

ИДЕНТИФИКАЦИЯ АКТИВНЫХ СИСТЕМ

В.Н. Бурков

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
Россия, 117806, Москва, Профсоюзная ул., д. 65, ИПУ РАН
E-mail: vlab@ipu.rssi.ru

Д.А. Новиков

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
Россия, 117806, Москва, Профсоюзная ул., д. 65, ИПУ РАН
E-mail: nov@ipu.rssi.ru

Ключевые слова: управление активными системами, адекватность модели, устойчивость решения, идентификация активных систем.

Keywords: active systems management, model's adequacy, active systems identification, solution stability, operative control, incentive problem.

В докладе на основании единого подхода, использующего понятие обобщенного решения задачи управления активной системой, рассматриваются проблемы устойчивости решений, а также проблемы адекватности моделей и идентификации активных систем.

ACTIVE SYSTEMS IDENTIFICATION / V.N. Burkov (Institute of Control Sciences, 65 Profsoyuznaya, Moscow 117806, Russia, E-mail: vlab@ipu.rssi.ru), D.A. Novikov (Institute of Control Sciences, 65 Profsoyuznaya, Moscow 117806, Russia, E-mail: nov@ipu.rssi.ru). The analysis of the solutions stability, as well as the analysis of models identification and their adequacy, is performed on the basis of the unified approach, which exploits the concept of the generalized solution of the active systems management problem.

1. Введение

Теория активных систем (ТАС) - раздел теории управления социально-экономическими системами, изучающий свойства механизмов их функционирования, обусловленные проявлениями активности участников системы. По основным своим подходам и используемым методам исследований теория активных систем чрезвычайно тесно связана с такими разделами теории управления социально-экономическими системами как: теория иерархических игр (или информационная теория иерархических систем) [7, 8], теория контрактов [13], теория реализуемости и др.

Так как основным методом исследования является математическое (теоретико-игровое и имитационное) моделирование, то, помимо решения задачи, собственно, анализа и синтеза оптимальных (в рамках модели) управляющих воздействий, возникает необходимость идентификации активных систем (АС), исследования адекватности модели и т.д. Решение перечисленных и ряда других задач возможно в рамках единого методологического подхода, основанного на рассмотрении обобщенных решений задачи управления [11, 12], то есть семейств решений, которые являются гарантированно ϵ -оптимальными в

определенном (и зависящем от величины параметра ϵ) множестве реальных АС и их моделей.

2. Модель активной системы и общая постановка задачи управления

Рассмотрим задачу управления некоторой (пассивной или активной) системой. Пусть состояние системы описывается переменной $y \in A$, принадлежащей допустимому множеству A . Предположим для простоты, что состояние системы зависит только от управляющих воздействий $u \in U$: $y = F(u)$. Предположим также, что на множестве $U \times A$ задан функционал $F(u, y)$, определяющий эффективность функционирования системы. Величина $K(u) = \Phi(u, F(u))$ называется эффективностью управления $u \in U$. Тогда задача управляющего органа заключается в выборе такого допустимого управления u^* , которое максимизировало бы значение его эффективности при условии, что известна реакция системы $F(x)$ на управляющие воздействия: $K(u) \rightarrow \max_{u \in U}$.

Рассмотрим различия в задачах управления пассивными и активными системами. Для пассивной (технической, формальной и т.д.) системы зависимость $y = F(u)$ является, фактически, полным описанием системы (управляемого объекта), отражающим законы и ограничения ее функционирования. Общим для всех пассивных систем является их "детерминизм" с точки зрения управления – не в смысле отсутствия неопределенности, а в смысле отсутствия у управляемого объекта свободы выбора своего состояния и возможности прогнозирования поведения управляющего органа.

Иначе обстоит дело в активных системах, то есть системах, в которых управляемые субъекты (точнее говоря, хотя бы один субъект) обладают свойством активности, в том числе - свободой выбора своего состояния. Помимо возможности выбора состояния, элементы АС обладают собственными интересами и предпочтениями, то есть осуществляют выбор состояния целенаправленно (в противном случае их поведение можно было бы рассматривать как пассивное). Соответственно конкретизируется и модель системы $F(x)$, которая должна учитывать проявления активности управляемых субъектов. Проявления эти описываются следующим образом – считается, что управляемые субъекты стремятся к выбору таких своих состояний, которые являются наилучшими с точки зрения их предпочтений при заданных управляющих воздействиях, а управляющие воздействия, в свою очередь, зависят от состояний управляемых субъектов. Одним из важнейших проявлений активности также является способность управляемых субъектов «предсказывать» (в рамках имеющейся информации) поведение управляющего органа – его реакцию на состояние системы и т.д.

Если управляющий орган имеет модель реальной активной системы, которая адекватно описывает ее поведение, то задача управления АС (задача синтеза оптимального управляющего воздействия) сводится к сформулированной выше – выбрать оптимальное управление $u^* = \hat{u}(y) \in U$, то есть допустимое управление, максимизирующее эффективность.

Закончив краткое качественное обсуждение постановки задачи управления в пассивных и активных системах, перейдем к более детальному описанию собственно **модели активной системы**.

Любая конкретная активная система (и ее модель) задается перечислением следующих параметров.

1. Состав АС – совокупность субъектов и объектов, являющихся элементами системы (в дальнейшем для их обозначения будет использоваться термин "участники" АС).

2. Структура АС – совокупность информационных, управляющих и других связей между участниками АС, включая отношения подчиненности и разделение прав принятия решений. В большинстве моделей теории активных систем исследовались двухуровневые АС веерного типа, состоящие из одного управляющего органа – центра на верхнем уровне иерархии и одного или нескольких подчиненных ему управляемых субъектов - активных элементов (АЭ) на нижнем уровне.

3. Число периодов функционирования отражает наличие или отсутствие динамики (однократности или многократности выбора стратегий участниками АС в течение рассматриваемого периода времени).

4. Целевые функции участников системы отражают их интересы и предпочтения. В формальных моделях ТАС считается, что рациональному поведению участников соответствует выбор состояний (стратегий), которые максимизировали бы их целевые функции.

5. Допустимые множества состояний (стратегий) участников АС, отражают индивидуальные и общие для всех ограничения на выбор состояний, накладываемые окружающей средой, используемой технологией и т.д.

6. Порядок функционирования – последовательность получения информации и выбора стратегий участниками АС.

7. Информированность участников – та информация, которой обладают участники АС на момент принятия решений о выбираемых стратегиях.

Состав, структура, целевые функции, допустимые множества, число периодов функционирования, порядок функционирования и информированность участников определяют механизм функционирования (управления) АС в широком смысле – совокупность законов, правил и процедур взаимодействия участников системы. В узком смысле **механизм управления** представляет собой совокупность правил принятия решений участниками АС при заданных ее составе, структуре и т.д. (например, правило принятия решений центром – зависимость $\hat{u}(y)$, ставящая соответствие состояниям АЭ конкретное значение управляющего воздействия). Умея решать задачу синтеза механизма управления в узком смысле, можно решать задачи синтеза оптимального состава участников АС, ее структуры и т.д., то есть задачи синтеза механизма управления в широком смысле.

Рассмотрим базовую модель активной системы, состоящей из центра и n активных элементов, функционирующих в условиях полной информированности обо всех существенных внешних и внутренних по отношению к системе параметрах (детерминированная АС). Структура этой АС приведена на рисунке 1.

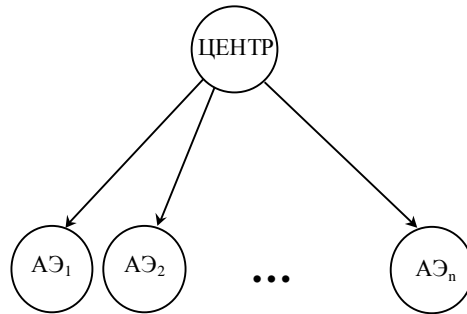


Рис.1. Двухуровневая АС веерного типа

Теоретико-игровая формулировка задачи управления заключается в следующем. Пусть $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in A' = \prod_{i=1}^n A_i$ – вектор стратегий (действий) активных элементов, компоненты которых они выбирают одновременно и независимо.

Предположим, что целевая функция i -го АЭ $f_i(y, u)$, отражает его предпочтения на множестве $A' \times U$. Определим $P(u, f)$ – множество решений игры АЭ как множество равновесных при заданном управлении $u \in U$ стратегий АЭ. В одноэлементной АС $P(u, f)$ является множеством точек максимума целевой функции АЭ, в многоэлементных системах – множеством равновесий (в максиминных стратегиях, или доминантных стратегиях, или равновесий Нэша, Байеса, Штакельберга и т.д. – в зависимости от конкретной задачи [14]). Множество решений игры отражает предположения центра (исследователя операций) о поведении управляемых субъектов (активных элементов) при заданном управлении.

Далее, центр, интересы которого отождествляются с интересами АС в целом и на позициях которого находится исследователь операций, должен конкретизировать свои предположения о стратегиях, выбираемых элементами из множества решений игры. Наиболее часто применяются два "предельных" подхода – метод максимального гарантированного результата (МГР), при использовании которого центр рассчитывает на наихудший для него выбор АЭ, и гипотеза благожелательности, в рамках которой АЭ выбирают из множества решений игры наиболее предпочтительные с точки зрения центра действия. Далее по умолчанию будем считать выполненной гипотезу благожелательности. При этом задача управления АС заключается в поиске допустимого управления, максимизирующего целевую функцию центра: $u^* \in \underset{u \in U}{\text{Arg max}} \max_{y \in P(u, f)} F(u, y)$

при заданной целевой функции АЭ $f(x)$, то есть управления, имеющего максимальную эффективность $K(u, f) = \max_{y \in P(u, f)} F(u, y)$ (или максимальную

гарантированную эффективность $K_g(u, f) = \min_{y \in P(u, f)} F(u, y)$).

Отметим, что приведенная теоретико-игровая формулировка задачи управления АС, в которой центр является метаигроком, обладающим правилом первого хода и имеющим возможность назначать свою стратегию, которая зависит от стратегий АЭ: $u = \hat{u}(y)$, является игрой типа Γ_2 в терминологии теории иерархических игр [7, 8]. Зависимость $\hat{u}(y)$ определяет механизм управления в узком смысле (см. определение выше).

Два важных частных случая общей постановки составляют задачи стимулирования и задачи планирования. В задаче стимулирования управление $\hat{u}(x)$ содержательно соответствует отображению множества действий АЭ во множество допустимых вознаграждений (штрафов) [1-6, 13], в задаче планирования – отображению множества сообщений АЭ во множество допустимых планов (желательных состояний АЭ, коллективных решений и т.д.) [1-6].

До настоящего момента мы считали, что модель активной системы совпадает с реальной системой, для которой она строится. Перейдем к анализу возможных различий активной системы и ее модели.

Примем следующее **предположение**: модель АС полностью совпадает с оригиналом по следующим параметрам – состав, структура, число периодов функционирования, порядок функционирования и информированность участников. Таким образом, будем считать, что модель может отличаться от реальной АС только лишь целевыми функциями участников и множествами их допустимых стратегий¹.

При решении задач синтеза оптимальных механизмов управления активными системами, в том числе - механизмов стимулирования и планирования, как в детерминированных активных системах [1-4], так и в АС с неопределенностью [13, 14], предполагается, что на момент принятия решений центр (и исследователь операций, находящийся на позиции оперирующей стороны) обладает достоверной информацией о тех параметрах АС, которые не относятся к неопределенным. Так, например, при рассмотрении детерминированных АС считается, что множество допустимых действий АЭ, его целевая функция, целевая функция самого центра и т.д. точно известны центру и, следовательно, исследователю операций. Однако, следует помнить, что последний имеет дело не с реальной системой, а с некоторой ее моделью, то есть ищет механизм управления, оптимальный в исследуемой модели. Поэтому, так или иначе, особенно на этапе внедрения и практического использования теоретических разработок, возникает вопрос об адекватности модели реальной (моделируемой) системе и, следовательно, возникает необходимость исследования зависимости решений изучаемых задач от начальных данных - параметров модели.

Действительно, представим себе следующую ситуацию. Пусть решена задача управления для детерминированной модели АС в предположении, что параметры модели достаточно точно соответствуют или максимально возможно в рамках данного описания близки к параметрам моделируемой системы. А что будет, если параметры модели "немного" отличаются от параметров реальной АС? Получается, что задача управления решалась не для "той" активной системы. Отрицать такую возможность, естественно, нельзя. Поэтому необходимо получить ответы на следующие вопросы:

¹ Следует отметить, что временное исключение из рассмотрения возможности отличия модели от оригинала по таким параметрам как, например, структура АС или информированность участников и т.д., вовсе не означает, что такие ситуации не встречаются в практике теоретико-игрового моделирования или не заслуживают внимания. Напротив, существенность роли информированности подчеркивается в работах как по теории иерархических игр [7, 8], так и по теории активных систем [5, 6, 14]. Однако, недостаточная изученность проблем адекватности моделей вынуждает нас ограничиться частным случаем возможных различий модели и моделируемой системы. Поэтому анализ их возможных отличий по всем перечисленным в настоящем разделе параметрам может рассматриваться как перспективное направление будущих исследований.

- насколько оптимальное решение чувствительно к ошибкам описания модели, то есть будут ли малые "возмущения" модели приводить к столь же малым изменениям оптимального решения (условно назовем эту задачу задачей анализа устойчивости оптимального решения по параметрам модели, точнее - задачей анализа устойчивости принципа оптимальности);

- будет ли механизм управления, обладающий определенными свойствами в рамках модели (например, оптимальность, эффективность не ниже заданной и т.д.), обладать этими же свойствами и в реальной АС, и насколько широк класс реальных АС, в которых данный механизм еще обладает этими свойствами (условно назовем эту задачу задачей анализа адекватности модели).

Иначе говоря, необходимо исследовать, во-первых, корректность решаемых задач, то есть – устойчивость принципов оптимальности в изучаемых моделях и, во-вторых – адекватность моделей реальным системам. Результаты решения этих задач позволят перейти к рассмотрению проблем идентификации АС.

Следует признать, что проблемы устойчивости решений и адекватности (точнее – проблема микроадекватности, так как структура модели в настоящей работе (и в большинстве работ, посвященных исследованию теоретико-игровых моделей механизмов функционирования социально-экономических систем) предполагается правильной) конкретных моделей активных систем, к сожалению, пока не привлекли должного внимания специалистов. Это тем более странно, что на сегодняшний день существует достаточно большое число общих результатов исследования устойчивости принципов оптимальности в задачах исследования операций [7, 10]. Тем не менее, с одной стороны, эти общие результаты почти не используются при разработке частных моделей, а с другой - в упомянутых работах акцент делается именно на устойчивость, а проблема адекватности почти не затрагивается.

Не претендуя на полноту анализа (задача детального исследования устойчивости принципов оптимальности хотя бы для известных моделей ТАС представляется совершенно необозримой), приведем некоторые подходы к решению проблем устойчивости и адекватности для ряда механизмов управления активными системами.

Качественно, основная идея заключается в следующем [10, 11, 12]. Эффективностью управления в известных на сегодняшний день моделях является значение (гарантированное или максимальное) целевой функции центра на множестве решений игры АЭ (множестве тех действий АЭ, которые им выгодно выбирать при использовании центром данного управления). С таким критерием эффективности задача синтеза оптимального управления заключается в поиске допустимого управления, имеющего максимальную эффективность. Использование оптимальных (в определенном выше смысле) решений приводит к тому, что они, как правило, оказываются неоптимальными при малых вариациях параметров модели. Возможным путем преодоления этого недостатка является расширение множества "оптимальных" решений за счет включения в него ε -оптимальных (приближенных решений, почти решений и т.д.). Оказывается, что такое ослабление понятия "оптимальность" (корректно называемое регуляризацией принципа оптимальности [10]) позволяет, установив взаимосвязь между возможной неточностью описания модели и величиной ε , гарантировать некоторый уровень эффективности множества решений в заданном классе реальных систем, то есть расширить класс гарантированной применимости решений за счет использования менее эффективных из них, нежели, чем оптимальные в классическом понимании.

Иными словами, вместо рассмотрения фиксированной модели АС, необходимо исследовать семейство моделей. Для параметрического решения задачи управления на семействе моделей предлагается использовать термин "обобщенное решение задачи управления АС" [11, 12].

3. Устойчивость решений задач управления активными системами

Рассмотрим процесс построения математической модели некоторой реальной активной системы (рисунок 2). Первым шагом является выбор того "языка", на котором формулируется модель, то есть того математического аппарата, который будет использоваться (горизонтальная пунктирная линия на рисунке 2 является условной границей между реальностью и моделями). Как правило, этот этап характеризуется высоким уровнем абстрагирования – выбираемый класс моделей намного шире, чем моделируемый объект. Возможной ошибкой, которую может совершить исследователь операций на этом шаге, является выбор неадекватного языка описания.

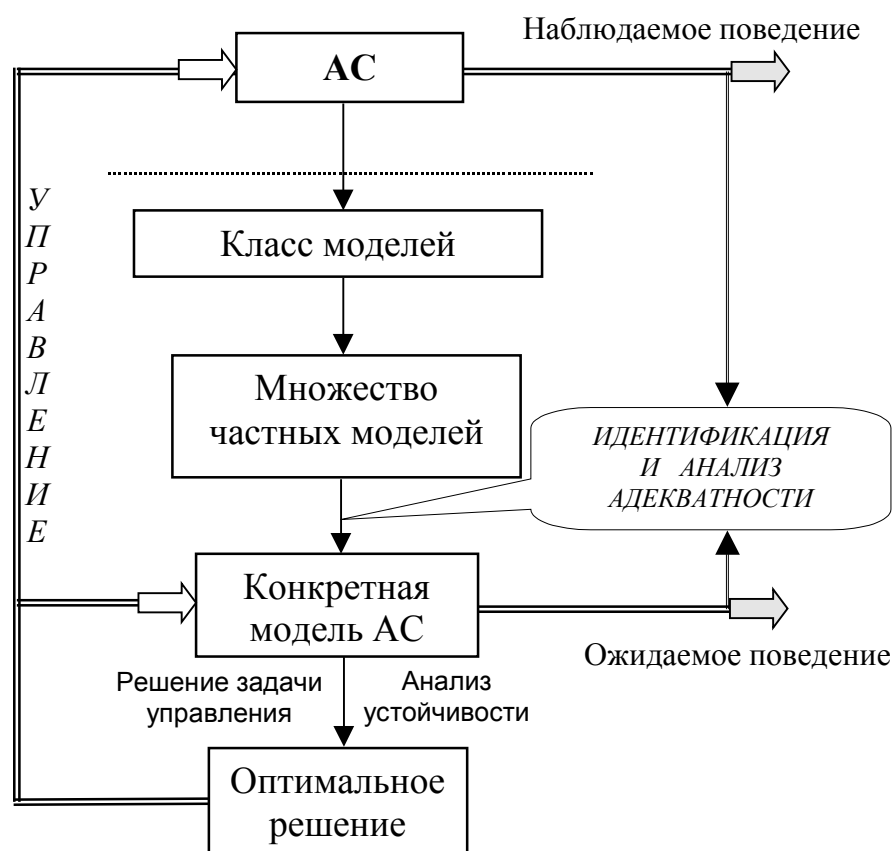


Рис. 2. Этапы решения задач управления АС

Следующим этапом по уровню детализации является построение множества частных моделей, при переходе к которым вводятся те или иные предположения относительно свойств параметров модели. Возникающие здесь ошибки описания структуры модели могут быть вызваны неправильными

представлениями о свойствах элементов моделируемой АС и их взаимодействии.

После задания структуры модели посредством выбора определенных значений параметров (в том числе – числовых) происходит переход к некоторой конкретной модели, которая считается аналогом моделируемого объекта. Источник возникающих на этом этапе "ошибок измерения" очевиден, хотя он и имеет достаточно сложную природу и заслуживает отдельного обсуждения.

Когда для конкретной модели решается задача синтеза оптимальных управлений, то, если существует аналитическое решение для множества частных моделей, тогда, как правило, частные значения параметров, соответствующие конкретной модели, подставляются в это решение. Если аналитического решения не существует, то оптимальное решение ищется с привлечением вычислительной техники. На этом этапе - при численных расчетах на ЭВМ – возникают вычислительные ошибки.

Изучаемая в большинстве работ по устойчивости решений задач исследования операций проблема связана с "возмущениями", вызванными "ошибками измерения" и "вычислительными ошибками", и в большинстве случаев сводится к исследованию зависимости оптимального решения от параметров модели. Если эта зависимость является непрерывной, то малые ошибки на различных уровнях детализации приведут к малым отклонениям решения, оптимального в возмущенной модели, от "истинного". Тогда, решая задачу управления по приближенным данным, можно обоснованно говорить о нахождении приближенного решения.

Сделав маленькое отступление, еще раз напомним, что мы будем считать, что класс моделей и структура модели выбраны правильно. Кроме того, в большинстве задач управления АС удается найти именно аналитическое решение, так что условно можно считать, что ошибки в "методологии", "предположениях" и "вычислительные ошибки" отсутствуют. Значит, при правильно выбранном языке описания и структуре модели возможная неустойчивость решения и неадекватность модели (различие конкретной модели и моделируемого объекта) может быть вызвана только лишь "ошибками измерения" - использованием возмущенных значений параметров модели. Иными словами, **будем считать, что модель и моделируемая система принадлежат одному «пространству».**

Если зависимость оптимального решения от параметров модели не является непрерывной или решение не определено в некоторой окрестности точного решения, то необходимо использование методов регуляризации. Следует отметить, что предложенный Д.А. Молодцовым [10] подход к исследованию устойчивости принципов оптимальности, в отличие от теории некорректных задач (в которой семейство приближенных решений совпадает с семейством окрестностей точного решения в некоторой топологии - такой подход достаточно распространен в исследованиях по устойчивости), использует вместо топологии на множестве решений само семейство приближенных решений, что позволяет достаточно просто согласовать понятия устойчивости и приближенного решения.

Перейдем к определению понятия устойчивости решения задачи стимулирования. Наиболее близкой к рассматриваемым в настоящей работе задачам управления является иерархическая игра Γ_2 , для которой известно, что она корректна (устойчива) относительно целевой функции центра и в общем случае неустойчива относительно целевой функции активного элемента (см.,

например [7]). Регуляризация этой задачи возможна и заключается в искусственном введении неточности вычисления максимума целевой функции АЭ [7, 10]. Однако, во-первых, предположение о том, что АЭ согласится выбирать d -оптимальные стратегии, не всегда обоснованно, а, во-вторых, как отмечалось выше, помимо проблемы устойчивости существует и проблема адекватности модели, исследованию которой до сих пор не уделялось должного внимания, в том числе и в упомянутых работах (исключения – [11, 12]).

Обсудим качественно, что мы будем понимать под адекватностью. Для этого вернемся к рисунку 1. Оптимальное решение, полученное аналитически или вычисленное с использованием ЭВМ для конкретной модели, является оптимальным в том смысле, что при использовании данного управления поведение модели доставляет максимум (или обеспечивает некоторое значение) используемому критерию эффективности. Рассмотрим, насколько обоснованным является использование этого решения в реальной системе - моделируемом объекте.

Наблюдаемое поведение модели является с точки зрения исследователя операций (например, полагающего, что модель адекватна) предполагаемым поведением реальной активной системы, которое в отсутствии возмущений будет оптимально в смысле выбранного критерия эффективности. Понятно, что в общем случае наблюдаемое поведение реальной АС и ее предполагаемое поведение могут различаться достаточно сильно. Следовательно, необходимо исследование адекватности модели, то есть – устойчивости поведения не модели, а реальной системы относительно ошибок моделирования.

Перейдем к формальным определениям.

Пусть M - множество моделей активных систем, которому в силу введенных предположений принадлежат и реальная (моделируемая) АС m , и ее модель \tilde{m} ². Из перечисленных выше параметров модели следует, что модель АС (и сама моделируемая АС) может быть представлена кортежем: $\tilde{m} = \{ \tilde{\Phi}(x), \tilde{f}(x), \tilde{U}, \tilde{A} \}$ ($m = \{ K(x), f(x), U, A \}$), включающем целевые функции и допустимые множества центра и АЭ, соответственно. Критерий эффективности управления $K(u)$, естественно, зависит от модели, то есть $K(u) = K(u, \tilde{m})$ (напомним, что во втором разделе модели \tilde{m} соответствовал оператор $F(x)$).

Введем дополнительно следующее **предположение**: модель АС может отличаться от оригинала только предпочтениями агента, то есть $\tilde{m} = \{ \tilde{\Phi}(x), \tilde{f}(x), U, A \}$. В качестве обоснования данного предположения можно привести следующие рассуждения. Так как исследователь операций находится на позициях центра, то его предпочтения (целевая функция $\tilde{\Phi}(x)$) и множество допустимых управлений U ему известны³. Основную сложность при построении теоретико-игровой модели, как правило, представляет идентификация именно предпочтений АЭ.

Для описания близости моделей введем псевдометрику \mathfrak{m} - числовую функцию, определенную на $M \times M$, и удовлетворяющую следующим условиям:
 $\mathfrak{m}(m_1, m_2), \mathfrak{m}(m_2, m_3) \geq 0$, $\mathfrak{m}(m_1, m_1) = 0$, $\mathfrak{m}(m_1, m_2) + \mathfrak{m}(m_2, m_3) \geq \mathfrak{m}(m_1, m_3)$.

² Индекс « $\tilde{\cdot}$ » соответствует переменным, описывающим модель.

³ В [10, 11, 12] показано, что при неточном описании предпочтений управляющего органа на соответствующую величину уменьшается гарантированная эффективность управления. Кроме того, в [12] построены обобщенные решения детерминированных задач стимулирования в АС, модели которых отличаются от оригинала по всем параметрам.

Ограничимся рассмотрением критериальных принципов оптимальности, задаваемых критерием эффективности $K(u, t)$, где $u \in \hat{I} U$, $t \in \hat{I} M$. Оптимальными (точнее, ε -оптимальными, $\varepsilon \geq 0$) будут стратегии из множества⁴:

$$(1) \quad R_\varepsilon(m) = \{u \in \hat{I} U \mid K(u, m) \geq \sup_{t \in M} K(t, m) - \varepsilon\}.$$

Соответствующий принцип оптимальности (в общем случае [10] принцип оптимальности – точечно-множественное отображение, ставящее в соответствии каждой модели или реальной АС подмножество множества допустимых управлений) называется критериальным.

Задача синтеза оптимального ($\varepsilon = 0$) управления АС заключается в поиске допустимого управления, максимизирующего эффективность для заданной АС или ее модели (различий между ними пока мы не делаем):

$$(2) \quad K(m) = \sup_{u \in U} K(u, m).$$

То есть «классическому» принципу оптимальности $K(m)$ соответствует множество решений $R_0(m)$.

Будем считать, что U – метрическое пространство с метрикой v , которая порождает метрику Хаусдорфа $Hn(B_1, B_2)$ [10], определяющую «расстояние» между подмножествами B_1 и B_2 множества U^5 .

Принцип оптимальности $R_\varepsilon(m)$ устойчив на модели $\tilde{m} \in \hat{I} M$ [10], если

$$(3) \quad " \varepsilon \geq 0 \ \& \ \delta \geq 0: " \ m \in \hat{I} M: \ Hn(R_\varepsilon(\tilde{m}), R_\varepsilon(m)) \leq \delta.$$

Определение устойчивости (3) близко к определению устойчивости по Ляпунову и качественно означает, что малые возмущения модели приводят к малым изменениям множеств оптимальных решений.

Критериальный принцип оптимальности $R_0(m)$ называется устойчивым на модели $\tilde{m} \in \hat{I} M$, если функция $K(m)$, определяемая (2), непрерывна на модели \tilde{m} . Более общие определения устойчивости принципов оптимальности можно найти, например, в [10].

Отметим, что когда речь идет об устойчивости принципа оптимальности, в (3) используется «расстояние» между множествами оптимальных решений (1). В то же время, если результаты моделирования используются на практике, то для внедрения предлагается, как правило, единственное решение, поэтому введем определение устойчивости отдельного решения, удовлетворяющего тому или иному принципу оптимальности. Для критериального принципа оптимальности устойчивость решения $u \in \hat{I} U$ на модели \tilde{m} определяется как непрерывность функции $K(u, m)$ на модели \tilde{m} .

Конкретное решение $u \in \hat{I} U$ абсолютно устойчиво в области $B(\varepsilon, u) \in \hat{I} M$, если

$$(4) \quad " \ m \in B(\varepsilon, u) \ \& \ \hat{I} R_\varepsilon(m).$$

Другими словами, область абсолютной устойчивости (точнее – абсолютной ε -устойчивости) можно определить следующим образом:

$$B(\varepsilon, u) = \{m \in \hat{I} M \mid u \in \hat{I} R_\varepsilon(m)\}.$$

⁴ Так как и реальная АС, и ее модель в силу введенных предположений принадлежат одному «пространству», то там, где это не приведет к неоднозначности понимания будем опускать индекс « \sim », соответствующий модели. Так, например, множество ε -оптимальных решений (1) может определяться и для модели $\tilde{m} \in \hat{I} M$: $R_\varepsilon(\tilde{m})$ и т.д.

⁵ Особо следует отметить, что выбор метрик v и p должен в каждой конкретной задаче отражать прикладные потребности и соответствовать содержательным интерпретациям (см. более подробно [11]).

Качественно абсолютная устойчивость конкретного решения, которое ε -оптимально в модели \tilde{m} , в некоторой области означает, что оно ε -оптимально для любой АС (и модели) из этой области. Понятно, что " $u \in \hat{I} U$ ", " $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq 0$ " $B(0, u) \supseteq B(\varepsilon_2, u) \supseteq B(\varepsilon_1, u)$, то есть с ростом ε область абсолютной устойчивости конкретного решения не сужается.

Конкретные результаты анализа устойчивости решений ряда задач управления АС приведены в [7, 10-12].

Таким образом, с одной стороны, каждой модели (и реальной АС) принцип оптимальности R_ε ставит в соответствие (см. рисунок 2а) множество стратегий, которые ε -оптимальны в данной модели (данной реальной АС). С другой стороны, каждому управлению $u \in \hat{I} U$ можно поставить в соответствие (см. рисунок 2б) множество $B(\varepsilon, u)$ моделей (реальных АС), в которых данное управление ε -оптимально. Отметим, что в обоих случаях величина ε является параметром (см. рисунок 2⁶).

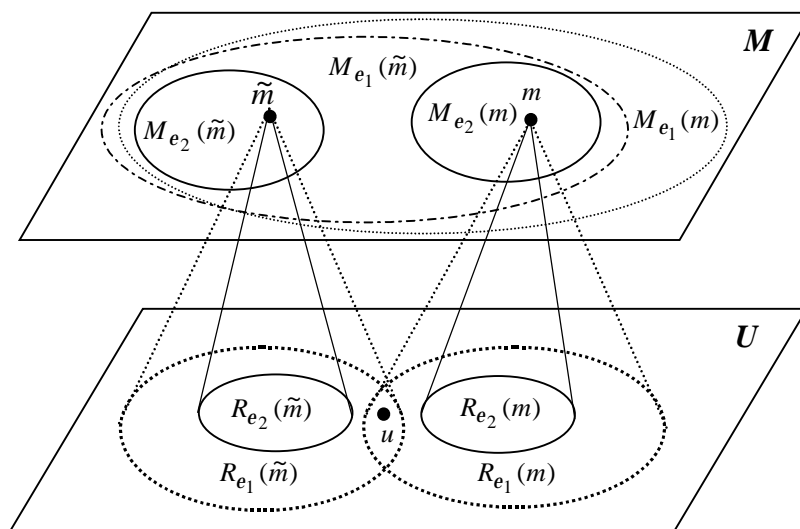


Рис. 2а. Множества ε -оптимальных решений ($\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq 0$)

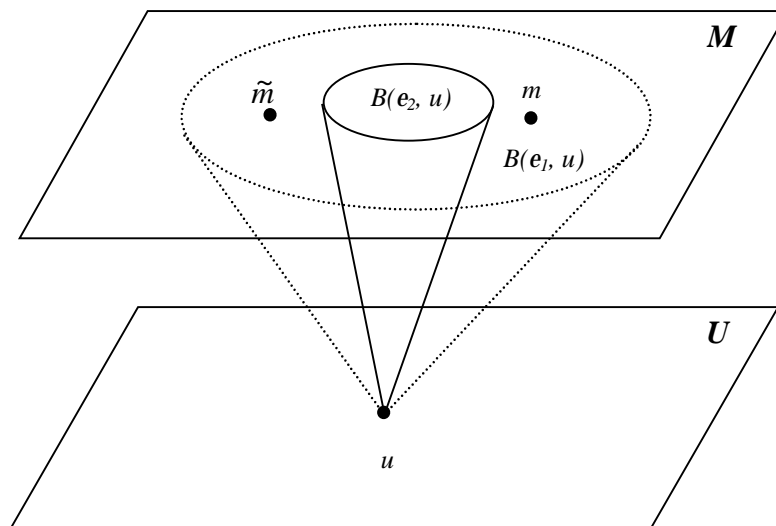


Рис. 2б. Области абсолютной устойчивости решения $u \in \hat{I} U$ ($\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq 0$)

⁶ На обоих рисунках (2а и 2б) модель $\tilde{m} \in M$, АС $m \in M$ и управление $u \in \hat{I} U$ одни и те же.

4. Проблема адекватности моделей активных систем

Перейдем к определению адекватности. Фиксируем некоторую модель $\tilde{m} \hat{I} M$ и принцип оптимальности R_e . Интуитивно понятно, что при $e = 0$ адекватность соответствует, в отличие от устойчивости (когда требуется непрерывность $\sup_{t \in M} K(t, m)$ по модели [10]), непрерывности по модели из малой окрестности \tilde{m} следующей функции: $K(u, m), u \hat{I} R_e(\tilde{m})$. Поэтому можно считать, что модель \tilde{m} с принципом оптимальности R_e e -адекватна (в смысле задачи полного выбора [10]) множеству реальных АС $M_e(\tilde{m})$, определяемому следующим образом:

$$(5) \quad M_e(\tilde{m}) = \{m \hat{I} M / R_e(\tilde{m}) \zeta R_e(m) \text{ } ^1 \text{ } \mathcal{A}\} \hat{I} M,$$

то есть тем реальным АС, в которых хотя бы одно из решений, оптимальное в модели, также оптимально. На рисунке 2а показан случай, когда $m \hat{I} M_{e_2}(\tilde{m})$, но $m \hat{I} M_{e_1}(\tilde{m})$.

Другими словами, модель \tilde{m} с принципом оптимальности R_e ε -адекватна множеству реальных АС $M_e(\tilde{m})$, если $\$ u \hat{I} U: m \hat{I} B(e, u), \tilde{m} \hat{I} B(e, u)^7$ (см. рисунок 2б). Еще один эквивалентный способ формулировки того же определения следующий: $M_e(\tilde{m}) \zeta M_e(m) \text{ } ^1 \text{ } \mathcal{A}$. Следовательно, адекватность модели определяется через абсолютную устойчивость оптимальных в ней решений.

Отметим, что определение (5) симметрично относительно реальной АС и ее модели, поэтому можно считать, что модель \tilde{m} e -адекватна реальной АС m , если $\tilde{m} \hat{I} M_e(m)$.

Понятно, что " $\tilde{m} \hat{I} M, \text{ } ^1 \text{ } e_1 \text{ } \varepsilon \text{ } e_2 \text{ } \varepsilon \text{ } 0 \text{ } M_0(\tilde{m}) \hat{I} M_{e_2}(\tilde{m}) \hat{I} M_{e_1}(\tilde{m})$."

Совокупность решений (с параметром $e \text{ } \varepsilon \text{ } 0$): $\{u \hat{I} U; B(e, u)\}$ в [11] названа **обобщенным решением** задачи управления. Совокупность $\{u \hat{I} R_e(\tilde{m}); B(e, u)\}$ является обобщенным решением задачи управления для модели $\tilde{m} \hat{I} M$.

Следует отметить, что приведенное определение адекватности слишком широко, так как в нем фигурирует множество всех ε -оптимальных (для модели или реальной АС) решений.

Следовательно, для каждого решения $u \hat{I} U$, помимо его эффективности (эффективности управления, «допустимое» отклонение которого от максимального значения определяется параметром ε), существует еще одна характеристика – множество тех АС $B(e, u)$, в которых оно ε -оптимально, то есть абсолютно устойчиво.

Областью e -адекватности модели $\tilde{m} \hat{I} M$ назовем следующее множество АС: $M(\tilde{m}, e) = \mathbf{I}_{u \in R_e(\tilde{m})} B(e, u)$, то есть множество тех АС, для которых любое

решение, ε -оптимальное в модели, также является ε -оптимальным. Аналогичным образом можно определить область ε -адекватности реальной АС $m \hat{I} M$: $M(m, e) = \mathbf{I}_{u \in R_e(m)} B(e, u)$.

Итак, появляется возможность сравнения оптимальных решений. Естественно считать, что из двух решений, удовлетворяющих принципу

⁷ Еще раз подчеркнем существенную зависимость всех определений от параметра e .

оптимальности, решение, эффективное в большей области АС, "лучше". Введем на множестве $R_e(\tilde{m})$ следующее отношение "D" (в общем случае не полное):

$$(6) \quad " e \geq 0 " u_1, u_2 \hat{I} R_e(\tilde{m}) u_1 D u_2 \ll B(e, u_1) \hat{I} B(e, u_2).$$

Понятно, что с точки зрения практического использования результатов математического моделирования целесообразен выбор из $R_e(\tilde{m})$ элемента, максимального по отношению "D" (если таковой существует).

Итак, для фиксированных модели и принципа оптимальности можно указать множество реальных АС (множество моделей АС), в которых существует решение, гарантированно удовлетворяющее принципу оптимальности. Это множество заведомо не пусто, так как содержит саму модель (см. рисунок 3).

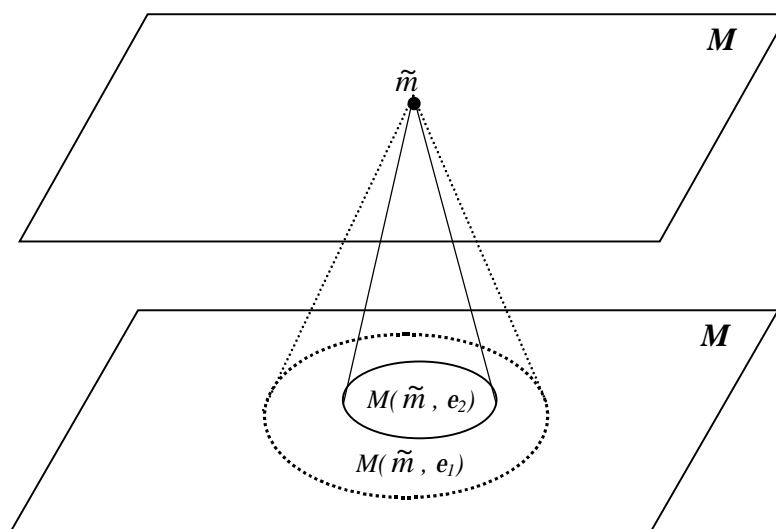


Рис. 3. Области адекватности ($e_1 \geq e_2 \geq 0$)

Если существует решение, ϵ -оптимальное в модели, которое ϵ -оптимально и в реальной активной системе, то будем считать, что модель адекватна. Таким образом, **критерием ϵ -адекватности модели является эффективность управления реальной АС.**

Более того, решение задачи синтеза оптимальных управлений для математической модели (которое до сих пор заключалось в указании конкретного решения или их множества) можно считать полным только тогда, когда для каждого из решений, удовлетворяющих принципу оптимальности указаны множества реальных АС, в которых эти решения гарантированно оптимальны (см. определение обобщенного решения выше).

Знание множества $B(e, u)$, $u \hat{I} R_e(\tilde{m})$, позволяет на этапе внедрения результатов анализа модели \tilde{m} оценить возможные потери от практического использования решения и, быть может, при необходимости, пересмотреть модель АС или принцип оптимальности (ревизия методологии и структуры модели, как отмечалось выше, не входит в нашу компетенцию).

Модификация принципа оптимальности даже при фиксированных параметрах модели представляется достаточно перспективной. Например, снижая требования к эффективности управления, можно для каждого из решений расширить область его устойчивости и, следовательно, расширить множество реальных АС, в которых решения, удовлетворяющие ослабленному

принципу оптимальности, будут гарантированно оптимальными (точнее, в классической терминологии – гарантированно ε -оптимальными).

Приведенные качественные рассуждения свидетельствуют, что существует определенный дуализм между эффективностью решения задачи управления и областью его гарантированной применимости (областью его абсолютной устойчивости или областью адекватности). Конкретные зависимости между эффективностью и областью адекватности для ряда моделей АС приведены в [11, 12].

Жертвуя эффективностью управления, можно расширить множество АС, в которых применимы результаты моделирования. Особенно ярко этот эффект проявляется при анализе областей устойчивости решений, удовлетворяющих тем или иным критериальным принципам оптимальности. Величина ε , фигурирующая в определении критериального принципа оптимальности, фактически, характеризует те потери эффективности на которые мы готовы пойти, считая решение еще «оптимальным» (такое общее определение оптимальности несколько противоречит широко распространенному, когда оптимальным считается допустимое решение, имеющее максимально возможную эффективность).

Качественно отмеченный выше дуализм между эффективностью и адекватностью (областью устойчивости) для критериальных принципов оптимальности имеет следующий формальный вид: множество активных систем, адекватных фиксированной модели с критериальным принципом оптимальности, не уменьшается с ростом ε ; кроме того: область абсолютной устойчивости фиксированного решения, оптимального в модели, не сужается с ростом ε [11].

Данный факт (с ослаблением требований к эффективности некоторого решения область его абсолютной устойчивости расширяется и, следовательно, расширяется область адекватности) свидетельствует, что для решения проблем устойчивости и адекватности достаточно указать конкретную зависимость между величиной ε и множеством АС, которым требуется обеспечить заданную эффективность управления, то есть, например, найти по модели минимальное значение ε , обеспечивающее выполнение требования адекватности.

Отметим, что во многих случаях [11] области абсолютной устойчивости оптимальных (при $\varepsilon = 0$) решений задач управления очень узки и иногда состоят из одной точки. Возможность расширения областей устойчивости "неустойчивых" решений, установленная выше, и результаты, полученные в [11], свидетельствуют, что критерий ε -оптимальности является регуляризирующим (в смысле [10]) для критерия $K(u, t)$.

Таким образом, мы определили понятия устойчивости решений задач управления АС и адекватности моделей АС реальным системам. Конструкцией, которая использовалась при этом, явилось понятие обобщенного решения, включающего в себя в явном виде зависимость между эффективностью управления и областью его устойчивости и адекватности. Приведенная методология может быть использована и для анализа проблем идентификации активных систем, к обсуждению которых мы и переходим.

5. Постановка задачи идентификации активной системы

В первую очередь, необходимо, следуя общей методологии теории идентификации [9], определить, что понимается под идентификацией АС⁸.

Пусть имеется АС $m \hat{I} M$ и ее модель $\tilde{m} \hat{I} M$. Определим минимальную величину $e(m, \tilde{m})$ потерь эффективности, при которой существует хотя бы одно решение, которое $e(m, \tilde{m})$ -оптимально и в модели, и в АС:

$$(7) \quad e(m, \tilde{m}) = \min \{e \in \mathbb{R}^+ / M(\tilde{m}, e) \subset M(m, e) \cap \mathcal{E}\}.$$

Если задано множество АС $M_1 \hat{I} M$, то можно определить для заданной модели $\tilde{m} \hat{I} M$ минимальную величину потерь в эффективности $e(\tilde{m}, M_1)$, при которой любое решение, $e(\tilde{m}, M_1)$ -оптимальное в модели будет гарантированно $e(\tilde{m}, M_1)$ -оптимальным во множестве реальных АС M_1 :

$$(8) \quad e(\tilde{m}, M_1) = \min \{e \in \mathbb{R}^+ / M_1 \hat{I} M(\tilde{m}, e)\}.$$

Величина (8) может рассматриваться как критерий «качества» модели $\tilde{m} \hat{I} M$. Следовательно, для заданного класса АС M_1 можно ставить задачу поиска наилучшей модели, то есть модели, которая давала бы максимальное гарантированное значение эффективности управления:

$$(9) \quad \tilde{m}(M_1) = \arg \min_{\tilde{m} \in M} e(\tilde{m}, M_1).$$

Минимальные потери эффективности, которые достигаются при использовании «оптимальной» модели (9) равны:

$$(10) \quad e(M_1) = \min_{\tilde{m} \in M} e(\tilde{m}, M_1).$$

Понятно, что " $M_2 \hat{I} M_1 \hat{I} M \quad e(M_2) \leq e(M_1) \leq e(M)$ ", то есть с расширением класса АС для которого решается задача синтеза управлений гарантированная эффективность не возрастает. Так как множество реальных АС, фигурирующее в выражении (10), отражает ту информацию о моделируемом объекте, которой обладает исследователь операций, то сделанный вывод можно переформулировать следующим образом: с ростом информированности (с уменьшением неопределенности) гарантированная эффективность управления не убывает, что вполне согласовано с результатами, приведенными в [12, 13].

Таким образом, *идентификацию активной системы*, относительно которой известно, что она принадлежит множеству M_1 , можно определить как процесс построения модели (9) и «сужения» множества M_1 , любое оптимальное решение в которой обладает максимальной гарантированной (по множеству M_1) эффективностью. При этом двойственным является процесс идентификации модели АС – определения реальной АС, любое оптимальное решение в которой обладает максимальной гарантированной (по множеству моделей) эффективностью.

Отметим, что эффективность управления (10) существенно зависит от той априорной информации, которую имеет исследователь операций, то есть от множества M_1 . Если в течение времени поступает новая более точная информация $M_2 \hat{I} M_1$ о том классе АС, которому принадлежит моделируемая система, то, используя эту новую информацию, можно уточнить модель, то есть перейти от модели $\tilde{m}(M_1)$ к модели $\tilde{m}(M_2)$, что даст возможность повысить гарантированную эффективность управления: $e(M_2) \leq e(M_1)$ (см. рисунок 4).

⁸ Проблемы идентификации в теории активных систем практически не рассматривались (исключение составляют результаты, приведенные в монографии [15]).

Такой процесс условно можно назвать *адаптивной идентификацией активных систем* (см. также [15]).

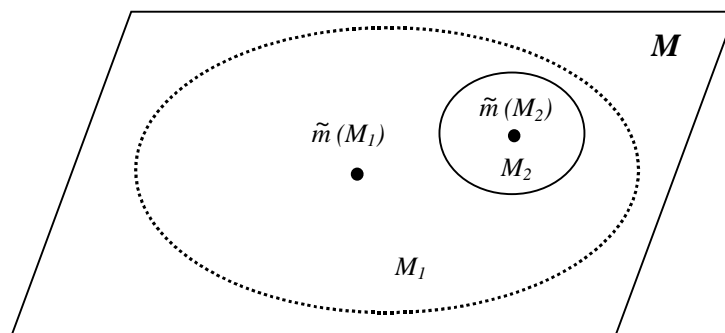


Рис. 4. Повышение эффективности управления с ростом информированности

Таким образом, с одной стороны задача идентификации активной системы может рассматриваться как задача управления в условиях неопределенности [13], то есть как задача синтеза управлений, обладающих максимальной гарантированной эффективностью в заданном классе активных систем, причем по мере получения (пассивного или активного) информации об этом классе повышается эффективность управления.

С другой стороны, задача идентификации представляет самостоятельный интерес, так как она обладает собственными специфическими особенностями по сравнению с задачей управления в условиях неопределенности. Так, помимо возможности постановки и решения отмеченной выше задачи адаптивной идентификации активных систем, можно использовать и другие методы идентификации, например – активную адаптивную идентификацию, рассматриваемую ниже.

6. Решение задачи идентификации активной системы: некоторые результаты и возможные подходы

Для решения задач идентификации в активных системах применяются три подхода.

1. Адаптивная идентификация. Методы адаптивной идентификации широко применяются в технических системах (см. обзор [9]), поэтому естественно рассмотреть вопрос их применения в активных системах. Особенность задач адаптивной идентификации в активных системах состоит в том, что АЭ и центр могут иметь разные представления о том, какую модель следует получить в результате идентификации. Так как идентификация производится на основе оценки состояний активной системы, АЭ, имея определенную свободу выбора этих состояний, может влиять на результат идентификации. Для иллюстрации сказанного рассмотрим простой пример.

Пример 1. Пусть АС описывается скалярным параметром r , причем центр заинтересован в том, чтобы этот параметр был возможно больше, а АЭ заинтересован в обратном. Центр стимулирует АЭ за рост наблюдаемого значения параметра. Представим целевую функцию АЭ в виде:

$$(11) \quad f(r) = A - q r_0 + a(r - r_0)$$

где r_0 – имеющаяся у центра на начальный момент оценка параметра r , r – наблюдаемая в текущем периоде величина параметра r (остальные параметры – константы). Если центр наблюдает величину $r > r_0$, то он может уточнить оценку этого параметра в модели:

$$(12) \quad r_1 = r_0 + b(r - r_0).$$

Таким образом, при росте текущего значения параметра r АЭ выигрывает «сегодня» (согласно (11)), но проигрывает «завтра» (согласно (12)). Соизмерим сегодняшний выигрыш и завтрашний проигрыш некоторым коэффициентом γ , который характеризует степень дальновидности АЭ:

$$(13) \quad f_0(r) = A - q r_0 + a(r - r_0) + g(A - q r_1).$$

Анализ выражения (13) показывает, что для того, чтобы АЭ был заинтересован в уточнении (точнее – увеличении) параметра r , должно выполняться условие

$$(14) \quad a > g b q.$$

Подобные условия называются условиями прогрессивности механизма адаптивной идентификации. Подробное изложение результатов исследования механизмов адаптивной идентификации приведено в монографии [15].

Если предпочтения АЭ неизвестны центру или известны с некоторой погрешностью, то дополнительная информация об этих предпочтениях может быть получена следующим образом. Если выполнена гипотеза рационального поведения, то при известном управлении со стороны центра АЭ выбирает действия, максимизирующие его целевую функцию. Следовательно, если известно множество пар $W_m = \{(u_1, y_1), (u_2, y_2), \dots, (u_m, y_m)\}$ управлений и действий, выбранных при этих управлениях, то на основании информации о W_m могут проверяться те или иные гипотезы о предпочтениях АЭ. Задачу определения: оптимальной (по тому или иному критерию) последовательности управлений, их числа, методов «уточнения» параметров модели и т.д. назовем **задачей активной адаптивной идентификации**⁹ (активная адаптивная идентификация существенно использует идею дуального управления).

Пример 2. Рассмотрим задачу стимулирования в одноэлементной активной системе [13]. Целевая функция центра представляет собой разность между доходом от деятельности АЭ и затратами на стимулирование (в данном классе задач управлением со стороны центра является функция стимулирования АЭ $s(x)$): $F(s, y) = H(y) - s(y)$. Целевая функция АЭ является разностью между стимулированием и его затратами: $f(s, y) = s(y) - c(y)$.

Пусть множество допустимых действий АЭ имеет вид: $A = [0; A^+]$, где $0 < A^+ < +\infty$, а затраты АЭ: $c(y) = y^2/2r$, где $r > 0$ – некоторый параметр.

Предположим, что центру известно, что множество M_1 , которому заведомо принадлежит управляемая система задано в виде: " $y \in \hat{I} A \quad c^-(y) \leq c(y) \leq c^+(y)$, то есть $r \in \hat{I} [r^+; r^-]$ (см. рисунок 5).

⁹ Так как рассматриваются модели социально-экономических систем, то использование активной адаптивной идентификации возможно далеко не всегда. По крайней мере, в общем случае критерий эффективности идентификации (критерий эффективности управления) должен учитывать не только эффективность управления, достигнутую в результате идентификации АС, но и потери, вызванные наличием периода активной идентификации. Кроме того, при решении задач активной адаптивной идентификации могут использоваться уже существующие результаты анализа динамических АС, функционирующих в условиях неопределенности [15].

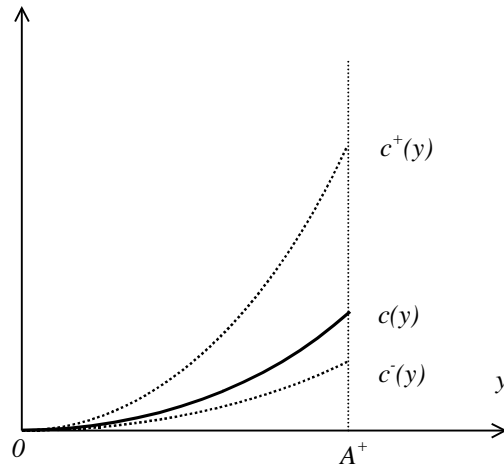


Рис. 5. Функция затрат активного элемента

Из условия неотрицательности целевой функции АЭ следует [13, 14], что в условиях существующей неопределенности оптимальной (и использующей максимальный гарантированный результат) системой стимулирования будет компенсаторная система стимулирования: $S_K(y) = c^+(y)$, а оптимальным реализуемым действием действие $y^+ = \text{Arg max}_{y \in A} \{H(y) - S_K(y)\}$.

Если бы функция затрат АЭ была бы достоверно известна центру, то оптимальным было бы действие $y^* = \text{Arg max}_{y \in A} \{H(y) - c(y)\}$. Потери

эффективности, вызванные неполной информированностью, равны:

$$e = \{H(y^*) - c(y^*)\} - \{H(y^+) - c^+(y^+)\} \geq 0.$$

Если, например, $H(y) = y$, то $e = (r - r^+)/2$.

Итак, мы рассмотрели задачу управления в условиях интервальной неопределенности относительно параметров функции затрат АЭ. Перейдем к рассмотрению активной адаптивной идентификации.

Если центр устанавливает систему стимулирования $S_K(y, \tilde{r}) = y^2/2\tilde{r}$, то АЭ выбирает действие:

$$y^*(\tilde{r}) = \begin{cases} 0, & \text{если } r < \tilde{r} \\ A^+, & \text{если } r > \tilde{r} \end{cases}.$$

Следовательно задача свелась к определению оптимальной последовательности значений параметра \tilde{r} .

2. Встречная идентификация. Идея встречной идентификации заключается в том, что по сути идентификацией своей модели занимается сам АЭ. Результаты идентификации (значения параметров модели) он сообщает центру. Основная проблема здесь заключается в создании заинтересованности АЭ в предоставлении центру достоверной информации о параметрах модели. Методы встречной идентификации основаны, как правило, на механизмах «честной игры», которые обладают свойством неманипулируемости [1, 5, 14].

3. Многоканальная идентификация. Суть подхода к идентификации на основе многоканальных механизмов состоит в получении центром информации о модели АС по нескольким каналам (от нескольких источников), в числе которых могут быть управляемые активные элементы, эксперты, адаптивная компьютерная модель и др. Центр на основе этой информации идентифицирует

модель, которая и применяется для принятия решений. После того как принятое решение реализовано и оценена его эффективность, производится оценка эффективностей моделей, предложенных различными каналами (точнее – оценка эффективности решения, которое было бы принято на основе этой модели). В зависимости от сравнительной эффективности принятого решения и решений каналов производится стимулирование каналов, что побуждает последних предлагать эффективные решения, что, в свою очередь, приводит к улучшению информированности центра о параметрах управляемой системы.

7. Заключение

Полученные результаты позволяют надеяться, что используемый подход (описание, технология и техника исследования) окажется применимым в широком классе моделей управления активными системами.

Использование обобщенных решений позволяет вводить в рассмотрение механизмы с платой за информацию [13], в которых центр (а, следовательно, и исследователь операций) имеет возможность уменьшить неопределенность (сузить класс реальных АС, для которых строится модель) за счет приобретения дополнительной информации. При этом с одной стороны имеет место повышение гарантированной эффективности управления за счет уменьшения класса реальных АС, которым должна быть адекватна модель, а с другой стороны – управляющие возможности центра уменьшаются, так как часть средств может быть потрачена на приобретение информации.

Таким образом, применение именно обобщенных решений, как повышающих эффективность математического моделирования, представляется достаточно важным. Поэтому можно надеяться, что теоретическое изучение устойчивости решений и адекватности модели станет обязательным требованием к исследователю операций, использующему математическое (теоретико-игровое) моделирование как метод исследования сложных социально-экономических систем.

Список литературы

1. Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977.
2. Бурков В.Н., Данев Б., Еналеев А.К., Кондратьев В.В., Нанева Т.Б., Щепкин А.В. Большие системы: моделирование организационных механизмов. М. Наука, 1989.
3. Бурков В.Н., Ириков В.А. Модели и методы управления организационными системами. М.: Наука, 1994.
4. Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981.
5. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять проектами. М.: Синтег, 1997.
6. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Теория активных систем: состояние и перспективы. М.: Синтег, 1999.
7. Гермейер Ю.Б. Игры с противоположными интересами. М.: Наука, 1976.
8. Кононенко А.Ф., Халезов А.Д., Чумаков В.В. Принятие решений в условиях неопределенности. М.: ВЦ АН СССР, 1991.
9. Лотоцкий В.А. Идентификация структур и параметров систем управления // ИКА. 1991. №3-4. С. 30–38.
10. Молодцов Д.А. Устойчивость принципов оптимальности. М.: Наука, 1989.

11. Новиков Д.А. Устойчивость решений и адекватность детерминированных моделей стимулирования в активных системах // Автоматика и Телемеханика. 1999. № 7. С. 115–122.
12. Новиков Д.А. Обобщенные решения задач стимулирования в активных системах. М.: ИПУ РАН, 1998.
13. Новиков Д.А. Стимулирование в социально-экономических системах (базовые математические модели). М.: ИПУ РАН, 1998.
14. Новиков Д.А., Петраков С.Н. Курс теории активных систем. М.: Синтег, 1999.
15. Цыганов В.В. Адаптивные механизмы в отраслевом управлении. М.: Наука, 1991.