УДК 62-50 *Труды Международной конференции «PACO'2001». М.: ИПУ РАН. 2001. С. 81-102.*

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СЛОЖНОСТЬ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ АКТИВНЫМИ СИСТЕМАМИ

В.Н. Бурков
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., д. 65, ИПУ РАН
E-mail: vlab@ipu.rssi.ru

А.Ю. Заложнев
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., д. 65, ИПУ РАН
E-mail: zal@ipu.rssi.ru

Д.А. Новиков
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., д. 65, ИПУ РАН
E-mail: nov@ipu.rssi.ru

Аннотация. В докладе исследуется вычислительная сложность решения задач синтеза оптимальных управлений в рамках теоретико-игровых моделей функционирования активных систем. Обсуждаются эффективные методы решения, приводится ряд примеров задач управления, для которых возможно «распараллеливание» алгоритмов решения.

Ключевые слова: управление активными системами, теория игр, эффективные алгоритмы, параллельные вычисления.

COMPUTATION COMPLEXITY OF ACTIVE SYSTEMS' MANAGEMENT PROBLEMS

V.N. Burkov, Institute of Control Sciences, 65 Profsoyuznaya, Moscow 117997, Russia, E-mail: vlab@ipu.rssi.ru
A.Yu. Zalojnev, Institute of Control Sciences, 65 Profsoyuznaya, Moscow 117997, Russia, E-mail: zal@ipu.rssi.ru
D.A. Novikov, Institute of Control Sciences, 65 Profsoyuznaya, Moscow 117997, Russia, E-mail: nov@ipu.rssi.ru

Abstract. Computational complexity of the optimal control synthesis problems are considered for game-theoretical models of active systems. Efficient algorithms are discussed and several examples of management problems, which allow parallel computations, are presented.

Keywords: active systems management, game theory, effective algorithms, parallel computations.

1. Введение

Теория активных систем (ТАС) - раздел теории управления социально-экономическими системами, изучающий свойства механизмов их функционирования, обусловленные проявлениями активности участников системы [7]. Основным методом исследования в ТАС является математическое (теоретико-игровое) моделирование.

Одной из существенных проблем, возникающих при создании моделей реальных активных систем, является то, что после этапа описания системы исследователь операций сталкивается в общем случае либо с несводимостью сформулированной им задачи управления ни к одной из известных оптимизационных задач, либо с высокой вычислительной сложностью семейства тех оптимизационных задач, к которым может быть сведена исходная задача управления (см. примеры ниже в четвертом разделе настоящей работы). В обоих случаях наиболее распространенным выходом является попытка либо «угадывания» решения с последующим формальным обоснованием его оптимальности, либо использование эвристик с последующей оценкой гарантированной эффективности полученного решения. Если перечисленные методы неприменимы, то есть не удается найти аналитического решения задачи управления, то приходится анализировать специфику задачи с тем, чтобы декомпозировать ее на набор частных подзадач, которые численно могли бы решаться параллельно.

В настоящей работе приводится постановка задачи управления в активной системе (АС) – см. второй раздел, и обсуждаются методические приемы ее упрощения и аналитического решения (третий раздел). Четвертый раздел содержит ряд примеров, иллюстрирующих как использование этих приемов при решении частных задач, так и возможность применения параллельных вычислений при численном поиске решения. Заключение содержит обсуждение основных результатов и перспектив дальнейших исследований.

2. Модель активной системы и задача управления

Рассмотрим задачу управления АС, состоящей из управляющего органа – центра – на верхнем уровне иерархии и одного управляемого субъекта – активного элемента (АЭ) – на нижнем уровне. Пусть состояние системы описывается переменной $y \in A$, принадлежащей допустимому множеству A. Предположим для простоты, что состояние системы зависит только от управляющих воздействий $u \in U$: $y \in P(u)$. Предположим также, что на множестве $U \times A$ задан функционал $F(u, y)$, определяющий эффективность функционирования системы. Величина $K(u) = \max\limits_{y \in P(u)} F(u, y)$ называется эффективностью (гарантированной эффективностью называется величина $\min\limits_{y \in P(u)} F(u, y)$ – см. обсуждение различий между эффективностью и гарантированной эффективностью в [17]) управления $u \in U$. Тогда задача управляющего органа заключается в выборе такого допустимого управления u^*, которое максимизировало бы значение его эффективности при условии, что известна реакция системы $P(\cdot)$ на управляющие воздействия: $K(u) \to \max\limits_{u \in U}$.

В активных системах управляемые субъекты (точнее говоря, хотя бы один субъект) обладают свойством активности, в том числе - свободой выбора своего состояния. Кроме того, элементы АС обладают собственными интересами и предпочтениями, то есть осуществляют выбор состояния целенаправленно. Соответственно, модель системы $P(\cdot)$ должна учитывать проявления активности управляемых субъектов. Проявления эти описываются следующим образом – считается, что управляемые субъекты стремятся к выбору таких своих состояний, которые являются наилучшими с точки зрения их предпочтений при заданных управляющих воздействиях, а управляющие воздействия, в свою очередь, зависят от состояний управляемых субъектов. Одним из важнейших проявлений активности также является способность управляемых субъектов «предсказывать» (в рамках имеющейся информации) поведение управляющего органа – его реакцию на состояние системы и т.д.

Таким образом, можно считать, что в одноэлементной АС поведение управляемого субъекта (модель АС в узком смысле) описывается стремлением максимизировать выбором состояния y Î A свою целевую функцию $f(u, y)$ при известном управлении u Î U, то есть (в настоящей работе принята независимая внутри подразделов нумерация формул и утверждений):

(1) $$P(u) = Arg \max_{y \in A} f(u, y).$$

Действия, выбираемые АЭ из множества $P(u)$ при использовании центром управления u Î U называются реализуемыми данным управлением действиями [12, 13].

Если управляющий орган имеет модель реальной активной системы, которая адекватно описывает ее поведение (вопросы адекватности моделей и устойчивости решений исследовались в [11, 12]), то задача управления АС (задача синтеза оптимального управляющего воздействия) сводится к сформулированной выше – выбрать оптимальное управление $u^* = \hat{u}(y)$ Î U, то есть допустимое управление, максимизирующее эффективность:

(2) $$\max_{y \in P(u)} F(u, y) \text{ ® } \max_{u \in U}.$$

Сделав маленькое отступление, отметим, что теоретико-игровая формулировка задачи управления в многоэлементной АС отличается от одноэлементной задачи (2) лишь определением модели $P(u)$. Пусть $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ Î $A' = \prod_{i=1}^{n} A_i$ – вектор стратегий (действий) n активных элементов, компоненты которых они выбирают одновременно и независимо. Предположим, что целевая функция i-го АЭ $f_i(y, u)$, отражает его предпочтения на множестве A'´U. Определим $P(u)$ как множество решений игры АЭ, то есть как множество равновесных при заданном управлении u Î U стратегий АЭ. В одноэлементной АС $P(u)$ является множеством точек максимума целевой функции АЭ (см. выражение (1)), в многоэлементных системах - множеством равновесий (в максиминных стратегиях, или доминантных стратегиях, или равновесий Нэша, Байеса, Штакельберга и т.д. - в зависимости от конкретной задачи). Множество решений игры отражает предположения центра (исследователя операций) о поведении управляемых субъектов (активных элементов) при заданном управлении.

Отметим, что приведенная теоретико-игровая формулировка задачи управления АС, в которой центр является метаигроком, обладающим правом первого хода и имеющим возможность назначать свою стратегию, которая зависит от стратегий АЭ: $u = \hat{u}(y)$, является игрой типа $Г_2$ в терминологии теории иерархических игр [8, 9]. Зависимость $\hat{u}(\cdot)$ определяет механизм управления в узком смысле [7].

Два важных частных случая общей постановки составляют задачи стимулирования и задачи планирования. В задаче стимулирования управление $\hat{u}(\cdot)$ содержательно соответствует отображению множества действий АЭ во множество допустимых вознаграждений (штрафов), которые входят в целевые функции участников АС аддитивно, в задаче планирования – отображению множества сообщений АЭ во множество допустимых планов (желательных состояний АЭ, коллективных решений и т.д.) [7].

Закончив краткое качественное обсуждение постановки задачи управления в активных системах, перейдем к описанию методов ее решения и оценке вычислительной сложности.

3. Общие подходы к решению задач управления активными системами

При решении задачи управления

(1) $$\max_{y \in P(u)} F(u, y) \to \max_{u \in U},$$

(2) $$P(u) = Arg \max_{y \in A} f(u, y).$$

возникают две принципиальные (с точки зрения вычислительной сложности) трудности – определение множества решений игры (2) и поиск управления, максимизирующего эффективность в выражении (1). Накопленный в ТАС опыт решения этих проблем заключается в следующем.

Определим следующие величины и множества:

(3) $$X(y) = \{u \in U \mid y \in P(u)\},$$

(4) $$G(y) = \max_{u \in X(y)} F(u, y),$$

(5) $$P(U_1) = \bigcup_{u \in U_1} P(u),$$

где $U_1 \subseteq U$ – некоторое подмножество множества допустимых управлений U.

Задачу поиска $\max_{u \in U} \max_{y \in P(u)} F(u, y)$ можно записать как $\max_{y \in P(U)} G(y)$, то есть оптимально следующее управление:

(6) $$u^* = arg \max_{u \in X(y^*)} F(u, y^*),$$

где y^* - оптимальное реализуемое действие:

(7) $$y^* = arg \max_{y \in P(U)} G(y).$$

Предположим, что $P(U) = A$, то есть ограничения на управления таковы, что достижимы любые допустимые действия.

Обозначим $K^* = F(u^*, y^*)$ – максимальное значение критерия эффективности,

(8) $$\tilde{u}(y, \cdot) = arg \max_{u \in X(y)} F(u, y)$$

– минимальные затраты центра на управление по реализации действия $y \in A$. Тогда задача (6)-(7) может быть записана в виде

$$y^* = \arg \max_{y \in A} F(\breve{u}(y, \cdot), y). \tag{9}$$

Казалось бы, задача (8)-(9) не намного проще исходной задачи (1)-(2), однако для нее могут быть сформулированы простые и содержательно интерпретируемые принципы поиска решения. Видно, что основная проблема (с точки зрения вычислительной сложности) заключается в вычислении (8), в то время как поиск оптимального реализуемого действия (9) при известной аналитической зависимости $\breve{u}(y, \cdot)$, как правило, не вызывает затруднений. Поэтому основная идея заключается в том, чтобы либо угадать класс «простых» (см. ниже) управлений, содержащий оптимальное решение, либо сократить перебор по множеству возможных управлений (большинство задач в дискретном случае характеризуется экспоненциальной сложностью) за счет использования эффективных (полиномиальных алгоритмов), что возможно, естественно, при наложении дополнительных условий на параметры модели АС. Второй вариант основывается, в основном, на использовании результатов дискретной оптимизации и теории графов и иллюстрируется примерами частных задач управления, описываемых ниже в разделах 4.1 и 4.2. Поэтому остановимся более подробно на первом варианте.

Первый вариант, заключающийся в угадывании «простых» (например, параметрических, и/или характеризуемый дополнительными, помимо эффективности, свойствами) управлений, обладает тем преимуществом, что, если удается доказать, что для любого допустимого управления существует управление из этого класса, обладающее не меньшей эффективностью, то можно сконцентрировать внимание только на этом классе управлений и искать в нем оптимальное управление.

Хрестоматийными примерами дополнительных свойств управлений являются – согласованность (заключающаяся в том, что выбираемые АЭ совпадают с планами, то есть действиями, рекомендуемыми центром) для задачи стимулирования [1, 5] и неманипулируемость (заключающаяся в том, что сообщения активных элементов, являющиеся их действиями, центру о неизвестных ему параметрах достоверны) для задачи планирования [5, 13].

Формально утверждение об оптимальности класса $U_1 \subseteq U$ допустимых управлений можно сформулировать как: $\breve{u}(y^*, \cdot) \in U_1$, где $y^* \in A$ определяется (9), то есть как следствие условия: $\exists\, (u_1 \in U_1, y_1 \in A): F(u_1, y_1) = K^*$. Для этого, очевидно, достаточно выполнения следующего условия:

$$\forall\, y \in A \;\; \exists\, u_1 \in U_1: u_1 = \breve{u}(y, \cdot). \tag{10}$$

Несмотря на кажущуюся «грубость» достаточного условия (10), оно имеет место для многих классов управлений во многих интересных с теоретической точки зрения и важных с практической точки зрения задачах управления активными системами. Примерами могут служить классы компенсаторных и скачкообразных систем стимулирования в задачах стимулирования [12, 13, 16, 17], класс пропорциональных механизмов распределения ресурса и класс линейных механизмов активной экспертизы в соответствующих задачах планирования [4, 6, 10, 13], рассматриваемая ниже в разделе 4.3 задача стимулирования в многоэлементной АС (для которой формулируется принцип декомпозиции игры АЭ, заключающийся в том, что класс U_1 управлений оптимален и обладает тем свойством, что соответствующее множество решений игры является равновесием в доминантных стратегиях, то есть АЭ получают возможность действовать независимо, а центр – декомпозировать (решать параллельно) задачу (9)) и др.

В ряде случаев, примерами которых являются упомянутая выше задача стимулирования в многоэлементной АС и задача управления многоканальными АС, описываемая ниже в разделе 4.4, специфика модели АС такова, что центр имеет возможность решать составляющие задачи управления одновременно и независимо для каждого из управляемых субъектов, что дает возможность осуществлять параллельные вычисления.

Перейдем к рассмотрению ряда примеров, иллюстрирующих использование рассмотренных в настоящем разделе общих подходов к решению задач управления АС.

4. Примеры эффективного решения задач управления активными системами

Ниже в настоящем разделе приведены примеры частных моделей АС, для которых существуют эффективные алгоритмы решения (см. подразделы 4.1 и 4.2), а также моделей, для которых возможно «распараллеливание» задач численного поиска решений (см. подразделы 4.3 и 4.4).

4.1. Ранговые системы стимулирования

В большинстве рассматриваемых в теории активных систем (АС) [1, 5, 12] и в теории контрактов [12, 13] моделей стимулирования вознаграждения управляемых субъектов - активных элементов (АЭ) - со стороны управляющего органа - центра - зависят от абсолютных значений их стратегий - действий. В то же время на практике достаточно распространены *ранговые системы стимулирования* (РСС) [3, 16], в которых величина индивидуального вознаграждения АЭ определяется либо принадлежностью его действия некоторому наперед заданному множеству - так называемые нормативные РСС, либо местом, занимаемым АЭ в упорядочении действий всех элементов - так называемые соревновательные РСС. В настоящем разделе нас будет интересовать следующий аспект: так как нормативные РСС (НРСС) являются специфическим подклассом систем стимулирования, то возникает вопрос - какова их эффективность в сравнении с другими системами стимулирования.

Постановка задачи стимулирования. Рассмотрим следующую теоретико-игровую модель стимулирования в АС, состоящей из центра и n АЭ. Стратегией i-го *АЭ* является выбор действия y_i Î A_i, где A_i – множество допустимых действий, i Î $I = \{1, 2, ..., n\}$ – множество АЭ. Стратегией центра является выбор системы стимулирования - набора функций стимулирования $s_i(y)$, i Î I, где $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ Î $A' = \prod_{i=1}^{n} A_i$, i Î I. Целевая функция i-го *АЭ* $f_i(y)$ представляет собой разность между стимулированием и его индивидуальными затратами $c_i(y_i)$, т.е. $f_i(y) = s_i(y) - c_i(y_i)$, i Î I.

Множество действий $P(s)$ Í A', выбираемых АЭ при данной системе стимулирования (то, какие действия будут выбирать АЭ, зависит от используемой в той или иной модели концепции равновесия игры - см. конкретизации ниже), называется множеством реализуемых действий (множеством решений игры). Для действия y^* Î $P(s)$, реализуемого системой стимулирования s, величина $J_s(y^*) = \sum_{i=1}^{n} s_i(y^*)$ называется затратами центра на стимулирование. Если при заданных ограничениях на стимулирование некоторое действие не реализуемо, то соответствующие затраты на стимулирование считаются равными бесконечности.

Целевая функция центра зависит от стратегий всех участников АС: $F(s, y) = H(y) - J_s(y)$, где $H(y)$ - функция дохода центра. Эффективностью системы стимулирования $K(s)$ в рамках гипотезы благожелательности [6, 17] является максимальное значение целевой функции центра на множестве решений игры АЭ: $K(s) = \max_{y \in P(s)} F(s,\ y)$. Общие методы решения задач стимулирования в многоэлементных АС описаны в [16]. Для последующего изложения существен следующий достаточно очевидный факт (см. третий раздел): система стимулирования, реализующая действия с меньшими для центра «затратами», имеет более высокую эффективность. Следовательно, для сравнения эффективностей различных систем стимулирования достаточно сравнить соответствующие затраты на стимулирование.

Введем следующие предположения, которые, если не оговорено особо, будут считаться выполненными в ходе дальнейшего изложения материала настоящего подраздела.

А.1. Множества возможных действий АЭ одинаковы: $A_i = A$ = Â$_+^1$, i Î I.

А.2. Функции затрат АЭ положительнозначны и монотонны.

А.3. Затраты АЭ от выбора нулевого действия равны нулю.

<u>Универсальные нормативные ранговые системы стимулирования.</u> Нормативные РСС (НРСС) характеризуются наличием процедур присвоения рангов АЭ в зависимости от выбираемых действий и одинаковым поощрением АЭ, имеющих один и тот же ранг. Пусть Á = $\{1, 2, ..., m\}$ - множество возможных рангов, где m - размерность НРСС, $\{q_j\}$, $j = \overline{1,m}$ - совокупность m неотрицательных чисел, соответствующих вознаграждениям за "попадание" в различные ранги; d_i: A ® Á, i Î I - процедуры классификации (присвоения рангов). НРСС называется кортеж $\{m$, Á, $\{d_i\}, \{q_j\}\}$.

В [18] доказано, что для любой системы стимулирования существует НРСС не меньшей эффективности. Идея доказательства этого факта заключается в следующем. Пусть имеется произвольная допустимая система стимулирования, которая реализует некоторый вектор действий АЭ с некоторыми суммарными затратами на стимулирование. Легко показать, что можно подобрать: число m, вектор вознаграждений $q=(q_1, q_2, ..., q_m)$ и совокупность процедур классификации $\{d_i\}$ - в общем случае различных для различных АЭ, таких, что соответствующая НРСС будет реализовывать тот же вектор действий с теми же затратами на стимулирование, что и исходная система стимулирования (см. детали в [18]). Ключевым при этом является то, что процедуры классификаций $d_i(\cdot)$, i Î I, действий разных АЭ могут быть различны.

То, что центр использует различные процедуры присвоения рангов, может показаться «не справедливым» с точки зрения АЭ. Действительно, например, выбирая одинаковые действия, два АЭ могут иметь различные ранги и, следовательно, получать различные вознаграждения. Более «справедливой» представляется анонимная НРСС, в которой процедура классификации одинакова для всех АЭ, т.е. так называемая универсальная НРСС (УНРСС), при использовании которой элементы, выбравшие одинаковые действия, имеют один и тот же ранг и, следовательно, получают одинаковые вознаграждения.

Введем вектор $Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_m)$ такой, что $0 \le Y_1 \le Y_2 \le ... \le Y_m < +\infty$, который определяет некоторое разбиение множества A. УНРСС задается кортежем $\{m, \{Y_j\}, \{q_j\}\}$, причем вознаграждение i-го АЭ s_i определяется следующим образом: $s_i(y_i) = \sum_{j=0}^{m} q_j I(y_i \in [Y_j, Y_{j+1}))$, где $I(\cdot)$ - функция-индикатор, $Y_0 = 0$, $q_0 = 0$. Универсальная НРСС называется прогрессивной [ ], если $q_0 \le q_1 \le q_2 \le ... \le q_m$. Исследуем эффективность УНРСС.

Так как УНРСС кусочно-постоянна, то из монотонности функций затрат АЭ следует, что АЭ будут выбирать действия с минимальными затратами на соответствующих отрезках. Иначе говоря, условно можно считать, что при фиксированной системе стимулирования множество допустимых действий равно $Y = \{Y_1, Y_2, ..., Y_m\}$, причем так как в силу А.3 $c_i(0) = 0$, то следует положить $q_0 = 0$. Действие y_i^*, выбираемое i-м АЭ, определяется парой (Y, q), т.е. имеет место $y_i^*(Y,q) = Y_{k_i}$, где $k = 0$ соответствует нулевому действию и

$$k_i = arg \max_{k=\overline{0,m}} \{q_k - c_i(Y_k)\}, i \in I. \quad (1)$$

Обозначим $y^*(Y, q) = (y_1^*(Y, q), y_2^*(Y, q), ..., y_n^*(Y, q))$. Задача синтеза оптимальной УНРСС заключается в выборе размерности УНРСС m и векторов $q \ge 0$ и Y, удовлетворяющих заданным ограничениям, которые максимизировали бы целевую функцию центра:

$$F(q, y^*(Y,q)) \to \max_{Y,q}. \quad (2)$$

Фиксируем некоторый вектор действий $y^* \in A'$, который мы хотели бы реализовать УНРСС. Известно, что минимально возможные (среди всех систем стимулирования) затраты на стимулирование по реализации этого вектора соответствуют использованию компенсаторной системы стимулирования [12, 13] (т.е. системы стимулирования, компенсирующей затраты и являющейся "абсолютно оптимальной", для которой используется индекс "K") и равны:

$$J_K(y^*) = \sum_{i=1}^{n} c_i(y_i^*). \quad (3)$$

Из того, что при использовании УНРСС АЭ выбирают действия только из множества Y, следует, что минимальная размерность системы стимулирования должна быть равна числу попарно различных компонент вектора действий, который требуется реализовать. Следовательно, использование УНРСС размерности, большей, чем n, нецелесообразно. Поэтому ограничимся системами стимулирования, размерность которых в точности равна числу АЭ, т.е. положим $m = n$.

Для фиксированного $y^* \in A'$ положим $Y_i = y_i^*$, $i \in I$, и обозначим $c_{ij} = c_i(Y_j)$, $i, j \in I$. Из определения реализуемого действия следует, что для того, чтобы УНРСС реализовывала вектор $y^* \in A'$, $y^* > 0$, необходимо и достаточно выполнение следующей системы неравенств, обеспечивающей совпадение множества реализуемых действий и множества равновесий Нэша ($j = 0$ соответствует нулевому действию):

(4) $$q_i - c_{ii} \geq q_j - c_{ij},\ q_i \geq 0,\ i \in I,\ j = \overline{0,n}.$$

Запишем (4) в виде

(5) $$q_j - q_i \leq a_{ij},\ q_i \geq 0,\ i \in I,\ j = \overline{0,n},$$

где $a_{ij} = c_{ij} - c_{ii}$. Обозначим через $\{q_i(y^*)\}$ решение системы неравенств (5). Тогда суммарные затраты на стимулирование по реализации действия y^* УНРСС равны

(6) $$J_{УНРСС}(y^*) = \sum_{i=1}^{n} q_i(y^*).$$

Задача синтеза оптимальной (минимальной) УНРСС заключается в минимизации (6) при условии (5). Вычислительная сложность этой задачи комбинаторной оптимизации (при попытке ее «лобового» решения) достаточно высока, однако для нее существует приводимый ниже эффективный алгоритм.

Из того, что $q_i \geq c_{ii}$, немедленно следует, что $\forall\ y^* \in A'$ выполнено: $J_{УНРСС}(y^*) \geq J_K(y^*)$, т.е. минимальные затраты на стимулирование по реализации любого вектора действий АЭ при использовании универсальных нормативных систем стимулирования не ниже, чем при использовании компенсаторных систем стимулирования.

Таким образом, исследование УНРСС свелось к необходимости ответа на следующие вопросы - какие векторы действий АЭ могут быть реализованы в этом классе систем стимулирования (иначе говоря, для каких действий система неравенств (5) имеет решение) и в каких случаях УНРСС являются оптимальными во всем классе допустимых систем стимулирования.

Введем в рассмотрение n-вершинный граф $G_a(y^*)$, веса дуг в котором определяются $\|a_{ij}(y^*)\|$. Задача минимизации (6) при условии (5) является задачей о минимальных неотрицательных потенциалах вершин графа G_a, для существования решения которой необходимо и достаточно отсутствие контуров отрицательной длины [2]. Таким образом, справедлива следующая лемма (формальные результаты настоящего подраздела следуют в основном [3, 16]).

<u>Лемма 1.</u> Для того чтобы вектор $y^* \in A'$ был реализуем в классе УНРСС необходимо и достаточно, чтобы граф $G_a(y^*)$ не имел контуров отрицательной длины.

Рассмотрим следующую задачу о назначении [2]: определить $x_{ij} \in \{0; 1\}$, $i, j, \in I$;

(7) $$\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \to \min_{\{x_{ij}\}}$$

(8) $$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j \in I;$$

(9) $$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i \in I.$$

Лемма 2. Для того чтобы $x_{ii} = 1$, $i \in I$, $x_{ij} = 0$, $j \neq i$, необходимо и достаточно, чтобы граф $G_a(y^*)$ не имел контуров отрицательной длины.

Следствием лемм 1 и 2 является следующая теорема, характеризующая множество всех действий, реализуемых УНРСС (отметим, что при отказе от предположения А.3 результат теоремы 1 остается в силе).

Теорема 1. Для того чтобы вектор $y^* \in A'$ был реализуем в классе УНРСС, необходимо и достаточно, чтобы он являлся решением задачи о назначении (7)-(9).

Из [2] известно, что в оптимальном решении задачи (5)-(6) минимальна не только сумма потенциалов вершин графа G_a (суммарные затраты на стимулирование), но и минимальны все потенциалы вершин (индивидуальные вознаграждения). То есть решение задачи о назначении (7)-(9) задачи (5)-(6) минимизирует не только суммарные выплаты АЭ со стороны центра, но и обеспечивает минимально возможные значения всех индивидуальных вознаграждений.

Приведенные выше результаты характеризуют множество действий, реализуемых УНРСС. Исследуем теперь эффективность этого класса систем стимулирования. Имея результат теоремы 1, мы имеем возможность предложить алгоритм вычисления минимальных потенциалов и, следовательно, количественно оценить потери в эффективности.

Рассмотрим задачу (7)-(9). Перенумеруем АЭ таким образом, чтобы оптимальным было диагональное назначение $\forall j \in I \quad i_j = j \quad (x_{ii} = 1,\ i \in I)$. Поставим в соответствие ограничению (8) двойственную переменную u_j, $j \in I$, а ограничению (9) - двойственную переменную ν_i, $i \in I$. Ограничения двойственной к (7)-(9) задачи имеют вид $u_j - \nu_i \leq a_{ij}$, $i, j \in I$. Заметим, что так как $x_{ii} = 1$, $i \in I$, то $u_i - \nu_i = a_{ii} = 0$, а значит $u_i - \nu_i = \theta_i$. Используя этот факт, определим следующий алгоритм.

Шаг 0. $u_j = c_{jj}$, $j \in I$.

Шаг 1. $\nu_i := \max\limits_{j \in I} \{u_j - a_{ij}\}$, $i \in I$.

Шаг 2. $u_j := \min\limits_{i \in I} \{\nu_i + a_{ij}\}$, $j \in I$.

Последовательное повторение шагов 1 и 2 алгоритма конечное число (очевидно, не превышающее n) раз даст оптимальное решение задачи (5)-(6).

Приведенный выше алгоритм позволяет решать задачу поиска минимальных неотрицательных потенциалов вершин графа G_a, удовлетворяющих условию (5), т.е. реализующих заданный вектор действий АЭ. С одной стороны, доказанный выше критерий реализуемости заданных действий (теорема 1) и алгоритм синтеза оптимальной УНРСС применимы в широком классе активных систем, так как при их доказательстве вводились чрезвычайно слабые предположения о свойствах элементов АС (см. предположения А.1 и А.2). С другой стороны, для ряда более узких классов АС, рассматриваемых ниже, существуют более простые алгоритмы синтеза оптимальных УНРСС. Обозначим

$$c'_i(y_i) = \frac{dc_i(y_i)}{dy_i},\ i \in I, \tag{10}$$

и введем следующее предположение:

А.4. Существует упорядочение АЭ такое, что

$$\forall\ y \in A\ \ c'_1(y) \geq c'_2(y) \geq \dots \geq c'_n(y). \tag{11}$$

Предположениям А.2-А.4 удовлетворяют, например, такие распространенные в экономико-математическом моделировании функции затрат АЭ, как: $c_i(y_i) = k_i\, c(y_i)$, $c_i(y_i) = k_i\, c(y_i/k_i)$, где $c(\cdot)$ - строго монотонная дифференцируемая функция (иногда добавляется требование выпуклости), а коэффициенты упорядочены: $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$ (частными случаями являются линейные функции затрат, функции затрат типа Кобба-Дугласа и др.).

Фиксируем некоторый вектор $y^* \in A'$, удовлетворяющий следующему условию:

$$y_1^* \leq y_2^* \leq \dots \leq y_n^*. \tag{12}$$

<u>Лемма 3.</u> Если выполнены предположения А.1, А.2 и А.4, то в задаче (7)-(9) оптимально диагональное назначение.

Лемма 3 дает простое решение задачи о назначении (7)-(9): в случае, когда выполнено предположение А.4, АЭ, имеющим большие удельные затраты, должны назначаться меньшие действия. Теорема 1 и лемма 3 позволяют охарактеризовать множество действий, реализуемых УНРСС в рамках предположения А.4.

<u>Следствие.</u> Если выполнены предположения А.1, А.2 и А.4, то УНРСС реализуемы такие и только такие действия, которые удовлетворяют (12).

В АС, удовлетворяющих предположениям А.1-А.4 (включая А.3!), для определения оптимальных потенциалов может быть использована следующая рекуррентная процедура, являющаяся частным случаем (соответствующим А.3-А.4) общего приведенного выше алгоритма: $q_1 = c_{11}$, $q_i = c_{ii} + \max\limits_{j<i} \{q_j - c_{ij}\}$, $i = \overline{2,n}$.

<u>Лемма 4</u>. Если выполнены предположения А.1-А.4, то для решения задачи синтеза оптимальной УНРСС имеет место: $\forall\ i = \overline{2,n}\ \ \max\limits_{j<i} \{q_j - c_{ij}\} = q_{i-1} - c_{ii-1}$.

Следствием леммы 4 является следующее простое выражение для индивидуальных вознаграждений для УНРСС, реализующей вектор $y^* \in A'$ в АС, удовлетворяющей предположениям А.1-А.4:

$$q_i = \sum_{j=1}^{i} c_j(y_j^*) - c_j(y_{j-1}^*). \tag{13}$$

Подставляя (13) в (6), получаем, что потери $D(УНРСС, QK, y^*)$ от использования УНРСС (по сравнению с компенсаторными) равны:

$$(14) \qquad D(УНРСС, QK, y^*) = \sum_{i=1}^{n} \{ \sum_{j=1}^{i} (c_j(y_j^*) - c_j(y_{j-1}^*)) - c_i(y_{i-1}^*) \}.$$

Совокупность полученных выше результатов сформулируем в виде следующей теоремы.

<u>Теорема 2.</u> Если выполнены предположения А.1 - А.4, то:

а) в классе УНРСС реализуемы такие и только такие действия, которые удовлетворяют условию (12);

б) оптимальное решение задачи стимулирования при этом определяется выражением (13);

в) превышение затратами на стимулирование минимально необходимых определяется выражением (14);

г) оптимальная УНРСС является прогрессивной.

Таким образом, в настоящем подразделе для задачи синтеза оптимальной универсальной нормативной ранговой системы стимулирования показано существование эффективного алгоритма ее решения, основывающегося на сведении ее к задаче о назначении.

4.2. Механизмы самоокупаемости

Одной задач, стоящих перед руководством проекта, является минимизация затрат на его реализацию. Если проект состоит из n операций и заданы их стоимости $\{b_i\}_{i=1}^n$, то общие затраты на весь проект равны $b = \sum_{i=1}^{n} b_i$. Отметим, что величина b не зависит от порядка выполнения операций.

Если проект-менеджер (ПМ) имеет в своем распоряжении на момент начала проекта сумму R_0 и R_0 ³ b, то имеющихся средств хватит на выполнение всех операций в любой допустимой последовательности. Если же $R_0 < b$, то возникает задача разработки *механизма самоокупаемости* (самофинансирования) [6], определяющего оптимальную последовательность выполнения операций, в которой выполнение операций частично финансируется за счет доходов от уже выполненных операций.

Пусть i-я операция описывается кортежем (b_i, a_i, t_i), где a_i ³ 0 - доход от i-ой операции, t_i - ее продолжительность. Будем различать прибыльные (a_i ³ b_i) и убыточные ($a_i < b_i$) операции. Тогда, в случае нехватки исходных средств, некоторые операции могут выполняться за счет доходов от уже выполненных операций. Идеалом, в некотором смысле, является полностью автономный проект, в котором самофинансирование позволяет выполнить его целиком, без привлечения внешних источников.

Для простоты предположим, что не существует технологических ограничений на последовательность выполнения операций - каждая операция может начинаться в момент окончания другой операции, причем произвольное число операций может вестись параллельно.

Обозначим t_i ³ 0 - время начала i-ой операции, R - величину заемных средств. Предположим, что ПМ может получить беспроцентные кредиты в любом объеме и в произвольный момент времени (дисконтирование отсутствует).

Финансовый баланс в момент времени t имеет вид:

(1) $$f(t) = R_0 + R - \sum_{i=1}^{n} b_i I(t \geq t_i) + \sum_{i=1}^{n} a_i I(t \geq T_i + t_i),$$

где $I(t \geq t_i) = \begin{cases} 1, t \geq t_i \\ 0, t < t_i \end{cases}$ - функция-индикатор.

Понятно, что для возможности выполнения операций финансовый баланс должен быть неотрицательным в любой момент времени, то есть для допустимого баланса должно выполняться $f(t)$ ³ 0 " t Î $[0, t]$, где t - время выполнения проекта.

В рамках описанной модели возникает целый ряд оптимизационных задач.

Например, можно решать задачу выбора последовательности выполнения операций (то есть времен начала их выполнения), минимизирующей суммарную величину привлеченных средств:

(2) $$\begin{cases} R \to \min\limits_{\{t_i\}} \\ f(t) \geq 0, \forall t \geq 0 \end{cases}.$$

Может быть поставлена задача минимизации времени выполнения проекта $T = \max\limits_{i=1,n} \{t_i + t_i\}$ только за счет собственных средств, или с фиксированным значением привлеченных средств (отметим, что при последовательном выполнении операций время завершения проекта не зависит от порядка выполнения операций):

(3) $$\begin{cases} T \to \min\limits_{\{t_i\}} \\ R = const, \quad f(t) \geq 0, \forall t \geq 0 \end{cases}.$$

Таким образом, возможны самые разные постановки. Во всех оптимизационных задачах требуется найти оптимальную последовательность выполнения операций, то есть оптимальный механизм самофинансирования. При введении дисконтирования, по аналогии с (3), можно максимизировать конечную (дисконтированную) прибыль и т.д. При наличии технологических ограничений, они должны быть добавлены в ограничения задач (2)-(3).

Следует отметить, что на сегодняшний день не существует универсальных и эффективных методов решения задач из рассматриваемого класса. Понятно, что так как число допустимых вариантов (последовательностей) конечно, то все они могут быть найдены простым перебором. Однако, даже при не очень большом числе операций (порядка нескольких десятков) простой перебор оказывается чрезвычайно трудоемким. Поэтому при решении задач сетевого планирования используют методы целенаправленного перебора, ветвей и границ и др. Рассмотрим в качестве примера использование для решения задачи (3) следующего эвристического алгоритма.

1. Определяем все комбинации операций, которые могут быть начаты (являются допустимыми с точки зрения бюджетного ограничения) в нулевой момент времени.

2. Для каждого из допустимых вариантов определяем в момент окончания одной из операций, какие из еще невыполненных операций могут быть начаты. Если ни одна из операций не может быть начата, то для данного варианта ждем момента окончания следующей операции и т.д. до тех пор, пока все операции не закончатся и/или ни одна не сможет быть начата.

Применение шагов 1 и 2 дает все допустимые с точки зрения балансового ограничения варианты (получаем дерево вариантов). Среди висячих вершин могут оказаться и те, которым соответствует выполнение не всех операций. Сравнивая продолжительности тех вариантов - висячих вершин, которые соответствуют выполнению всех операций проекта, определяем решение задачи (3) - варианты минимальной продолжительности.

В общем случае описанный выше алгоритм является более эффективным, чем простой перебор, так как мы сразу отсеивали неудовлетворительные варианты и не рассматривали деревья, для которых они являются корневыми вариантами. Можно предложить и другие эвристические алгоритмы численного решения задачи (3), вычислительная сложность которых зависит от соотношения исходных параметров.

Аналитические методы получения оптимального решения существуют лишь для задачи (2), алгоритм решения которой описывается ниже.

Рассмотрим $(n+1)$-вершинный граф, в котором вершины $1, 2, \dots, n$ соответствуют операциям, вершина 0 - нулевая операция. Предположим, что с нулевой вершины начинается реализация проекта, ее затраты и доход равны 0 ($a_0 = 0$). Пусть $m = (0, i_1, i_2, \dots, i_n, 0)$ - произвольный гамильтонов контур.

Обозначим $M_j(m) = \sum_{k=1}^{j} \left(b_{i_k} - a_{i_{k-1}}\right)$ - сумма длин первых j дуг контура m. Заход некоторой дуги в вершину i ($i = \overline{1,n}$) требует затрат b_i, исход дуги из вершины i соответствует получению дохода a_i. Так как в рассматриваемой модели все операции могут выполняться одновременно (не существует технологических ограничений на последовательность их выполнения), то, очевидно, минимуму привлеченных средств будет соответствовать последовательное выполнение операций (время реализации всего проекта при этом равно $T = \sum_{i=1}^{n} t_i$), а граф, построенный для нашей задачи, будет полным и симметричным.

Таким образом, задача свелась к определению оптимальной последовательности выполнения операций, то есть такой последовательности, при которой величина привлеченных средств будет минимальной. Последовательному выполнению всех операций (ни одна из операций не выполняется дважды) соответствует некоторый гамильтонов контур. Если под длиной дуги $\boldsymbol{l}_{ij}$ понимать разность между затратами на выполнение j-ой операции и доходом от i-ой операции, то есть $\boldsymbol{l}_{ij} = b_j - a_i$, то легко видеть, что полученный граф является псевдопотенциальным. Действительно, любой гамильтонов контур соответствует выполнению всех операций. Независимо от последовательности суммирования длин дуг, получим инвариантную (не зависящую от последовательности, то есть контура) величину $\left(b - \sum_{i=1}^{n} a_i\right)$. Тогда величина $M_j(m)$ есть взятый с обратным чистый доход от выполнения первых $(j - 1)$ операций контура m и начала j-ой операции.

С другой стороны, $M_j(m)$ может интерпретироваться как нехватка собственных средств на выполнение j-ой (в контуре m) операции. Если $M_j(m) > 0$, то именно такую величину придется занимать у третьей стороны. Если $M_j(m)$ £ 0, то собственных средств ПМ хватает на выполнение j-ой операции.

Предположим теперь, что задача ПМ заключается в определении последовательности выполнения операций, при которой максимальная величина однократного заема внешних средств минимальна при условии, что собственные средства отсутствуют (то есть $R_0 = 0$). Формально эту задачу можно представить в следующем виде: определить гамильтонов контур μ, имеющий минимальное значение $M(m) = \max_{j=1,n} M_j(m)$.

Решение этой задачи дается теоремой о псевдопотенциальных графах [2]. Система неравенств, отражающих бюджетные ограничения, в рассматриваемой модели может интерпретироваться следующим образом. Первое неравенство утверждает, что минимальная величина привлеченных средств не может быть меньше, чем затраты на операцию, выполняемую первой. Действительно, мы предположили, что величина собственных средств равна нулю (если она не равна нулю, то на нее уменьшится M_{min}). Следовательно, на первую операцию придется затратить b_{i_1}, так как никакие операции еще не выполнялись (нет доходов от их выполнения). Второе неравенство требует, чтобы затраты b_{i_2} на выполнение второй операции были меньше, чем заемные средства M_{min} плюс доход от выполнения первой операции g_{i_1} (и т.д. для всех операций).

Итак, соответствии с [6] оптимальное решение имеет следующую структуру:

- упорядочим прибыльные операции (для которых g_i ³ 0) в порядке возрастания затрат (величин b_i) и включим их в последовательность (гамильтонов контур);

- добавим к полученной последовательности убыточные операции (для которых g_i £ 0) в порядке убывания доходов (величин D_i).

Таким образом, оптимальной является следующая последовательность: выполнять сначала прибыльные операции в порядке возрастания затрат (сначала более дешевые и т.д.), затем выполнять убыточные операции в порядке убывания дохода (сначала - приносящие наибольший доход, и т.д.).

Найденное решение минимизирует максимальную величину однократного заема. Суммарная же величина заемных средств при использовании полученного решения равна (при $R_0 = 0$): $R = b_{i_1} + \sum_{k=1}^{n-1} \max\left(b_{i_{k+1}} - \sum_{j=1}^{k} g_j, 0\right)$.

Итак, мы нашли аналитическую последовательность выполнения операций, минимизирующую максимальную величину внешнего займа.

4.3. Декомпозиция игры активных элементов в задаче стимулирования

В большинстве рассматриваемых в теории активных систем и в теории иерархических игр [8, 9] моделей стимулирования изучаются одноэлементные

АС, состоящие из одного управляющего органа (центра) и одного управляемого субъекта - активного элемента. Отсутствие общих подходов к решению задач стимулирования в многоэлементных АС обусловлено, наверное, тем, что до недавнего времени были неизвестны эффективные методы анализа свойств решений игры АЭ. Ниже описан предложенный в [14-16] метод, заключающийся в выборе системы стимулирования, реализующей оптимальный с точки зрения центра вектор действий АЭ как вектор их равновесий в доминантных стратегиях (РДС) [13], что позволяет декомпозировать игру АЭ и получить аналитическое решение задачи стимулирования.

<u>Постановка задачи стимулирования.</u> Рассмотрим многоэлементную детерминированную двухуровневую АС, состоящую из центра и n АЭ. Стратегией АЭ является выбор действий, стратегией центра – выбор функции стимулирования, то есть зависимости вознаграждения каждого АЭ от его действий и, быть может, действий других АЭ.

Обозначим y_i Î A_i - действие i-го АЭ, i Î $I = \{1, 2, \dots, n\}$ – множество АЭ, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ Î $A' = \prod_{i=1}^{n} A_i$ - вектор действий АЭ, $y_{-i} = (y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n)$ Î $A_{-i} = \prod_{j \neq i} A_j$ - обстановка игры для i-го АЭ.

Интересы и предпочтения участников АС – центра и АЭ – выражены их целевыми функциями. Целевая функция центра $F(s, y)$ представляет собой разность между его доходом $H(y)$ и суммарным вознаграждением $u(y)$, выплачиваемым АЭ: $u(y) = \sum_{i=1}^{n} s_i(y)$, где $s_i(y)$ - стимулирование i-го АЭ, $s(y) = (s_1(y), s_2(y), \dots, s_n(y))$. Целевая функция i-го АЭ $f_i(s_i, y)$ представляет собой разность между стимулированием, получаемым от центра, и затратами $c_i(y)$, то есть:

(1) $$f_i(s_i, y) = s_i(y) - c_i(y),\ i \text{ Î } I.$$

(2) $$F(s, y) = H(y) - \sum_{i=1}^{n} s_i(y).$$

Отметим, что и индивидуальное вознаграждение, и индивидуальные затраты i-го АЭ по выбору действия y_i в общем случае зависят от действий всех АЭ (случай сильно связанных АЭ с несепарабельными затратами [16]).

Примем следующий порядок функционирования АС. Центру и АЭ на момент принятия решения о выбираемых стратегиях (соответственно - функциях стимулирования и действиях) известны целевые функции и допустимые множества всех участников АС. Центр, обладая правом первого хода, выбирает функции стимулирования и сообщает их АЭ, после чего АЭ при известных функциях стимулирования выбирают действия, максимизирующие их целевые функции.

Относительно параметров АС введем следующие предположения:

А.1. " i Î I A_i í $\Re^1_+$.

А.2. " i Î I 1) функция $c_i(\cdot)$ непрерывна по всем переменным; 2) " y_i Î A_i $c_i(y)$ не убывает по y_i, i Î I; 3) " y Î A' $c_i(y)$ ³ 0; 4) " y_{-i} Î A_{-i} $c_i(0, y_{-i}) = 0$.

А.3. Функции стимулирования кусочно-непрерывны и принимают неотрицательные значения.

А.4. Функция дохода центра непрерывна по всем переменным и достигает максимума при ненулевых действиях АЭ.

Обозначим M - множество систем стимулирования, удовлетворяющих предположению А.3, $P(s)$ – множество равновесных при системе стимулирования s стратегий АЭ – множество решений игры (тип равновесия пока не оговаривается; единственно предположим, что АЭ выбирают свои стратегии одновременно и независимо друг от друга, не имея возможности обмениваться дополнительной информацией и полезностью).

Как и в одноэлементной АС (см. второй раздел), гарантированной эффективностью (далее просто "эффективностью") стимулирования является минимальное значение целевой функции центра на соответствующем множестве решений игры:

(3) $$K(s) = \min_{y \in P(s)} F(s, y).$$

Задача синтеза оптимальной функции стимулирования заключается в поиске допустимой системы стимулирования s^*, имеющей максимальную эффективность:

(4) $$s^* = arg \max_{s \in M} K(s).$$

В [5, 8, 12, 13] доказано, что в частном случае, когда АЭ независимы (вознаграждение каждого из них и затраты каждого из них сепарабельны, то есть зависят только от его собственных действий), то оптимальной (точнее – δ-оптимальной, где $d = \sum_{i=1}^{n} d_i$) является квазикомпенсаторная система стимулирования:

(5) $$s_{iK}(y_i) = \begin{cases} c_i(y_i^*) + d_i, & y_i = y_i^* \\ 0, & y_i \neq y_i^* \end{cases}, \ i \ Î \ I,$$

где d_i - сколь угодно малые строго положительные константы, а оптимальное действие y^*, реализуемое системой стимулирования (5) как РДС, является решением следующей задачи оптимального согласованного планирования:

$$y^* = arg \max_{y \in A'} \{H(y) - \sum_{i=1}^{n} c_i(y_i)\}.$$

<u>Решение задачи стимулирования в многоэлементной АС.</u> Если стимулирование каждого АЭ зависит от действий всех АЭ (случай коллективного стимулирования [16]) и затраты несепарабельны, то определения множества равновесий Нэша $E_N(s)$ и РДС $y_d \ Î \ A$ имеют вид:

(6) $E_N(s) = \{y^N Î A \mid " \ i \ Î \ I \ " \ y_i \ Î \ A_i \ s_i(y^N) - c_i(y^N) \ ³ \ s_i(y_i, y_{-i}^N) - c_i(y_i, y_{-i}^N)\}$,

y_{i_d} Î A_i - доминантная стратегия i-го АЭ, тогда и только тогда, когда

$$" y_i \ Î \ A_i, \ " y_{-i} \ Î \ A_{-i} \ s_i(y_{i_d} , y_{-i}) – c_i(y_{i_d} , y_{-i}) \ ³ \ s_i(y_i, y_{-i}) – c_i(y_i, y_{-i}).$$

Если при заданной системе стимулирования у всех АЭ имеется доминантная стратегия, то говорят, что данная система стимулирования реализует соответствующий вектор действий как РДС.

Если стимулирование каждого АЭ зависит только от его собственных действий (случай индивидуального стимулирования [16]), то определения множества равновесий Нэша $E_N(s)$ и РДС y_d Î A имеют вид:

(7) $E_N(s) = \{y^N Î A \mid " \ i \ Î \ I \ " \ y_i \ Î \ A_i \ s_i(y_i^N) – c_i(y^N) \ ³ \ s_i(y_i) – c_i(y_i, \ y_{-i}^N)\}$,

y_{i_d} Î A_i - доминантная стратегия i-го АЭ, тогда и только тогда, когда

$$" y_i \ Î \ A_i, \ " y_{-i} \ Î \ A_{-i} \ s_i(y_{i_d}) – c_i(y_{i_d} , y_{-i}) \ ³ \ s_i(y_i) – c_i(y_i, y_{-i}).$$

Фиксируем произвольный вектор действий АЭ y^* Î A' и рассмотрим следующую систему стимулирования:

(8) $$s_i(y^*, y) = \begin{cases} c_i(y_i^*, y_{-i}) + d_i, & y_i = y_i^* \\ 0, & y_i \neq y_i^* \end{cases}, \ d_i \ ³ \ 0, \ i \ Î \ I.$$

<u>Теорема 1.</u> При использовании центром системы стимулирования (8) y^* – РДС. Более того, если $d_i > 0$, i Î I, то y^* – единственное РДС.

Содержательно, при использовании системы стимулирования (8) центр использует следующий принцип декомпозиции: он предлагает i-му АЭ – "выбирай действие y_i^*, а я компенсирую тебе затраты, независимо от того какие действия выбрали остальные АЭ, если же ты выберешь любое другое действие, то вознаграждение будет равно нулю". Используя такую стратегию центр декомпозирует игру АЭ и получает возможность независимого определения и реализации действий каждого из них.

Вектор оптимальных реализуемых действий АЭ y^*, фигурирующий в качестве параметра в выражении (8), определяется в результате решения следующей задачи оптимального согласованного планирования: $y^* = arg \max\limits_{t \in A'} \{H(t) - u(t)\}$, а эффективность системы стимулирования равна следующей величине: $K^* = H(y^*) - \sum_{i=1}^{n} c_i(y^*) - d$.

<u>Теорема 2.</u> Класс (с параметром y^*) систем стимулирования (8), (9) является d-оптимальным.

Таким образом, использование принципа декомпозиции позволяет за счет использования соответствующих управлений декомпозировать игру сильно связанных АЭ и сделать возможным независимое управление каждого из них, что существенно снижает вычислительную сложность задачи стимулирования.

4.4. Многоканальные механизмы

В последнее время широкое распространение получили механизмы поддержки принятия решений (ППР), отличительной особенностью которых является формирование решений (рекомендаций) в нескольких параллельных блоках (каналах) формирования решений «советниками» - экспертами. Такие механизмы получили название многоканальных. Причиной их достаточно высокой эффективности является взаимодействие каналов, то есть взаимодействие экспертов. Как побудить экспертов повышать эффективность предлагаемых решений, как на основании их советов выработать наилучшее управленческое решение? Одним из способов является применение систем сравнительных оценок эффективностей решений каналов и их стимулирование по результатам этого сравнения. В настоящем разделе рассматривается несколько моделей многоканальных механизмов активной экспертизы [4, 6].

4.4.1. Многоканальные механизмы, использующие модели управляемой системы. Если центр хочет стимулировать экспертов (активных элементов) на основании эффективности предлагаемых ими решений, то, естественно, ему необходимо знать, а что было бы, если бы было использовано управление (решение), предложенное каждым конкретным экспертом? Проводить эксперименты и смотреть, как ведет себя управляемая система при различных управлениях в большинстве случаев не представляется возможным. Значит необходимо использовать модель управляемой системы. Рассмотрим следующий пример.

Пусть эффективность $Э$ принятого управленческого решения U зависят от параметров модели и окружающей среды q, не известных априори центру. Предположим, что $Э = U - U^2/2q$. Если центр использует решение U_0 и фактическая эффективность оказывается равной $Э_0$, то можно оценить реализовавшееся значение неизвестного параметра: $q = U_0^2/2(U_0 - Э_0)$. Подставляя эту оценку в исходное выражение для эффективности, получим формулу, определяющую, какова была бы эффективность i-го эксперта $Э_i$ если бы использовалось предложенное им управление U_i (пусть всего имеются n экспертов): $Э_i(U_i) = U_i - \frac{U_i^2}{U_0^2}(U_0 - Э_0),\ i = \overline{1,n}$.

Отметим, что эффективности $Э_i$ могут рассчитываться независимо и одновременно!

Как следует стимулировать экспертов? Наверное, на основании оценок $Э_i(U_i)$ (отметим, что если $U_i = U_0$, то $Э_i = Э_0$), то есть чем выше эффективность предложенного решения, тем больше должно быть вознаграждение эксперта. Введем $Э_м = \max_i Э_i$ - нормативную эффективность, равную максимальной эффективности. В простейшем случае стимулирование центра зависит от эффективности $Э_0$ принятого им решения U_0 и нормативной эффективности:

$$f_0 = Э_0 - \begin{cases} a\,(Э_0 - Э_м),\ если\ Э_0 \geq Э_м \\ b\,(Э_м - Э_0),\ если\ Э_0 \leq Э_м \end{cases}, 0 < a < 1, b > 0.$$

То есть, если решение центра оказалось лучше наиболее эффективного решения, предложенного экспертами ($Э_0 \geq Э_м$), то центр поощряет пропорционально величине ($Э_0 - Э_м$). Если эффективность $Э_0$ оказалась ниже эффективности решений, предложенных экспертами, то поощрение пропорционально ($Э_м - Э_0$). Стимулирование самих экспертов производится аналогичным образом на основе сравнения $Э_i$ и $Э_0$ или $Э_i$ и $Э_м$:

$$f_i = Э_i - \begin{cases} a\,(Э_i - Э_0),\ если\ Э_i \geq Э_0 \\ b\,(Э_0 - Э_i),\ если\ Э_i \leq Э_0 \end{cases}, 0 < a < 1, b > 0.$$

4.4.2. Автономные механизмы экспертизы. В предыдущем подразделе стимулирование экспертов осуществлялось на основе сравнения эффективностей предлагаемых решений, оцениваемых с помощью модели управляемой системы. Однако иногда управляемая система настолько сложна, что построить ее адекватную модель достаточно трудно. Как поступить в этой ситуации центру? Одним из способов является «переложить всю тяжесть» по решению задачи управления на экспертов, получить от них одно согласованное решение, а не несколько, и использовать именно его. Рассмотрим, в каких условиях можно побудить экспертов работать автономно, согласовывать решения и предлагать центру наилучшее решение.

Пусть от экспертов требуется предложить решение, как поступить в некоторой конкретной ситуации. В силу различного образования, опыта и т.д. одни эксперты могут оказаться более квалифицированными в одной области, другие - в другой, в зависимости от ситуации, для которой необходимо предлагать решение (т.е. в зависимости от области возможных ситуаций). Эффективность решений, которые может предложить i-й эксперт ($i=\overline{1,n}$) в ситуации x обозначим $Э_i(x)$. Центр хотел бы, чтобы в любой ситуации предлагаемое экспертами решение было наиболее эффективным, то есть желательно, чтобы эффективность коллектива экспертов имела вид: $Э(x)=\max\limits_{i=\overline{1,n}}\{Э_i(x)\}$. Предположим, что каждый из экспертов знает собственную эффективность $Э_i(x)$ и не знает эффективностей остальных экспертов (следовательно, каждый может искажать информацию), но все эксперты точно идентифицируют ситуацию x. Как центр может побудить экспертов предпочесть в любой ситуации наиболее эффективное решение?

Рассмотрим следующий механизм. Центр предлагает экспертам - «пусть каждый из вас сообщает (остальным экспертам) пару ($U_i(x)$, $Э_i(x)$), где U_i - предлагаемое управление в ситуации x, $Э_i(x)$ - эффективность этого решения (i-ый эксперт точно знает истинную эффективность того или иного решения, которое он предлагает в каждой ситуации). После этого вы сообщаете мне решение, имеющее в сложившейся ситуации наибольшую эффективность, а я стимулирую вас пропорционально эффективности этого предложенного решения».

Предложенный механизм действительно прост - эксперты сами между собой решают, какое решение предложить центру, то есть работают автономно. Возникает закономерный вопрос - а будут ли эксперты сообщать правду? В [6] доказано, что сообщение достоверной информации в этом механизме является равновесием Нэша.

Достоинством автономных механизмов экспертизы является, во-первых, «разгрузка» центра, который получает сразу оптимальное (с точки зрения экспертов) решение, и, во-вторых, его неманипулируемость. В то же время, при использовании автономных механизмов центр должен быть уверен, что эксперты точно идентифицируют ситуацию и не ошибаются при прогнозе эффективности своего решения.

Таким образом, одним из преимуществ многоканальных механизмов управления активными системами является возможность параллельного и независимого вычисления параметров, описывающих действия и результаты деятельности каналов принятия решений.

5. Заключение

В настоящей работе рассмотрена вычислительная сложность решения задач управления активными системами. Приведенные выше (в четвертом разделе) частные модели АС свидетельствуют, что общие подходы к решению задач синтеза оптимальных управлений, описанные в третьем разделе, в ряде случаев позволяют за счет учета специфики задачи найти эффективные (полиномиальные) алгоритмы решения. Кроме того, во многих случаях (см. разделы 4.3 и 4.4, а также описание двушагового метода [13] (в котором на первом шаге возможен одновременный и независимый поиск минимальных систем стимулирования для каждого из допустимых действий АЭ), результатов по произвольной децентрализуемости механизмов планирования [10] (которые позволяют в многоуровневых АС осуществлять произвольную декомпозицию системы и, следовательно, задачи управления) и др., удается обосновать возможность применения параллельных вычислений.

Перспективным направлением будущих исследований в рассматриваемой области представляется более полная систематизация результатов изучения вычислительных аспектов решения задач управления АС, которая позволила бы предложить относительно универсальные подходы к снижению вычислительной сложности решаемых задач.

Список литературы

1. Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977.
2. Бурков В.Н., Горгидзе И.А., Ловецкий С.Е. Прикладные задачи теории графов. Тбилиси: Мецниереба, 1974.
3. Бурков В.Н., Гуреев А.Б., Новиков Д.А., Цветков А.В. Эффективность ранговых систем стимулирования // Автоматика и телемеханика. № 8. 2000.
4. Бурков В.Н., Данев Б., Еналеев А.К., Кондратьев В.В., Нанева Т.Б., Щепкин А.В. Большие системы: моделирование организационных механизмов. М. Наука, 1989.
5. Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981.
6. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять проектами. М.: Синтег, 1997.
7. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Теория активных систем: состояние и перспективы. М.: Синтег, 1999.
8. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.
9. Кононенко А.Ф., Халезов А.Д., Чумаков В.В. Принятие решений в условиях неопределенности. М.: ВЦ АН СССР, 1991.
10. Новиков Д.А. Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. М.: Фонд "Проблемы управления", 1999. - 150 с.
11. Новиков Д.А. Обобщенные решения задач стимулирования в активных системах. М.: ИПУ РАН, 1998.
12. Новиков Д.А. Стимулирование в социально-экономических системах (базовые математические модели). М.: ИПУ РАН, 1998.
13. Новиков Д.А., Петраков С.Н. Курс теории активных систем. М.: Синтег, 1999.
14. Новиков Д.А., Цветков А.В. Декомпозиция игры активных элементов в задачах стимулирования // Автоматика и Телемеханика. 2001. № 2.
15. Новиков Д.А., Цветков А.В. Агрегирование информации в задачах стимулирования // Автоматика и Телемеханика. 2001. № 4.
16. Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы стимулирования в многоэлементных организационных системах. М.: Апостроф, 2000.
17. Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы функционирования организационных систем с распределенным контролем. М.: ИПУ РАН, 2001.
18. Цыганов В.В. Адаптивные механизмы в отраслевом управлении. М.: Наука, 1991.