# ОПТИМАЛЬНАЯ СТРУКТУРА СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ СВЯЗЯМИ

**М.В. Губко, С.П. Мишин**

*Институт проблем управления (РАН), Волгоградский Государственный Университет*

*Тел: (095)334-90-51 E-mail:mgoubko@mail.ru*
*Тел: (8442)43-13-02, 32-97-09 E-mail:smishin@newmail.ru; mishin@as.ru*

**Ключевые слова:** оптимизация иерархических структур, функционал, технологический граф, структура системы управления.

**Абстракт.** Рассматривается проблема выбора структуры системы управления технологическими связями предприятия. Задача формулируется в виде задачи построения иерархической системы управления с минимальными затратами на ее содержание. Эта постановка сводится к общей задаче построения оптимальной иерархии [4]. Приводятся условия, при которых оптимальной структурой системы управления являются двоичное дерево, веерная структура с одним центром. При нарушении условий на качественном уровне обсуждается вид системы управления, предлагается эвристический алгоритм решения. Приводятся ссылки на численные алгоритмы построения оптимальной организации в общем случае.

## 1. Введение

В работах [1-4] задача построения оптимальной иерархической структуры (в том числе, и структуры системы управления) была сформулирована, как задача выбора ориентированного ацикличного графа минимальной стоимости из множества допустимых графов. Были доказаны результаты общего характера относительно вида оптимальной иерархии при некоторых ограничениях на функционал стоимости иерархии и множество допустимых иерархий.

Актуальным в настоящее время является сведение известных задач построения иерархий к общей постановке [4] и использование имеющихся результатов для решения этих задач.

В данном докладе формулируется задача построения оптимальной системы управления технологическими связями и показывается, что она является частным случаем задачи построения оптимальной иерархии со структурным функционалом стоимости, который исследован в [1-4].

## 2. Постановка задачи

Как отмечается в различных работах [5, 6], структура производственных потоков в наибольшей степени определяет организационную структуру. В связи с этим интересной представляется задача надстройки управляющего графа организации над множеством элементов, связанных технологическими взаимодействиями. Формально эту задачу можно поставить следующим образом.

Технологическим графом над множеством элементов $N$ назовем ориентированный граф без петель $T = < N, E_T >$, ребрам которого $(u,v) \in E_T$ сопоставлены $r$-мерные вектора $l_T(u,v)$ с неотрицательными компонентами: $l_T : E_T \to R_+^r$. Вершины данного графа – это элементарные операции технологического процесса предприятия или конечные исполнители. Связь $(u,v) \in E_T$ в технологическом графе означает, что от элемента $u$ к элементу $v$ идет $r$-компонентный поток сырья, материалов, энергии, информации и т.п. Интенсивность каждой компоненты потока и определяется компонентами вектора $l_T(u,v)$.

Простой пример технологического графа с двухкомпонентными потоками (первая компонента – документы, вторая – «устная информация») приведен на рис. 1.

Вершины данного графа можно рассматривать и как рабочие места, и как операции.

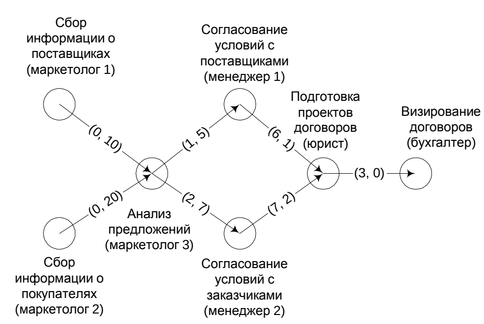


Рис. 1. Технологический граф процесса подписания договоров в производственной фирме.

Часто при организации подобных технологических процессов ограничиваются тем, что назначают ответственных за выполнение той или иной операции. Однако для нормального функционирования системы этого недостаточно, так как технологические связи между операциями (исполнителями) не контролируются.

Таким образом, необходимо создание структуры (системы управления технологическими связями), которая бы контролировала потоки между отдельными элементами технологического графа. Для краткости будем называть такую структуру *организацией*.

Если «расположить» технологический граф в горизонтальной плоскости (см. рис. 2), то создание организации можно сформулировать как задачу надстройки над технологическим графом дерева, узлами которого будут менеджеры-контролеры.

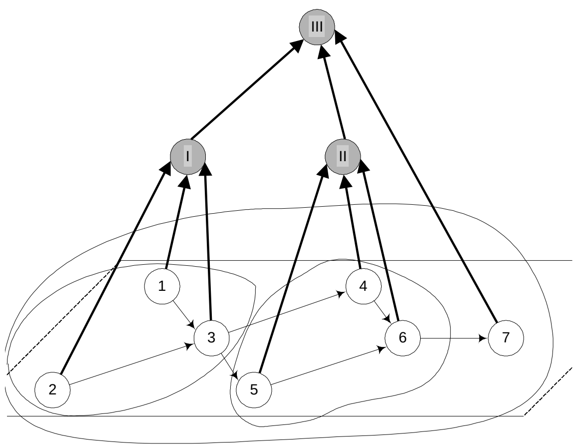


Рис. 2. Пример структуры системы управления технологическими связями.

На рис. 2 изображена система управления из элементов технологического графа 1-7 и трех дополнительных узлов (I, II, III). Подчиненными узла I являются все маркетологи (элементы 1–3 технологического графа), подчиненными узла II – менеджеры и юрист (элементы 4–6), в подчинении узла III – узлы I, II и бухгалтер (узел 7).

Введем понятие *группы, контролируемой узлом графа организации*. Группой узла $v$ графа организации назовем подмножество элементов из $N$, из которых в графе организации есть путь в узел $v$.

Например, группа узла I состоит из элементов $\{1, 2, 3\}$, узла II – $\{4, 5, 6\}$, группа узла III совпадает со всем множеством $N$ (на рис. 2 группы узлов графа организации обведены). Группы в узлах 1-7 состоят из одного элемента – самого этого узла.

Для произвольного узла $v$ графа организации обозначим $Q(v)$ – множество узлов, непосредственно подчиненных ему в графе организации.

Легко проверить, что группа в узле $v$ графа организации является объединением групп в узлах, непосредственно подчиненных узлу $v$:

$$g(v) = \bigcup_{v' \in Q(v)} g(v') . \qquad (1)$$

Будем считать, что узел графа организации имеет возможность контролировать только потоки между элементами своей группы.

Суммарный поток $l_T(g)$ между элементами произвольной группы $g$ определяется по формуле

$$l_T(g) = \sum_{\substack{u,v \in N, \\ (u,v) \in E_T}} l_T(u,v) .$$

Узел $v$ графа организации должен контролировать поток $L_T(v) = l_T(g(v)) - l_T(g(v_1)) - ... - l_T(g(v_k))$, где $g(v)$ – группа в узле $v$, а $g(v_1),..., g(v_k)$ – группы в узлах $\{v_1,..., v_k\} = Q(v)$.

Действительно, общий поток внутри группы равен $l_T(g)$, а потоки $l_T(g(v_1)),..., l_T(g(v_k))$ уже контролируются подчиненными узла $v$.

В результате построения графа организации для каждой связи технологического графа должен быть назначен ответственный, контролирующий данную связь. Если технологический граф $T$ связный, то для того, чтобы каждая его связь кем-то контролировалась, необходимо наличие в графе организации узла, группа в котором совпадает со всем множеством исполнителей $N$.

Содержание каждого из узлов графа организации связано с определенными затратами. Будем считать, что затраты на содержание узла $v$ зависят от потока $L_T(v)$ и описываются функцией $K(L_T(v)) \ge 0$ .

Тогда стоимость $P(G)$ графа организации $G = < V, E >$ (где $V$ – множество управляющих узлов графа организации, а $E$ – множество дуг, определяющих взаимную подчиненность узлов) равна сумме стоимостей его узлов:

$$P(G) = \sum_{v \in V} K(L_T(v)) . \qquad (2)$$

Таким образом, задачу определения структуры оптимальной системы управления технологическими связями в терминах работы [4] можно сформулировать как задачу поиска оптимального дерева организации одной группы $N$ на множестве исполнителей $N$ с функционалом стоимости узла, заданным формулой (2).

В [4] вводится понятие структурного функционала стоимости узла графа организации: функционал является *структурным*, если его значение для любого узла $v$ зависит только от групп в узлах множества $Q(v)$: $P(v) = P(g(v_1),..., g(v_k)), \{v_1,..., v_k\} = Q(v)$.

Легко проверить, что функционал (2) структурен. Следовательно, для поиска графа организации минимальной стоимости можно воспользоваться результатами, полученными для структурных функционалов в работах [1-4].

## 2. Выпуклые и вогнутые функционалы стоимости узла

Структурный функционал стоимости узла называется *выпуклым на наборах попарно непересекающихся групп* [4], если для любого набора попарно непересекающихся групп $\{g_1, …, g_k\}$, $k \ge 3$ найдется такое разбиение этого набора на два поднабора $\{h_1,…, h_m\}$ и $\{f_{m+1},…,f_k\}$, что

$$P(h_1,..., h_m) + P(h, f_{m+1},..., f_k) \le P(g_1,..., g_k) , \qquad (3)$$

где $h = h_1 \cup h_2 \cup ... \cup h_m$ .

Если же для любого разбиения выполнено

$$P(h_1,..., h_m) + P(h, f_{m+1},..., f_k) \ge P(g_1,..., g_k) , \qquad (4)$$

то функционал называется *вогнутым на наборах попарно непересекающихся групп* [4].

В [4] показано, что при выпуклом функционале стоимости узла оптимальную организацию одной группы можно искать в классе двоичных деревьев, в которых каждый узел имеет не более двух подчиненных узлов (см. рис. 3), а при вогнутом функционале оптимальна веерная организация, в которой все элементы непосредственно подчинены единственному начальнику (см. рис. 4).

Двоичное дерево содержит наибольшее число управляющих узлов, равное $|N| - 1$, веерная организация – наименьшее (один управляющий узел).

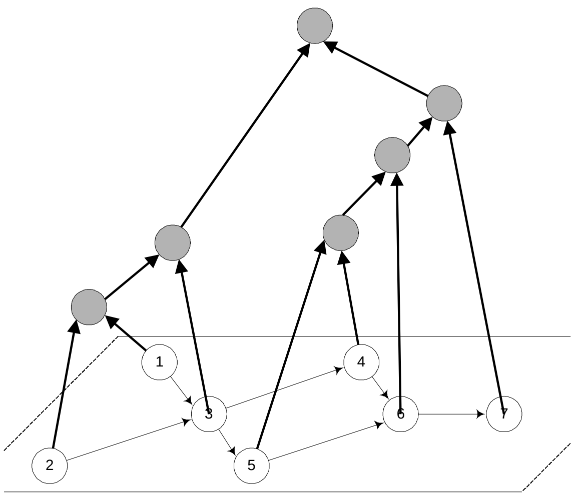


Рис. 3. Пример двоичного дерева системы управления технологическими связями.

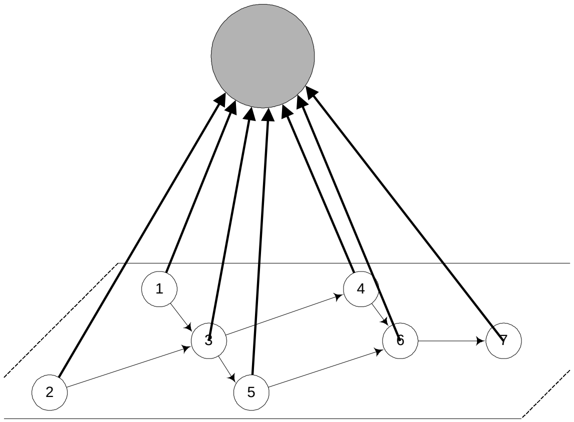


Рис. 4. Веерная организация системы управления технологическими связями.

**Лемма.** Если для любых векторов $l', l'' \in R_+^r$ выполнено $K(l' + l'') \geq K(l') + K(l'')$, то для любого технологического графа $T$ функционал (2) выпуклый на наборах непересекающихся групп, а если $K(l' + l'') \leq K(l') + K(l'')$ – вогнутый.

**Доказательство.** Пусть $\{g_1, \mathbf{K}, g_k\}$ – произвольный набор непересекающихся групп, $k \geq 3$. Рассмотрим его произвольное разбиение на поднаборы $\{h_1, \mathbf{K}, h_m\}$, $\{f_{m+1}, \mathbf{K}, f_k\}$, $1 < m < k$.

Рассмотрим векторы

$L = l_T(g) - l_T(g_1) - \mathbf{K} - l_T(g_k)$,

$L' = l_T(h) - l_T(h_1) - \mathbf{K} - l_T(h_m)$,

$L'' = l_T(g) - l_T(h) - l_T(f_{m+1}) - \mathbf{K} - l_T(f_k)$,

где $g = g_1 \mathbf{U} \mathbf{K} \mathbf{U} g_k$, $h = h_1 \mathbf{U} \mathbf{K} \mathbf{U} h_m$.

Легко проверить, что $L' + L'' = L$.

Поскольку

$P(g_1, \mathbf{K}, g_k) = K(L)$,

$P(h_1, \mathbf{K}, h_m) = K(L')$,

$P(h, f_{m+1}, \mathbf{K}, f_k) = K(L'')$,

то при $K(L' + L'') \geq K(L') + K(L'')$ выполнено неравенство (3), а при $K(L' + L'') \leq K(L') + K(L'')$ – неравенство (4). •

Если функция $K(L)$ зависит только от линейной комбинации компонент вектора $L = (L^1, ..., L^r)$, то есть имеет вид $K(L) = K'(a_1 L^1 + ... + a_r L^r)$, и выполнено $K'(0) = 0$, то для того, чтобы функционал (2) был вогнутым, достаточно вогнутости функции $K'(\cdot)$, а чтобы функционал (2) был выпуклым – выпуклости функции $K'(\cdot)$.

Подведем итоги. Так как веерная организация единственна, то при $K(l' + l'') \leq K(l') + K(l'')$ задача построения оптимальной системы управления технологическими потоками полностью решена. Если $K(l' + l'') \geq K(l') + K(l'')$, то при поиске оптимальной организации достаточно ограничиться классом двоичных деревьев. Алгоритмы поиска оптимальных двоичных деревьев описаны в [3], там же приведены точные и эвристические алгоритмы поиска оптимальных деревьев произвольного вида, которые позволяют решать задачу для любой функции $K(\cdot)$.

## 3. Ненулевые «начальные» затраты: $K(\bar{0}) > 0$.

Практически важным представляется исследование случая, когда выпуклая функция $K(.)$ принимает в нуле положительное значение. Величину $K(\bar{0})$ можно рассматривать как начальные затраты по содержанию узла при нулевом контролируемом потоке. В этом случае неравенство $K(l' + l'') \geq K(l') + K(l'')$ может не выполняться, следовательно двоичные деревья могут не быть оптимальными. Рассмотрим этот случай, предполагая что функция $K(\cdot)$ зависит от линейной комбинации компонент: $K(L) = K'(a_1 L^1 + ... + a_r L^r)$, где $K'(\cdot)$ – выпуклая функция, $K'(0) > 0$.

Пусть построен некоторый граф организации $G$: определены узлы $v_1, \ldots, v_n$, управляющие группами $g_1, \ldots, g_n$ и контролирующие потоки $L_1, \ldots, L_n$.

Стоимость такой организации равна

$$P(G) = \sum_{i=1}^{n} K(L_i).$$

Обозначим $L_T = \sum_{(u,v) \in T} l_T(u, v)$ сумму всех потоков технологического графа $T$. Для произвольной организации $G$ выполнено равенство $\sum_{i=1}^{n} L_i = L_T$.

Временно допустим, что после построения графа мы можем произвольно перераспределять потоки между его узлами для уменьшения загруженности одних узлов и увеличения загруженности других. Тогда при заданном наборе узлов $v_1, \ldots, v_n$ для определения их загруженности $L_1^{'},...,L_n^{'}$, приводящей к минимальной стоимости системы управления, необходимо решить задачу:

$$(L_1^{'},...,L_n^{'}) = \arg \min_{L_1,...,L_n} [\sum_{i=1}^{n} K(L_i)] \qquad (5)$$

с учетом условия $\sum_{i=1}^{n} L_i = L_T$.

Так как функция $K(L)$ выпукла и зависит от линейной комбинации компонент потока $L$, то решение данной задачи – вектора $L_1^{'} = ... = L_n^{'} = L_T / n$.

Стоимость организации при такой загруженности узлов равна $n \cdot K(L_T / n)$, и это минимальная стоимость организации суммарного потока $L_T$ с $n$ управляющими узлами.

Однако произвольное перераспределение загруженности между управляющими узлами невозможно – можно только изменить граф организации, передав часть подчиненных одного узла другому. Вместе с передачей подчиненных произойдет и перераспределение потоков.

Таким образом, если в некотором графе организации возможна передача подчиненных от более загруженного узла $v_1$ менее загруженному узлу $v_2$, сглаживающая разницу в контролируемых ими потоках, то такой граф не является оптимальным.

Например, возьмем узел $v$ графа организации и два подчиненных ему узла $v', v'' \in Q(v)$. Изменим граф организации, передав узел $v''$ в подчинение узлу $v'$. Если при этом сумма стоимостей узлов $v$ и $v'$ $K(L_T(v)) + K(L_T(v'))$ в новом графе будет меньше, чем сумма их стоимостей в старом, то и общая стоимость нового графа уменьшилась по сравнению со старым, так как стоимости остальных узлов не изменились.

Возможны и ситуации, когда стоимость организации будет уменьшаться при передаче подчиненного узла в обратном направлении.

В силу зависимости функции $K(.)$ от линейной комбинации компонент, можно $r$-компонентные потоки $l_T(u,v) = (l_T(u,v)^1,...,l_T(u,v)^r)$ заменить на однокомпонентные потоки $l_T^{'}(u,v)$:

$$l_T^{'}(u,v) = a_1 l_T(u,v)^1 + ... + a_r l_T(u,v)^r .$$

После этого для однокомпонентных потоков и выпуклой функции $K'(\cdot)$ можно предложить следующий эвристический алгоритм для построения дерева, стоимость которого в некотором смысле будет близка к минимальной.

1. Найдем примерное количество узлов в дереве организации $n^* = \arg \min_{n=1,|N|-1} n \cdot K'(L_T / n)$.
2. Определим «эталонный» поток $L := L_T / n^*$.
3. Будем последовательно добавлять в граф организации узлы таким образом, чтобы контролируемый ими поток был как можно ближе к эталонному потоку $L$ до тех пор, пора каждая связь технологического графа не будет контролироваться одним из узлов графа организации.

**Пример.** Пусть для технологического графа, приведенного на рис. 1, функция $K(L) = 300 + (L_1 + L_2)^2$. Тогда $n^* = 4$, $L = 16$, $P^*(n^*) := n^* K(L_T / n^*) = 2224$. Одна из организаций, построенных по приведенному выше алгоритму, изображена на рис. 5.

Загруженность управляющих узлов I-IV: $L_I = 16$, $L_{II} = 15$, $L_{III} = 13$, $L_{IV} = 20$, стоимость организации $P(G) = 2250$, что не сильно отличается от минимально возможной стоимости системы с четырьмя управляющими узлами $P^*(4) = 2224$.

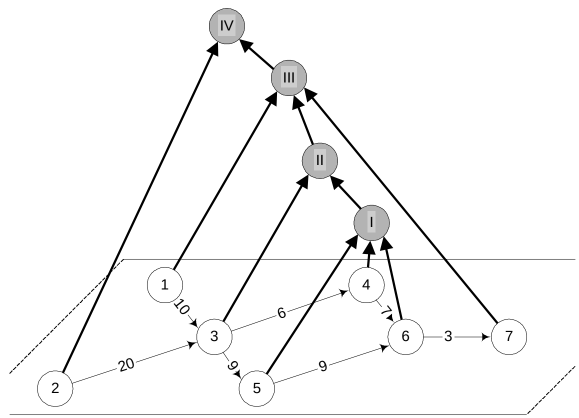


Рис. 5. Пример приближенно оптимальной структуры системы управления.

# Заключение

Таким образом, была поставлена задача построения оптимальной структуры системы управления технологическими связями предприятия. Задача была сведена к задаче построения оптимальной организации [1].

Введенные в [1] понятия выпуклого и вогнутого функционалов стоимости узла графа организации были использованы для нахождения условий, при которых оптимальной структурой системы управления являются двоичное дерево, веерная организация.

На качественном уровне исследован случай, когда функционал стоимости не является ни выпуклым, ни вогнутым, предложен эвристический алгоритм построения приближенно оптимальной структуры управления.

# Библиографический список


1. А.А. Воронин, С.П. Мишин. Модель оптимального управления структурными изменениями организационной системы // Автоматика и телемеханика. 2002. №8. С. 136 – 150.
2. А.А. Воронин, С.П. Мишин. Алгоритмы поиска оптимальной структуры организационной системы // Автоматика и телемеханика. 2002. №5. С. 120–132.
3. Воронин А. А., Мишин С. П. Моделирование структуры организационной системы. Об алгоритмах поиска оптимального дерева // Вестник Волгогр. ун-та. 2001. Сер. 1: Математика. Физи-

ка. С. 93 – 113.
4. С.П. Мишин. Оптимизация иерархических структур. // Сборник трудов международной научно-технической конференции "Современные сложные системы управления". Старый Оскол, 27-29 ноября 2002.
5. Б.Л. Овсиевич. Модели формирования организационных структур. Л.: Наука, 1979.
6. А.Д. Цвиркун. Основы синтеза структуры сложных систем. М.: Наука, 1982.