Автоматика и Телемеханика. 2003. № 10. С. 111 – 122

© 2003 г. Д.А. НОВИКОВ, д-р техн. наук
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

А.Г. ЧХАРТИШВИЛИ, канд. физ.-мат. наук
(МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва)

ИНФОРМАЦИОННОЕ РАВНОВЕСИЕ: ТОЧЕЧНЫЕ СТРУКТУРЫ ИНФОРМИРОВАННОСТИ

Предлагается концепция информационного равновесия в рефлексивной игре (игре, в которой агенты принимают решение на основе иерархии представлений о существенных параметрах, представлений о представлениях и т.д.), являющегося обобщением равновесия Нэша в некооперативных играх.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теоретико-игровые модели в настоящее время широко применяются для описания социально-экономических систем (см., например, [1–3]). Многообразие экономических и социальных отношений обусловливает и многообразие постановок игровых задач. В настоящей работе обсуждается информационный аспект принятия решений в конфликтной ситуации и, в частности, влияние взаимной информированности.

Как известно, игра Γ_0 в нормальной форме описывается, во-первых, кортежем $\Gamma_0 = \{N, (X_i)_{i \in N}, (f_i(\cdot))_{i \in N}\}$, включающим множество игроков (агентов) N, множества их допустимых действий $(X_i)_{i \in N}$ и совокупность целевых функций $(f_i(\cdot))_{i \in N}$, $f_i: \prod_{j \in N} X_j \to \Re^1$, $i \in N$ (здесь и далее $\Re^1$ – множество вещественных чисел), и, во-вторых – информированностью агентов, т.е. той информацией, которой они обладают на момент выбора действий. Традиционно в теории некооперативных игр предполагается, что агенты выбирают свои действия одновременно и независимо, а информация об игре Γ_0 является *общим знанием* (common knowledge – см., например, [2–5]), т.е. каждому агенту известен набор участников игры, все целевые функции и допустимые множества, а также известно, что это известно остальным агентам и им известно также о его информированности и т.д. до бесконечности. Можно сказать так: все агенты знают, в какую игру они играют, т. е. условия игры (правила, возможности и интересы участников) являются общим знанием.

Для выбора действия в описанной ситуации каждый агент должен смоделировать действия других агентов, чтобы самому выбрать действие, максимизирующее целевую функцию (предположение о том, что агент, выбирая свое действие, пытается максимизировать целевую функцию с учетом всей имеющейся у него информации, называется гипотезой рационального поведения

[2]). Это моделирование агентом хода мысли других агентов называется *рефлексией* [4]. И здесь, опять же, весьма существенную роль играет информированность агентов.

Размышления агента о выборе своего действия включают в себя *стратегическую рефлексию* – какие действия выберут остальные? Размышления такого рода можно проводить различным образом, и исход игры, соответственно, будет разный. В настоящей работе мы будем исходить из наиболее распространенной на сегодняшний день концепции решения игры – равновесия Нэша. Равновесие Нэша – это ситуация, в которой каждый агент выбирает наилучшее для себя действие при фиксированных действиях остальных (или, иначе говоря, ситуация, в которой никто не может увеличить свой выигрыш, выбрав в одностороннем порядке другое действие). Более строго: вектор действий $(x_1^*,...,x_n^*)$ называется равновесным по Нэшу, если

$$\forall i \in N \qquad x_i^* \in \operatorname{Arg}\max_{x_i \in X_i} f_i(x_1^*,...,x_{i-1}^*,x_i,x_{i+1}^*,...,x_n^*).$$

Существенным является следующее: чтобы вычислить свое равновесное по Нэшу действие, i-й агент должен знать целевые функции и допустимые множества и быть уверенным, что и остальные игроки их знают и что они знают, что все остальные их знают и т.д. Таким образом, концепция равновесия Нэша существенно опирается на то обстоятельство, что условия игры являются общим знанием.

Отметим, что в настоящее время существует ряд моделей, в которых стратегическая рефлексия является более сложной, чем в игре в нормальной форме Γ_0 (в том числе стратегическая рефлексия в биматричных играх, рассмотрена в [4]). Среди них: иерархические игры [6], информационные расширения игр [7, 8], концепции связанного равновесия (correlated equilibrium) [3] и решения в угрозах-контругрозах [9]. Тем не менее во всех этих моделях условия игры являются общим знанием.

В отличие от кратко перечисленных выше моделей стратегической рефлексии в настоящей работе рассматривается модель, в которой не все параметры игры являются общим знанием. Для описания этой модели предположим, что выигрыши агентов зависят не только от их действий, но и от некоторого параметра $q \in W$ («состояния природы»), значение которого не является общим знанием, т.е. целевая функция i-го агента имеет вид $f_i(q, x_1,..., x_n)$, i Î N. Тогда стратегической рефлексии логически предшествует *информационная рефлексия* – размышления агента о том, что каждый агент знает (предполагает) о параметре q, а также о предположениях других агентов и пр. Тем самым мы приходим к понятию структуры информированности агента, отражающей его информированность о неизвестном параметре, о представлениях других агентов и т. д.

В [10] в рамках вероятностной информированности (представления агентов включают в себя следующие компоненты: вероятностное распределение на множестве состояний природы; вероятностное распределение на множестве состояний природы и распределениях на множестве состояний природы, характеризующих представления остальных агентов, и т. д.) было построено универсальное пространство возможных взаимных представлений (universal beliefs space). При этом игра формально сводится к некоей Байесовой игре [2–4], решением которой является равновесие Байеса-Нэша, введенное Дж. Харшаньи [11].

В Байесовых играх, во-первых, как правило, предполагается, что представления агентов являются общим знанием (возможность отказа от предположения об общем знании априорных вероятностей в Байесовой игре обсуждается в [12]). Во-вторых, предложенная в [10] конструкция настолько громоздка, что найти решение «универсальной» Байесовой игры в общем случае, по-видимому, невозможно.

Поэтому в данной работе рассматривается частный случай представлений агентов – точечная структура информированности (у агентов имеются вполне определенные представления о значении неопределенного параметра; о том, каковы представления (также вполне определенные) остальных агентов, и т. д. [13]). Для нее дается определение конечной сложности, позволяющее, в свою очередь, конструктивно определить информационное равновесие, являющееся обобщением равновесия Нэша, и исследовать его свойства.

2. СТРУКТУРА ИНФОРМИРОВАННОСТИ

Рассмотрим множество $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ агентов.

Если в ситуации присутствует неопределенный параметр q Î W (будем считать, что множество W является общим знанием), то *структура информированности* I_i i-го агента включает в себя следующие элементы. Во-первых, представление i-го агента о параметре q – обозначим его q_i, $q_i \in W$. Во-вторых, представления i-го агента о представлениях других агентов о параметре q – обозначим их q_{ij}, $q_{ij} \in W$, $j \in N$. В-третьих, представления i-го агента о представлении j-го агента о представлении k-го агента – обозначим их q_{ijk}, $q_{ijk} \in W$, $j, k \in N$. И так далее. В результате мы получаем иерархию представлений i-го агента.

Иначе говоря, структура информированности I_i i-го агента задается набором всевозможных значений вида $q_{ij_1\ldots j_l}$, где l пробегает множество целых неотрицательных чисел, $j_1, \ldots, j_l \in N$, а $q_{ij_1\ldots j_l} \in W$.

Аналогично задается *структура информированности* I *игры* в целом – набором значений $q_{i_1\ldots i_l}$, где l пробегает множество целых неотрицательных чисел, $j_1, \ldots, j_l \in N$, а $q_{ij_1\ldots j_l} \in W$.. Подчеркнем, что структура информированности I «недоступна» наблюдению агентов, каждому из которых известна лишь некоторая ее часть.

Таким образом, структура информированности – бесконечное n-дерево (т.е. тип структуры постоянен и является n-деревом), вершинам которого соответствует конкретная информированность реальных и фантомных (см. ниже) агентов.

Рефлексивной игрой Γ_I назовем игру, описываемую следующим кортежем:

$$\Gamma_I = \{N, (X_i)_{i\ \hat{I}\ N}, f_i(\cdot)_{i\ \hat{I}\ N}, I\},$$

где N – множество агентов, X_i – множество допустимых действий i-го агента, $f_i(\cdot)$: W ´ X_1 ´… ´ X_n ® $\hat{A}^1$ – его целевая функция, i $\hat{I}$ N, I – структура информированности.

Таким образом, рефлексивная игра является обобщением понятия игры Γ_0 в нормальной форме на случай, когда информированность агентов отражена иерархией их представлений (структурой информированности I). В рамках принятого определения «классическая» игра в нормальной форме является частным случаем рефлексивной игры – игры с общим знанием. В «предельном» случае – когда состояние природы является общим знанием – предлагаемая в настоящей работе концепция решения рефлексивной игры (информационное равновесие – см. раздел 3) переходит в равновесие Нэша.

Сделаем важное замечание: в настоящей работе мы ограничимся рассмотрением *точечной* структуры информированности, компоненты которой состоят лишь из элементов множества W. Более общим случаем является, например, интервальная или вероятностная информированность (о последней см. введение).

Для формулировки некоторых определений и свойств нам понадобятся следующие обозначения:

S_+ – множество всевозможных конечных последовательностей индексов из N;

S – объединение S_+ с пустой последовательностью;

$|s|$ – количество индексов в последовательности s (для пустой последовательности принимается равным нулю).

Если q_i – представления i-го агента о неопределенном параметре, а q_{ii} – представления i-го агента о собственном представлении, то естественно считать, что $q_{ii} = q_i$. Иными словами, i-й агент правильно информирован о собственных представлениях, а также считает, что таковы и другие агенты и т. д. Формально это означает, что выполнена *аксиома автоинформированности*, которую далее будем предполагать выполненной.

Аксиома автоинформированности: " i $\hat{I}$ N " t, s $\hat{I}$ Σ $q_{tiis} = q_{tis}$.

Эта аксиома означает, в частности, что, зная q_t для всех $t \in \Sigma_+$, таких что $|t| = g$, можно однозначно найти q_t для всех $t \in \Sigma_+$, таких что $|t| < g$.

Наряду со структурами информированности I_i, $i \in N$, можно рассматривать структуры информированности I_{ij} (структура информированности j-го агента в представлении i-го агента), I_{ijk} и т.д. Отождествляя структуру информированности с характеризуемым ею агентом, можно сказать, что, наряду с n *реальными* агентами (i-*агентами*, где $i \in N$) со структурами информированности I_i, в игре участвуют ***фантомные агенты*** (t-*агенты*, где $t \in S_+$, $|t| \geq 2$) со структурами информированности $I_t = \{q_{ts}\}$, $s \in \Sigma$. Фантомные агенты, существуя в сознании реальных агентов, влияют на их действия, о чем пойдет речь далее.

Определим существенное для дальнейших рассмотрений понятие тождественности структур информированности.

Структуры информированности I_l и I_m ($l, m \in S_+$) называются *тождественными*, если выполнены два условия:

1. $q_{ls} = q_{ms}$ для любого s Î S;

2. последние индексы в последовательностях l и m совпадают.

Будем обозначать тождественность структур информированности следующим образом: $I_l = I_m$.

Первое из двух условий в определении тождественности структур прозрачно, второе же требует некоторых пояснений. Дело в том, что далее мы будем обсуждать действие t-агента в зависимости от его структуры информированности I_t и целевой функции f_i, которая как раз определяется последним индексом последовательности t. Поэтому удобно считать, что тождественность структур информированности означает в том числе и тождественность целевых функций.

Утверждение 1. $I_l = I_m \Leftrightarrow \forall\ s \in S \quad I_{ls} = I_{ms}$.

Доказательства всех утверждений вынесены в Приложение.

Содержательный смысл утверждения 1 состоит в том, что тождественность двух структур информированности в точности означает тождественность всех их подструктур.

Следующее утверждение является, по сути, иной формулировкой аксиомы автоинформированности.

Утверждение 2. $\forall\ i \in N\ \forall\ t, s \in S\ \ I_{tiis} = I_{tis}$.

Определение тождественности структур информированности (как и последующие, приводимые в настоящем разделе) можно переформулировать так, чтобы соответствующее свойство структуры информированности выполнялось не объективно, а t-*субъективно* – в представлении t-агента ($t \in S_+$): структуры информированности I_l и I_m ($l, m \in \Sigma_+$) называются t-*субъективно тождественными*, если $I_{tl} = I_{tm}$.

В дальнейшем будем формулировать определения и утверждения сразу t-субъективно для $t \in S$, имея в виду, что если t – пустая последовательность индексов, то «t-субъективно» означает «объективно».

l-агент называется t-субъективно *адекватно информированным* о представлениях m-агента (или, короче, о m-агенте), если

$$I_{tlm} = I_{tm} \quad (l, m \in \Sigma_+,\ t \in \Sigma).$$

Будем обозначать t-субъективную адекватную информированность l-агента о m-агенте следующим образом: $I_l >_t I_m$.

Утверждение 3. Каждый реальный агент t-субъективно считает себя адекватно информированным о любом агенте, т.е.

$$'' i \in N \;\; '' t \in \Sigma \;\; '' s \;\hat{I}\; \Sigma_+ \;\; I_i >_{ti} I_s .$$

Содержательно утверждение 3 отражает тот факт, что рассматриваемая точечная структура информированности подразумевает наличие у каждого агента уверенности в своей адекватной информированности о всех элементах этой структуры.

l-агент и m-агент называются t-субъективно *взаимно информированными,* если одновременно выполнены тождества

$$I_{tlm} = I_{tm}, \quad I_{tml} = I_{tl} \quad (l, m \in S_+,\ t \in S).$$

Будем обозначать t-субъективную взаимную информированность l-агента и m-агента следующим образом: $I_l >\!<_t I_m$.

l-агент и m-агент называются t-субъективно *одинаково информированными о s-агенте,* если $I_{tls} = I_{tms}$ $(s,\ l, m \in \Sigma_+,\ t \in S)$.

Будем обозначать t-субъективную одинаковую информированность l-агента и m-агента о s-агенте следующим образом:

$$I_l >_s <_t I_m.$$

l-агент и m-агент называются *t-субъективно одинаково информированными,* если $\forall\ i \in N\ \ I_{tli} = I_{tmi}$ $(l, m \in S_+,\ t \in S)$.

Будем обозначать t-субъективную одинаковую информированность l-агента и m-агента следующим образом: $I_l \sim_t I_m$.

Отметим, что отношения одинаковой информированности о каком-либо агенте и одинаковой информированности являются отношениями эквивалентности (т.е. рефлексивны, симметричны и транзитивны на множестве агентов).

Покажем, что одинаковая информированность равносильна одинаковой информированности о любом агенте.

Утверждение 4. $I_l \sim_t I_m \Leftrightarrow \forall\ s \in S_+\ I_l >_s <_t I_m$.

Приведенные определения показывают, что описание ситуации в содержательных терминах адекватной, взаимной и одинаковой информированности могут быть описаны через тождество соответствующих структур информированности. Следующее утверждение касается связи введенных понятий друг с другом.

Утверждение 5. Для любого $t \in S$ следующие три условия равносильны:

1.) *любые два реальных агента t-субъективно являются взаимно информированными;*

2.) *все реальные агенты t-субъективно являются одинаково информированными;*

3.) *для любого $i \in N$ структура I_{si} t-субъективно зависит только от i.*

Т.е. для любого $t \in S$ выполнено:

$$(\forall\ i, j \in N\ I_i >\!<_t I_j) \Leftrightarrow (I_1 \sim_t \ldots \sim_t I_n) \Leftrightarrow (\forall\ i \in N\ \forall\ s \in S\ \ I_{tsi} = I_{ti}).$$

Понятие тождественности структур информированности позволяет определить их важное свойство – сложность. Заметим, что наряду со структурой I имеется счетное множество структур I_t, $t \in S_+$, среди которых можно при помощи отношения тождественности выделить классы попарно нетождественных структур. Количество этих классов естественно считать *сложностью структуры информированности*.

Будем говорить, что структура информированности I имеет *конечную сложность* $n = n(I)$, если существует такой конечный набор попарно нетождественных структур $\{I_{t_1},\ I_{t_2},\ \ldots,\ I_{t_n}\}$, t_l Î S_+, $l \in \{1, \ldots, n\}$, что для любой структуры I_s , $s \in S_+$, найдется тождественная ей структура I_{t_l} из этого набора. Если такого конечного набора не существует, будем говорить, что структура I имеет бесконечную сложность: $n(I) = \infty$.

Структуру информированности, имеющею конечную сложность, будем называть *конечной*. В противном случае структуру информированности будем называть *бесконечной*.

Ясно, что минимально возможная сложность структуры информированности в точности равна числу участвующих в игре реальных агентов (напомним, что по определению тождественности структур информированности они попарно различаются у реальных агентов).

Любой набор (конечный или счетный) попарно нетождественных структур I_t, t Î S_+, такой, что любая структура I_s, $s \in S_+$, тождественна одной из них, назовем *базисом* структуры информированности I.

Если структура информированности I имеет конечную сложность, то можно определить максимальную длину последовательности индексов g такую, что, зная все структуры I_t, $t \in S_+$, $|t| = g$, можно найти и все остальные структуры. Эта длина в определенном смысле характеризует ранг рефлексии, необходимый для описания структуры информированности.

Будем говорить, что структура информированности I, $n(I) < \infty$, имеет *конечную глубину* $g = g\ (I)$, если

1. для любой структуры I_s, s Î S_+, найдется тождественная ей структура I_t, $t \in S_+$, $|t| \leq g$;

2. для любого целого положительного числа x, $x < g$, существует структура I_s, s Î S_+, не тождественная никакой из структур I_t, $t \in \Sigma_+$, $|t| = x$.

Если $n(I) = \infty$, то и глубину будем считать бесконечной: $g(I) = \infty$.

Имея описание структуры информированности, можно рассматривать процесс совместного принятия решений реальными и фантомными агентами, что приводит к понятию информационного равновесия.

3. ИНФОРМАЦИОННОЕ РАВНОВЕСИЕ

Если задана структура I информированности игры, то тем самым задана и структура информированности каждого из агентов (как реальных, так и фантомных). Выбор t-агентом своего действия x_t в рамках гипотезы рационального поведения определяется его структурой информированности I_t , поэтому, имея перед собой эту структуру, можно смоделировать его рассуждения и определить это его действие. Выбирая свое действие, агент моделирует действия других агентов (осуществляет рефлексию). Поэтому при определении исхода игры необходимо учитывать действия как реальных, так и фантомных агентов.

Набор действий x_t^*, $t \in \Sigma_+$, назовем ***информационным равновесием***, если выполнены следующие условия:

1. структура информированности I имеет конечную сложность n;
2. $\forall\, l, m \in \Sigma_+ \quad I_l = I_m \Rightarrow x_l^{\,*} = x_m^{\,*}$;
3. $\forall\, i \in N$, $\forall\, s \in \Sigma$

(1) $x_{si}^* \in \operatorname{Arg}\max\limits_{x_i \in X_i} f_i(q_{si}, x_{si1}^*, \dots, x_{si,i-1}^*, x_i, x_{si,i+1}^*, \dots, x_{si,n}^*)$.

Первое условие в определении информационного равновесия означает, что в рефлексивной игре участвует конечное число реальных и фантомных агентов.

Второе условие отражает требование того, что одинаково информированные агенты выбирают одинаковые действия.

И, наконец, третье условие отражает рациональное поведение агентов – каждый из них стремится выбором собственного действия максимизировать свою целевую функцию, подставляя в нее действия других агентов, которые оказываются рациональными с точки зрения рассматриваемого агента в рамках имеющихся у него представлений о других агентах.

В соответствии с условием 2 для определения информационного равновесия требуется решить, казалось бы, бесконечное (счетное) число уравнений и получить столько же значений x_t^*. Однако оказывается, что на самом деле число уравнений и значений конечно.

Утверждение 6. Если информационное равновесие x_t^*, $t \in \Sigma_+$, существует, то оно состоит из не более чем n попарно различных действий, а в системе (1) содержится не более чем n попарно различных уравнений.

Таким образом, для нахождения информационного равновесия x_t^*, $t \in \Sigma_+$, достаточно записать n условий (1) для каждого из n попарно различных значений x_t^*, отвечающих попарно различным структурам информированности I_t.

Если все агенты являются одинаково информированными, то сложность структуры информированности минимальна и равна числу агентов. В этом случае система (1) переходит в определение равновесия Нэша, а информационное равновесие – в равновесие Нэша.

Итак, в случае, когда все реальные агенты являются одинаково информированными (т.е. рефлексивная реальность является общим знанием), информационное равновесие переходит в равновесие Нэша (фантомных агентов «не возникает»). Однако и в общем случае между информационным равновесием и равновесием Нэша существует тесная связь.

Пусть имеется структура информированности I конечной сложности n с базисом $\{I_{t_1}, \dots, I_{t_n}\}$. Тогда в информационном равновесии участвуют реальные и фантомные агенты из множества $\Xi = \{t_1, \dots, t_n\}$, каждый из которых выбирает действие $\{x_{t_1}, \dots, x_{t_n}\}$ соответственно, $x_{t_l} \in X_{w(t_l)}$, $l \in \{1, \dots, n\}$ – здесь и далее в этом разделе будем обозначать через $w(s)$ последний индекс в последовательности s, где $s \in \Sigma_+$.

Запишем целевую функцию каждого из агентов из множества Ξ следующим образом:

(2) $j_{t_l}(x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}) = f_{w(t_l)}(q_{t_l}, x_{s_1}, \ldots, x_{s_n})$,

где $I_{t_l i} = I_{s_i}$, $s_i \in$ Ξ для всех $i \in N$, $l \in \{1, \ldots, n\}$. Заметим, что $I_{s_{w(t_l)}} = I_{t_l w(t_l)} = I_{t_l}$, поэтому соотношение (2) можно записать более подробно в следующем виде:

(3) $j_{t_l}(x_{t_1}, \ldots, x_{t_{l-1}}, x_{t_l}, x_{t_{l+1}}, \ldots, x_{t_n}) = f_{w(t_l)}(q_{t_l}, x_{s_1}, \ldots, x_{s_{w(t_l)-1}}, x_{t_l}, x_{s_{w(t_l)-1}}, \ldots, x_{s_n})$.

Содержательно соотношения (2) и (3) означают следующее: целевая функция, которую t_l-агент ($t_l \in$ Ξ) максимизирует в рефлексивной игре, субъективно зависит от его представлений о параметре q, от его действия и от действий $(n - 1)$ агента из множества Ξ. Иными словами, функция j_{t_l} существенно зависит лишь от переменных $\{x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}\}$ (и от величины q_{t_l} как от параметра), причем эта зависимость совпадает с функцией f_i, где $i = w(t_l)$. Поэтому функция j_{t_l} «наследует» свойства функции $f_{w(t_1)}$.

С учетом соотношения (3) система уравнений (1) для определения информационного равновесия $(x^*_{t_1}, \ldots, x^*_{t_n})$ представима в виде:

$$x^*_{t_l} = \arg\max_{x_{t_l} \in X_{w(t_l)}} j_{t_l}(x^*_{t_{l-1}}, \ldots, x^*_{t_{l-1}}, x_{t_l}, x^*_{t_{l+1}}, \ldots, x^*_{t_n}),$$

где l пробегает все значения от 1 до n. Нетрудно видеть, что это не что иное, как система соотношений для определения равновесия Нэша в игре с одинаковой информированностью t_l–агентов, $l \in \{1,\ldots,n\}$. Это обстоятельство позволяет применять к информационному равновесию (соответствующим образом модифицировав) достаточные условия существования, известные для равновесия Нэша.

Например, известен следующий факт – теорема фон-Неймана–Нэша (см., например, [3]): если множества действий X_i – выпуклые компактные подмножества линейных метрических пространств, для каждого агента целевая функция f_i непрерывна по всем переменным и строго вогнута по переменной x_i, то в этой игре существует хотя бы одно равновесие Нэша в чистых стратегиях.

Этот факт можно переформулировать, получив достаточное условие существования информационного равновесия в рефлексивной игре.

У т в е р ж д е н и е 7. Пусть в рефлексивной игре со структурой информированности конечной сложности множества действий X_i – выпуклые компактные подмножества линейных метрических пространств, для каждого агента целевая функция $f_i(q, x_1, \ldots, x_n)$ при любом q Î W непрерывна по всем переменным и строго вогнута по переменной x_i. Тогда в этой игре существует хотя бы одно информационное равновесие.

Отметим, что удобным языком описания взаимной информированности агентов и выразительным средством анализа свойств информационного равновесия является граф рефлексивной игры [4, 13].

4. ПРИМЕРЫ РЕФЛЕКСИВНЫХ ИГР

В этом разделе мы рассмотрим несколько примеров нахождения информационного равновесия в рефлексивных играх.

П р и м е р ы 1 - 3 . В этих примерах участвуют три агента с целевыми функциями следующего вида:

$$f_i(q, x_1, x_2, x_3) = (q - x_1 - x_2 - x_3)x_i - \frac{x_i^2}{2},$$

где $x_i \geq 0$, $i \in N = \{1, 2, 3\}$; $q \in W = \{1, 2\}$.

Содержательно, x_i – объем выпуска продукции i-м агентом, q – спрос на производимую продукцию. Тогда первое слагаемое в целевой функции может интерпретироваться как выручка от продаж (произведение цены на объем продаж), а второе слагаемое – как затраты на производство (см. модель дуополии Курно в [1]).

Для краткости будем называть агента, считающего, что спрос низкий ($q = 1$), пессимистом, а считающего, что спрос высокий ($q = 2$), – оптимистом. Таким образом, в примерах 1-3 ситуации различаются лишь вследствие различных структур информированности.

П р и м е р 1 . Пусть первые два агента – оптимисты, а третий – пессимист, причем все трое одинаково информированы. Тогда в соответствии с утверждением 5 для любого $s \in S$ выполняются тождества $I_{s1} = I_1$, $I_{s2} = I_2$, $I_{s3} = I_3$.

В соответствии со свойством 2 определения информационного равновесия, аналогичные соотношения выполняются для равновесных действий x_s^*.
Видно, что любая структура информированности тождественна одной из трех, образующих базис: $\{I_1, I_2, I_3\}$. Поэтому сложность данной структуры информированности равна трем, а глубина равна единице.

Для нахождения информационного равновесия надо решить следующую систему уравнений (см. выражение (1)):

$$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{2 - x_2^* - x_3^*}{3}, \\ x_2^* = \dfrac{2 - x_1^* - x_3^*}{3}, \\ x_3^* = \dfrac{1 - x_1^* - x_2^*}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^* = \dfrac{1}{2}, \\ x_2^* = \dfrac{1}{2}, \\ x_3^* = 0. \end{cases}$$

Таким образом, действия агентов в ситуации информационного равновесия будут следующими: $x_1^* = x_2^* = 1/2$, $x_3^* = 0$.

П р и м е р 2 . Пусть первые два агента – оптимисты, а третий – пессимист, который считает всех трех агентов одинаково информированными пессимистами. Первые два агента одинаково информированы, причем оба они адекватно информированы о третьем агенте.

Имеем: $I_1 \sim I_2$, $I_1 > I_3$, $I_2 > I_3$, $I_1 \sim_3 I_2 \sim_3 I_3$.

Эти условия можно записать в виде следующих тождеств, имеющих место для любого $s \in \Sigma$ (воспользуемся соответствующими определениями и утверждениями 1, 2, 5):

$I_{12s} = I_{2s}$, $I_{13s} = I_{3s}$, $I_{21s} = I_{1s}$, $I_{23s} = I_{3s}$, $I_{3s1} = I_{31}$, $I_{3s2} = I_{32}$, $I_{3s3} = I_3$.

Аналогичные соотношения выполняются для равновесных действий x_s^*. Левые части этих тождеств показывают, что любая структура I_s при $|s|>2$ тождественна некоторой структуре I_t, $|t|<|s|$. Поэтому глубина структуры I не превосходит двух и, следовательно, она имеет конечную сложность. Правые части показывают, что базис образуют следующие структуры: $\{I_1, I_2, I_3, I_{31}, I_{32}\}$ (нетрудно убедиться, что они попарно различны).

Таким образом, сложность данной структуры информированности равна пяти, а глубина равна двум. Для нахождения информационного равновесия надо решить следующую систему уравнений (см. выражение (1)):

$$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{2 - x_2^* - x_3^*}{3}, \\ x_2^* = \dfrac{2 - x_1^* - x_3^*}{3}, \\ x_3^* = \dfrac{1 - x_{31}^* - x_{32}^*}{3}, \\ x_{31}^* = \dfrac{1 - x_{32}^* - x_3^*}{3}, \\ x_{32}^* = \dfrac{1 - x_{31}^* - x_3^*}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^* = \dfrac{9}{20}, \\ x_2^* = \dfrac{9}{20}, \\ x_3^* = \dfrac{1}{5}, \\ x_{31}^* = \dfrac{1}{5}, \\ x_{32}^* = \dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

Таким образом, действия реальных агентов в ситуации информационного равновесия будут следующими: $x_1^* = x_2^* = 9/20$, $x_3^* = 1/5$.

П р и м е р 3. Пусть все трое агентов – оптимисты, первый и второй взаимно информированы, второй и третий также взаимно информированы. По мнению первого агента, третий считает всех троих одинаково информированными пессимистами; также и первый агент, по мнению третьего, считает всех троих одинаково информированными пессимистами.

Имеем: $I_1 >< I_2$, $I_2 >< I_3$, $I_1 \sim_{13} I_2 \sim_{13} I_3$, $I_1 \sim_{31} I_2 \sim_{31} I_3$.

Эти условия можно записать в виде следующих тождеств, имеющих место для любого $s \in \Sigma$ (воспользуемся соответствующими определениями и утверждениями 1, 2, 5):

$$I_{12s} = I_{2s},\ I_{13s1} = I_{131},\ I_{13s2} = I_{132},\ I_{13s3} = I_{13},\ I_{21s} = I_{1s},$$
$$I_{23s} = I_{3s},\ I_{31s1} = I_{31},\ I_{31s2} = I_{312},\ I_{31s3} = I_{313},\ I_{32s} = I_{2s}.$$

Аналогичные соотношения выполняются для равновесных действий x_s^*.

Левые части этих тождеств показывают, что любая структура I_s при $|s|>3$ тождественна некоторой структуре I_t, $|t|<|s|$. Поэтому глубина структуры I не превосходит трех и, следовательно, она имеет конечную сложность. Правые части тождеств показывают, что в базис могут входить лишь следующие структуры информированности: $I_1, I_2, I_3, I_{31}, I_{13}, I_{131}, I_{132}, I_{312}, I_{313}$.

Далее, для любого s Î S справедливы соотношения $q_{131s} = q_{31s} = q_{313s} = q_{13s} = q_{123s} = q_{213s} = 1$, из которых вытекают тождества $I_{131} = I_{31}$, $I_{313} = I_{13}$, $I_{123} = I_{213}$.

Таким образом, базис образуют следующие попарно различные структуры: $\{I_1, I_2, I_3, I_{31}, I_{13}, I_{132}\}$. Сложность данной структуры информированности равна шести, а глубина равна трем. Для нахождения информационного равновесия надо решить следующую систему уравнений (см. выражение (1)):

$$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{2-x_2^*-x_{13}^*}{3}, \\ x_2^* = \dfrac{2-x_1^*-x_3^*}{3}, \\ x_3^* = \dfrac{2-x_{31}^*-x_2^*}{3}, \\ x_{31}^* = \dfrac{1-x_{132}^*-x_{13}^*}{3}, \\ x_{13}^* = \dfrac{1-x_{31}^*-x_{132}^*}{3}, \\ x_{132}^* = \dfrac{1-x_{31}^*-x_{13}^*}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^* = \dfrac{17}{35}, \\ x_2^* = \dfrac{12}{35}, \\ x_3^* = \dfrac{17}{35}, \\ x_{31}^* = \dfrac{1}{5}, \\ x_{13}^* = \dfrac{1}{5}, \\ x_{132}^* = \dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

Таким образом, действия реальных агентов в ситуации информационного равновесия будут следующими: $x_1^* = x_3^* = 17/35$, $x_2^* = 12/35$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены подходы к анализу рефлексивных игр – игр, участники которых принимают решение на основе иерархии представлений о существенных параметрах, представлений о представлениях и т. д. Исследованы свойства точечной структуры информированности, в том числе такие, как конечная глубина и конечная сложность, позволяющие предложить в качестве концепции решения рефлексивной игры информационное равновесие, являющееся обобщением равновесия Нэша в некооперативных играх. Перспективным направлениями дальнейших исследований представляется следующие: рассмотрение вероятностных структур информированности; анализ возможного влияния на представления агентов новой информации (в том числе результатов игры); моделирование информационного управления – целенаправленного воздействия на структуру информированности игры.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. $I_l = I_m \Rightarrow \forall\ s, k \in \Sigma\ \ q_{lsk} = q_{msk} \Rightarrow \forall\ s \in \Sigma\ I_{ls} = I_{ms}$. Обратная импликация очевидна: достаточно положить s равной пустой последовательности.

Доказательство утверждения 2. $\forall\, i \in N\ \ \forall\ t, s \in \Sigma\ \ q_{tiis} = q_{tis} \Leftrightarrow \forall\, i \in N\ \forall\ t, s, k \in \Sigma\ \ q_{tiisk} = q_{tisk} \Leftrightarrow \forall\, i \in N\ \ \forall\ t, s \in \Sigma\ \ I_{tiis} = I_{tis}$.

Доказательство утверждения 3. В силу утверждения 2 справедливо тождество $I_{tiis} = I_{tis}$, что по определению t-субъективно тождественных структур информированности означает, что $I_i >_{ti} I_s$.

Доказательство утверждения 4. $I_l \sim_t I_m \quad \Leftrightarrow \; " \, i \in N$ $I_{tli} = I_{tmi} \Leftrightarrow$ {в силу утверждения 1} $\Leftrightarrow \; " \, i \in N \; " \, k \in S$ $I_{tlik} = I_{tmik} \Leftrightarrow$ {полагая $s = i\,k$} $\Leftrightarrow \; " \, s \in S_+ \, I_{tls} = I_{tms} \Leftrightarrow \; " \, s \in S_+ \; I_l >_s <_t I_m$.

Доказательство утверждения 5. Докажем для трех условий утверждения импликации $1 \Rightarrow 2$, $2 \Rightarrow 3$, $3 \Rightarrow 1$.

$1 \Rightarrow 2$. Для любых $i, j, m \in N$ имеем $I_i >_t I_m$, $I_j >_t I_m$, что означает выполнение тождеств $I_{tim} = I_{tm}$, $I_{tjm} = I_{tm}$. Отсюда $I_{tim} = I_{tjm}$, что доказывает условие 2 (с учетом утверждения 4).

$2 \Rightarrow 3$. Для пустой последовательности s условие 3 тривиально, поэтому возьмем произвольную непустую последовательность $s \in S_+$. Тогда $s = i_1 \ldots i_l$ ($i_k \in N$, $k = 1, \ldots, l$), при этом для любого $i \in N$ справедливы следующие соотношения:

I_{ti} = {в силу утверждения 2} = I_{tii} = {поскольку $I_i \sim_t I_{i_l}$} = I_{ti_li} = {в силу утверждения 2} = $I_{ti_li_li}$ = {поскольку $I_{i_l} \sim_t I_{i_{l-1}}$ и в силу утверждения 4} = $I_{ti_{l-1}i_li} = \ldots$ $= I_{ti_1 \ldots i_li} = I_{tsi}$.

$3 \Rightarrow 1$. Для любых $i, j \in N$ имеем $I_{tij} = I_{tj}$, $I_{tji} = I_{ti}$, что означает $I_i >\!<_t I_j$.

Доказательство утверждения 6. Пусть x_t^*, $t \; \hat{I} \; S_+$ – информационное равновесие. Тогда из конечности структуры информированности и условия 2 сразу следует, что попарно различных чисел x_t^* не более n.

Рассмотрим две любые тождественные структуры информированности: $I_l = I_m$. Соответственно, имеем $q_l = q_m$ и $x_l^* = x_m^*$. Далее, для любого $i \in N$ справедливо $I_{li} = I_{mi}$, следовательно, $x_{li}^* = x_{mi}^*$. Поэтому два уравнения системы (1), у которых в левой части стоят действия x_l^* и x_m^*, тождественно совпадают.

Доказательство утверждения 7. Непрерывность по всем аргументам функции f_i и ее строгая вогнутость по переменной x_i означает непрерывность по всем аргументам функций $j_{\,t_l}$ (где $t_l \in \Xi$, $w(t_l) = i$), определяемых соотношениями (3), и строгую вогнутость каждой из них по x_{t_l}. Поэтому утверждение сразу вытекает из теоремы фон-Неймана–Нэша.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mas-Colell A., Whinston M.D., Green J.R.* Microeconomic theory. N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995.
2. *Губко М.В., Новиков Д.А.* Теория игр в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2002.
3. *Myerson R.B.* Game theory: analysis of conflict. London: Harvard Univ. Press, 1991.
4. *Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Рефлексивные игры. М.: Синтег, 2003.
5. *Aumann R.J., Heifetz A.* Incomplete information. Handbook of Game Theory. V. III. Chapter 43. Amsterdam, Elseiver (forthcoming).
6. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.
7. *Кукушкин Н.С., Морозов В.В.* Теория неантагонистических игр. М.: Изд-во МГУ, 1984.
8. *Howard N.* Theory of meta-games / General systems. 1966. № 11. P. 187 – 200.
9. *Aumann R.J., Mashler M.* The bargaining set for cooperative games. Eds. M. Dresher, L.S. Shapley, and A.W. Tucker. Advances in Game Theory. Princeton: Princeton University Press, 1964. P. 443 – 447.
10. *Mertens J.-F., Zamir S.* Formulation of Bayesian analysis for games with incomplete information // Int. J. Game Theory. 1985. № 14. P. 1– 29.
11. *Harsanyi J.* Games with incomplete information played by "Bayesian" players // Management Sci. Part I: 1967. V. 14. № 3. P. 159 – 182. Part II: 1968. V. 14. № 5. P. 320 – 334. Part III: 1968. V. 14. № 7. P. 486 – 502.
12. *Sakovics J.* Games of incomplete information without common knowledge priors // Theory and decision. 2001. № 50. P. 347 – 366.
13. *Чхартишвили А.Г.* Информационное равновесие / Управление большими системами. Сб. тр. молодых ученых. Выпуск 3. Общая редакция – Д.А. Новиков. М.: ИПУ РАН, 2003. С. 94 – 109.