = \max_{j \in N} j(j) > f$.

Возьмем $i^* = j^*$, тогда, так как $s_{i^*}^{i^*} = 0$, $\max_{j \in N}[j(j) - s_{i^*}^j] = j(j^*) > f$. Но, по формуле (П9), $\max_{j \in N}[j(j) - s_i^j] = f \; \forall i$. Таким образом, $\max_{j \in N} j(j) = f$.

Пусть теперь $\exists j^{**} : j(j^{**}) = \min_{j \in N} j(j) < f$. Тогда, из формулы (П9) для $i^{**} = j^{**}$, следует, что найдется такой j, что $j(j^{**}) < j(j) - s_{i^{**}}^j = f$. Но, так как $\max_{j \in N} j(j) = f$, следовательно $j(j) - s_{i^{**}}^j < j(j^{**}) = f$. Получили противоречие, следовательно, лемма 2 доказана. Вернемся к доказательству теоремы 2.

Из (П10) следует, что

$$f-[\sum_{k\in N\setminus\{i\}} s_k^j - c(y_j)] = f - f_{-i}^j = s_i^j \quad \forall i\in N,\, j\in N\cup\{0\}.$$

Тогда (П4) можно переписать в виде

(П11) $H_i(y_0)-s_i^0 \ge H_i(y_j)-s_i^j \quad \forall i, j\in N$, что в совокупности с требованием неотрицательности s_i^j доказывает условие (14). Так как $s_i^i=0$, можно написать, что $H_i(y_0)-s_i^0 \ge H_i(y_i) \quad \forall i\in N$, В сочетании с (П5) это утверждение доказывает условие (13).

Доказательство теоремы 4. В условиях теоремы $v(S)=\max[\sum_{i\in S} H_i(y_{\min});0]$.

Игра сбалансирована, если выполнено условие (26), то есть, если

(П12) $\sum_{S\subset N} d(S)\cdot \max[\sum_{i\in S} H_i(y_{\min});0] \le G_N \quad \forall d(S)$.

Преобразовуем левую часть этого неравенства:

$$\sum_{S\subset N} d(S)\cdot \max[\sum_{i\in S} H_i(y_{\min});0] = \sum_{\substack{S\subset N,\\ \sum_{j\in S} H_j(y_{\min})>0}} d(S)\cdot \sum_{i\in S} H_i(y_{\min}) =$$

$$= \sum_{i\in N} H_i(y_{\min}) \sum_{\substack{S:i\in S,\\ \sum_{j\in S} H_j(y_{\min})>0}} d(S) \le \sum_{\substack{i\in N,\\ H_i(y_{\min})>0}} H_i(y_{\min}) \sum_{S:i\in S} d(S) = \sum_{i\in N} \max[H_i(y_{\min}),0] \sum_{S:i\in S} d(S).$$

Но $\sum_{S:i\in S} d(S)=1$ для всех i, так как $d(S)$ – сбалансированное покрытие, то есть, условие (П12) выполнено, если справедливо неравенство

(П13) $\sum_{i\in N} \max[H_i(y_{\min}),0] \le G_N$.

Из (22) следует, что

(П14) $\max[\min_{y\in A} \sum_{i\in S} H_i(y),0] + \max[\min_{y\in A} \sum_{i\in N\setminus S} H_i(y),0] \le G_N \quad \forall S\subset N$.

Пусть $\min_{y\in A} \sum_{i\in S} H_i(y) > 0 \quad \forall i\in N$. Тогда из (П14) следует, что

$G_N \ge \min_{y\in A} \sum_{i\in S} H_i(y) + \min_{y\in A} \sum_{i\in N\setminus S} H_i(y) \ge \sum_{i\in N} \min_{y\in A} H_i(y)$, то есть (П13) верно.

Предположим теперь, что $\exists i\in N: \min_{y\in A} \sum_{i\in S} H_i(y) < 0$. Рассмотрим коалицию $S=\{i\in N: H_i(y_{\min})>0\}$. Формула (П14) для S преобразуется к виду

$\sum_{i\in S} H_i(y_{\min}) \le G_N$, то есть, $\sum_{i\in N} \max[H_i(y_{\min}),0] \le G_N$, следовательно, неравенство (П13) верно.

Доказательство леммы 3. Порядок суммирования в (29) можно изменить, суммируя сначала по коалициям, содержащим некоторого игрока i, а затем по всем игрокам из N.

$$\sum_{S\subset N} d_S \sum_{i\in S} A_i = \sum_{i\in N} \sum_{S:i\in T} d_S A_i = \sum_{i\in N} A_i \sum_{S:i\in S} d_S$$

По определению сбалансированного покрытия $\sum_{S:i\in S} d_S = 1$ для всех i.

Следовательно, $\sum_{S\subset N} d_S \sum_{i\in S} A_i = \sum_{i\in N} A_i \sum_{S:i\in S} d_S = \sum_{i\in N} A_i$.

Доказательство леммы 4. Так как $p(.)$ выпукла, то, по определению выпуклой функции, для любого $0 \le x_1 \le x_2$ справедливо неравенство $p(x_1) \le p(0) + \frac{p(x_2) - p(0)}{x_2} x_1$. Если вдобавок $p(0)\le 0$, то $p(x_1) \le \frac{p(x_2)}{x_2} x_1$

Игра сбалансирована, если для произвольного сбалансированного покрытия выполняется неравенство $\sum_{S\subset N} d_S\, p(\sum_{i\in S} A_i) \le p(\sum_{i\in N} A_i)$. Положим $x_1 = \sum_{i\in S} A_i$, $x_2 = \sum_{i\in N} A_i$ и увеличим левую часть неравенства по приведенному выше свойству выпуклых функций: $\sum_{S\subset N} d_S\, p(\sum_{i\in S} A_i) \le \frac{p(\sum_{i\in N} A_i)}{\sum_{i\in N} A_i} \sum_{S\subset N} d_S \sum_{i\in S} A_i$. По лемме 3 $\sum_{S\subset N} d_S \sum_{i\in S} A_i = \sum_{i\in N} A_i$, а значит $\sum_{S\subset N} d_S\, p(\sum_{i\in S} A_i) \le p(\sum_{i\in N} A_i)$.

Доказательство теоремы 5. Проведем доказательство для m=1 (оно справедливо с минимальными изменениями и при m>1). Функция $G_S(y) = \sum_{i\in S} H_i(y) - c(y) = l_S y - c(y)$, где $l_S = \sum_{i\in S} l_i$, достигает максимума, равного G_S, в точке y_S, определяемой условием $c'(y_S) = l_S$, то есть $y_S(l_S) = [c']^{-1}(l_S)$.

При фиксированной функции затрат характеристическая функция произвольной коалиции S зависит только от l_S, то есть

(П15) $v(S) = p(l_S) := l_S[c']^{-1}(l_S) - c([c']^{-1}(l_S))$.

$p(0) = -c([c']^{-1}(0)) \le 0$. Если вдобавок функция $p(.)$ выпукла по l, то, по лемме 4, игра сбалансирована. Условием выпуклости гладкой функции является неотрицательность ее второй производной. Функцию $p(.)$ можно записать в виде сложной функции: $p(l) = g(y(l)) = c'[y(l)]y(l) - c[y(l)]$, где $y(l) = [c']^{-1}(l)$.

тогда $p''(l) = g''(y(l))[y'(l)]^2 + g'(y(l))y''(l)$. Дифференцируя $g(.)$ по y, имеем $g'(y) = c''(y)y$, $g''(y) = c'''(y)y + c''(y)$. Дифференцируя $y(.)$ по l, имеем также $y'(l) = \dfrac{1}{c''(y(l))}$, $y''(l) = \dfrac{c'''(y(l))}{c''(y(l))^3}$.

Подставляя полученные функции в выражение для p'', имеем:

$$p''(l) = \{c'''[y(l)]y(l) + c''[y(l)]\}\frac{1}{c''[y(l)]^2} - c''[y(l)]y(l)\frac{c'''[y(l)}{c''[y(l)]^3} =$$

$$\frac{c''[y(l)]}{c''[y(l)]^2} = \frac{1}{c''[y(l)]} \ge 0$$

То есть, $p(l)$ выпукла, если $c''[y(l)] \ge 0$ для всех l, то есть затраты АЭ выпуклы.

Доказательство теоремы 6. Для рассматриваемой игры характеристическая функция $v(S) = \max\limits_y[\sum\limits_{i\in S} H_i(y) - c(y)]$. Введем в рассмотрение игру с характеристической функцией $\tilde{v}(S) = \max\limits_y[\sum\limits_{i\in S}\{H_i(y_N) - H_i'(y_N)y_N + H_i'(y_N)y\} - c(y)]$, где y_N находится из решения уравнения $\sum\limits_{i\in N} H_i'(y_N) = c'(y_N)$. Так как мы только увеличили функции под знаком максимума, очевидно, что $v(S) \le \tilde{v}(S)$.

Кроме того, для S=N эти функции достигают максимума в одной точке и их значения равны между собой, то есть $v(N) = \tilde{v}(N)$. По известному свойству характеристических функций [2], из сбалансированности игры $\tilde{v}(S)$ следует сбалансированность игры $v(S)$. Но из следствия 2 следует, что игра $\tilde{v}(S)$ сбалансирована. Значит, сбалансирована и игра $v(S)$.

Доказательство теоремы 7. $v_{Г2}(S) \le v_{ГП}(S) = G_S$ $\forall S \subset N$, так как в случае $v_{Г2}(S)$ шире множество, по которому вычисляется гарантированный результат (все равновесия Нэша, а не только оптимальные по Парето). $v_{Г2}(N) = G_N$. Значит, аналогично доказательству теоремы 6, из сбалансированности игры $v(S) = G_S$ следует сбалансированность игры $v_{Г2}(S)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бушуев С.Д., Морозов В.В. Динамическое лидерство в управлении проектами: Монография / Укр. асс. упр-я проектами. К., 1999.
2. Оуэн Г. Теория игр. М.: Мир, 1971.
3. Новиков Д.А., Петраков С.Н. Курс теории активных систем. М.: СИНТЕГ, 1999.
4. Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы функционирования организационных систем с распределенным контролем. М.: ИПУ РАН, 2001. – 118 с.
5. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.
6. Бондарева О.Н. Некоторые применения методов линейного программирования к теории кооперативных игр. // Проблемы кибернетики. Вып. 10. М.: Физматгиз, 1963. – с. 119-140.