

Д.А. Новиков, д-р техн. наук

А.В. Цветков, канд техн. наук

(Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН, Москва)

АГРЕГИРОВАНИЕ ИНФОРМАЦИИ В МОДЕЛЯХ СТИМУЛИРОВАНИЯ

Решается задача стимулирования в активной системе, в которой вознаграждения управляемых субъектов основываются на наблюдаемом управляющим органом агрегированном результате их деятельности.

1. ВВЕДЕНИЕ

В большинстве известных моделей стимулирования [1-3] рассматриваются либо детерминированные активные системы (АС), в которых управляющий орган - центр - наблюдает результат деятельности каждого из управляемых субъектов - активных элементов (АЭ), находящийся в известном взаимно однозначном соответствии с выбранной последним стратегией (действием), либо АС с неопределенностью, в которых наблюдаемый результат деятельности АЭ зависит не только от его собственных действий, но и от неопределенных и/или случайных факторов.

Модели детерминированных многоэлементных АС, в которых центру известен только агрегированный результат деятельности АС, зависящий от действий всех АЭ, на сегодняшний день практически не исследованы (исключение составляют работы [4, 5], в которых рассматриваются проблемы точного агрегирования в иерархических играх, и [6], в которой производится в основном качественное обсуждение задач агрегирования в моделях АС).

Настоящая работа содержит формулировку и решение задачи стимулирования в многоэлементной детерминированной АС, в которой центр имеет

агрегированную информацию о результатах деятельности АЭ. Методологическую основу исследования составляют результаты изучения проблем агрегирования в теоретико-игровых моделях [4-6] и принцип декомпозиции игры АЭ [7-8], позволяющий эффективно решать задачи управления многоэлементными АС.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СТИМУЛИРОВАНИЯ В АКТИВНОЙ СИСТЕМЕ С АГРЕГИРОВАНИЕМ ИНФОРМАЦИИ

Рассмотрим многоэлементную детерминированную двухуровневую АС, состоящую из центра и n АЭ. Стратегией АЭ является выбор действий, стратегией центра – выбор функции стимулирования, то есть зависимости вознаграждения каждого АЭ от его действий и, быть может, действий других АЭ или других агрегированных показателей их совместной деятельности.

Обозначим $y_i \in A_i$ - действие i -го АЭ, $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ – множество АЭ, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in A' = \prod_{i=1}^n A_i$ - вектор действий АЭ, $y_{-i} = (y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n) \in A_{-i} = \prod_{j \neq i} A_j$ - обстановка игры для i -го АЭ.

Пусть результат деятельности $z \in A_0 = Q(A')$ АС, состоящей из n АЭ, является функцией (называемой функцией агрегирования) их действий: $z = Q(y)$. Интересы и предпочтения участников АС – центра и АЭ – выражены их целевыми функциями. Целевая функция центра является функционалом $F(s, z)$ и представляет собой разность между его доходом $H(z)$ и суммарным вознаграждением $u(z)$, выплачиваемым АЭ: $u(z) = \sum_{i=1}^n s_i(z)$, где $s_i(z)$ - стимулирование i -го АЭ, $s(z) = (s_1(z), s_2(z), \dots, s_n(z))$, то есть

$$(1) F(s, z) = H(z) - \sum_{i=1}^n s_i(z).$$

Целевая функция i -го АЭ является функционалом $f_i(s_i, y)$ и представляет собой разность между стимулированием, получаемым им от центра, и затратами $c_i(y)$, то есть:

$$(2) f_i(s_i(x), y) = s_i(z) - c_i(y), \quad i \in I.$$

Отметим, что индивидуальное вознаграждение и индивидуальные затраты i -го АЭ по выбору действия y_i в общем случае явным или неявным образом зависят от действий всех АЭ (случай сильно связанных АЭ с несепарабельными затратами [2, 7]).

Примем следующий порядок функционирования АС. Центру и АЭ на момент принятия решения о выбираемых стратегиях (соответственно - функциях стимулирования и действиях) известны целевые функции и допустимые множества всех участников АС, а также функция агрегирования. Центр, обладая правом первого хода, выбирает функции стимулирования и сообщает их АЭ, после чего АЭ при известных функциях стимулирования выбирают действия, максимизирующие их целевые функции.

В случае, когда индивидуальные действия АЭ наблюдаемы для центра (или когда центр может однозначно восстановить их по наблюдаемому результату деятельности), последний может использовать систему стимулирования, зависящую непосредственно от действий АЭ: " $i \in I \quad \tilde{s}_i(y) = s_i(Q(y))$ ". Методы решения задачи стимулирования для этого случая описаны в [2, 7, 8]. Поэтому рассмотрим случай, когда центр наблюдает только результат деятельности АС, от которого зависит его доход, но не знает и не может восстановить индивидуальных действий АЭ, то есть имеет место агрегирование информации - центр имеет не всю информацию о действиях АЭ, а ему известен лишь некоторый их агрегат.

Относительно параметров АС введем следующие предположения, которые, если не оговорено особо, будем считать выполненными в ходе всего последующего изложения:

A.1. " $i \in I \quad A_i$ - отрезок \mathbb{R}_+^1 с левым концом в нуле.

A.2. " $i \in I \quad 1$) функция $c_i(x)$ непрерывна по всем переменным; 2) " $y_i \in A_i$ $c_i(y)$ не убывает по y_i , $i \in I$; 3) " $y \in A$, $c_i(y) \geq 0$; 4) " $y_i \in A_i$, $c_i(0, y_{-i}) = 0$.

A.3. Функции стимулирования кусочно-непрерывны и принимают неотрицательные значения.

A.4. Функция дохода центра непрерывна и достигает максимума при ненулевом результате деятельности АС.

A.5. $Q: A' \otimes A_0 \hat{I} \hat{A}^m$ – однозначное непрерывное отображение, где $1 \leq m < n$ (при $m \geq n$ смысл агрегирования теряется).

Обозначим $P(s)$ – множество равновесных по Нэшу при системе стимулирования s действий АЭ – множество реализуемых действий (то есть будем считать, что АЭ выбирают свои стратегии одновременно и независимо друг от друга, не имея возможности обмениваться дополнительной информацией и полезностью). Минимальными затратами центра на стимулирование по реализации действий АЭ $y' \hat{I} A'$ будем называть минимальное значение суммарных выплат элементам, при которых данный вектор действий является равновесием Нэша в игре АЭ, то есть решение следующей задачи:

$$\sum_{i \in I} s_i(Q(y')) \rightarrow \min_{s(\cdot) \in \Xi(y')}, \text{ где } X(y') = \{s(\cdot) / y' \hat{I} P(s)\}.$$

Как и в одноэлементной АС [1-3], гарантированной эффективностью (далее просто "эффективностью") стимулирования является минимальное значение целевой функции центра на соответствующем множестве решений игры (всюду, где встречаются минимумы и максимумы, будем предполагать, что они достигаются):

$$(3) K(s(x)) = \min_{y \in P(s(\cdot))} F(s(x), Q(y)).$$

Задача синтеза оптимальной функции стимулирования заключается в поиске допустимой системы стимулирования s^* , имеющей максимальную эффективность:

$$(4) s^* = \arg \max_{s(\cdot)} K(s(x)).$$

В [8] доказано, что в частном случае, когда действия АЭ наблюдаются центром, оптимальной (точнее – δ -оптимальной, где $d = \sum_{i=1}^n d_i$) является ква-

зикомпенсаторная система стимулирования \hat{s}_K , зависящая от наблюдаемых действий АЭ:

$$(5) \hat{s}_{iK} = \begin{cases} c_i(y_i^*, y_{-i}) + d_i, & y_i = y_i^* \\ 0, & y_i \neq y_i^* \end{cases}, i \hat{I} I,$$

где d_i - сколь угодно малые строго положительные константы, а оптимальное действие y^* , реализуемое системой стимулирования (5) как единственное равновесие в доминантных стратегиях [3], является решением следующей задачи оптимального согласованного планирования [1]:

$$y^* = \arg \max_{y \in A'} \{ \hat{H}(y) - \sum_{i=1}^n c_i(y_i) \},$$

где $\hat{H}(\cdot)$ – функция дохода центра, зависящая от наблюдаемых действий АЭ. Взаимосвязь между функциями $H(\cdot)$ и $\hat{H}(\cdot)$, а также $S(x)$ и $\hat{s}(\cdot)$ исследовалась в [4]. В ходе дальнейшего изложения мы будем считать что функция дохода центра $H(x)$ и функция стимулирования $S(x)$ зависят от агрегированного результата деятельности $z \in \hat{I} A_0$.

Отметим, что в рассмотренных в [7, 8] задачах стимулирования декомпозиция игры АЭ, то есть переход к набору одноэлементных АС, основывалась на возможности центра поощрять АЭ за выбор определенного (и наблюдаемого центром) действия. Если действия АЭ ненаблюдаемы, то непосредственное применение идеи декомпозиции (то есть оптимальной системы стимулирования (5)) невозможно, поэтому при решении задач стимулирования, в которых вознаграждение АЭ зависит от агрегированного результата деятельности АС, следует использовать следующий **подход** – найти множество действий, приводящих к заданному результату деятельности, выделить среди них подмножество, характеризуемое минимальными суммарными затратами АЭ (и, следовательно, минимальными затратами центра на стимулирование при использовании компенсаторных функций стимулирования, которые оптимальны [2, 3, 7]), построить систему стимулирования, реализующую это подмножество действий, а затем определить - реализация какого из результатов деятельности наиболее выгодна для центра.

Перейдем к формальному описанию решения задачи стимулирования в АС с агрегированием информации.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СТИМУЛИРОВАНИЯ В АС С АГРЕГИРОВАНИЕМ ИНФОРМАЦИИ

Определим множество векторов действий АЭ, приводящих к заданному результату деятельности АС: $Y(z) = \{y \in \hat{I} A' / Q(y) = z\} \in \hat{I} A', z \in \hat{I} A_0$.

В [2, 6, 7] доказано, что в случае наблюдаемых действий АЭ минимальные затраты центра на стимулирование по реализации вектора действий $y \in \hat{I} A'$ равны суммарным затратам АЭ $\sum_{i \in I} c_i(y)$. По аналогии вычислим минимальные суммарные затраты АЭ по достижению результата деятельности

$z \in \hat{I} A_0$ $\tilde{J}(z) = \min_{y \in Y(z)} \sum_{i=1}^n c_i(y)$, а также множество действий

$Y^*(z) = \text{Arg} \min_{y \in Y(z)} \sum_{i=1}^n c_i(y)$, на котором этот минимум достигается.

Введем следующее предположение.

А.6. " $x \in \hat{I} A_0$, " $y' \in \hat{I} Y(x)$, " $i \in \hat{I} I$, " $y_i \in \text{Proj}_i Y(x)$ $c_j(y_i, y'_{-i})$ не убывает по $y_i, j \in \hat{I} I$.

В частности, предположение А.6 выполнено в случае, когда затраты каждого АЭ зависят только от его собственных действий.

Фиксируем произвольный результат деятельности $x \in \hat{I} A_0$ и произвольный вектор $y^*(x) \in \hat{I} Y^*(x) \in \hat{I} Y(x)$.

Теорема 1. При использовании центром системы стимулирования

$$(6) s_{ix}^*(z) = \begin{cases} c_i(y^*(x)), & z = x \\ 0, & z \neq x \end{cases}, i \in \hat{I} I,$$

вектор действий АЭ $y^*(x)$ реализуется с минимальными затратами центра на стимулирование равными $\tilde{J}(x)$.

Доказательство теоремы 1 приведено в приложении.

Недостатком системы стимулирования (6) является то, что при ее использовании центром, помимо определяемого теоремой 1 множества равновесий Нэша, существует равновесие в доминантных стратегиях, в том числе – вектор нулевых действий. Из доказательства теоремы 1 следует, что для того чтобы точки множества $Y^*(x)$ были единственными равновесными точками,

центр должен за их выбор доплачивать АЭ сколь угодно малую, но положительную, величину, то есть использовать следующую систему стимулирования (см. для сравнения (5)):

$$s_{ix}^*(z) = \begin{cases} c_i(y^*(x)) + d_i, & z = x \\ 0, & z \neq x \end{cases}, i \in I,$$

которая является d -оптимальной.

Итак, первый шаг решения задачи стимулирования (3)-(4) заключается в поиске минимальной системы стимулирования (характеризуемой в силу теоремы 1 затратами центра на стимулирование, равными $\tilde{J}(x)$), реализующей вектор действий АЭ, приводящий к заданному результату деятельности $x \in A_0$. Поэтому на втором шаге решения задачи стимулирования найдем наиболее выгодный для центра результат деятельности АС $x^* \in A_0$ как решение задачи оптимального согласованного планирования:

$$x^* = \arg \max_{x \in A_0} [H(x) - \tilde{J}(x)].$$

Рассмотрим класс унифицированных систем стимулирования, то есть систем стимулирования, в которых центр использует для всех АЭ одну и ту же зависимость индивидуального вознаграждения от результата деятельности АС (системы стимулирования, в которых зависимости вознаграждений АЭ от результатов их деятельности различны, называются персонифицированными [6]). Введем следующую функцию:

$$(7) c(y) = \max_{i \in I} \{c_i(y)\}.$$

На первом шаге вычислим минимальные затраты на стимулирование $J_U(z)$ по реализации результата деятельности $z \in A_0$ унифицированной системой стимулирования: $J_U(z) = \min_{y \in Y(z)} c(y)$. Множество векторов действий, минимизирующих затраты на стимулирование по реализации результата деятельности $z \in A_0$, имеет вид: $Y^*(z) = \text{Arg} \min_{y \in Y(z)} c(y)$.

По аналогии с теоремой 1 можно доказать, что унифицированная система стимулирования (ср. с (6)):

$$(8) s_{ix}(z) = \begin{cases} c(y^*(x)), & z = x \\ 0, & z \neq x \end{cases}, i \in I,$$

где $y^*(x)$ – произвольный элемент множества $Y^*(x)$, реализует результат деятельности $x \hat{I} A_0$ с минимальными в классе унифицированных систем стимулирования затратами на стимулирование (как и выше - см. (5) и (6), для того чтобы исключить выбор АЭ нулевых действий, при использовании унифицированных систем стимулирования центру следует доплачивать за выбор действий с ненулевыми затратами строго положительную величину элементам из множества $Arg \max_{i \in I} \{c_i(y)\}$).

На втором шаге решения задачи синтеза оптимальной унифицированной системы стимулирования найдем наиболее выгодный для центра результат деятельности АС x_U^* как решение задачи оптимального согласованного планирования: $x_U^* = arg \max_{z \in A_0} [H(z) - n J_U(z)]$.

Теорема 2. Эффективность унифицированного стимулирования не выше, чем эффективность персонифицированного стимулирования.

Доказательство теоремы 2 заключается в следующем. Фиксируем произвольный результат деятельности. Реализующая его унифицированная система стимулирования (8) в силу (7) характеризуется не меньшими суммарными затратами на стимулирование со стороны центра, чем система персонифицированного стимулирования (6) (так как " $i \hat{I} I$ ", " $y^* \hat{I} A' c_i(y^*) \leq c(y^*)$ "). По теореме о минимальных затратах на стимулирование [3] получаем утверждение теоремы.

Итак, теорема 1 дает решение задачи стимулирования в АС с агрегированием информации. Поэтому, имея результаты сравнения эффективностей унифицированного и персонифицированного стимулирования, исследуем как незнание (невозможность наблюдения) центром индивидуальных действий АЭ влияет на эффективность стимулирования.

Пусть как и выше функция дохода центра зависит от результата деятельности АС. Рассмотрим два случая. Первый случай - когда действия АЭ наблюдаемы, и центр может основывать стимулирование как на действиях АЭ, так и на результате деятельности АС. Второй случай, когда действия АЭ ненаблюдаемы, и стимулирование может зависеть только от наблюдаемого

результата деятельности АС. Сравним эффективности стимулирования для этих двух случаев.

В первом случае минимальные затраты на стимулирование $J_1(y)$ по реализации вектора $y \in \hat{I} A'$ действий АЭ равны: $J_1(y) = \sum_{i=1}^n c_i(y)$, а эффективность стимулирования K_1 равна: $K_1 = \max_{y \in A'} \{H(Q(y)) - J_1(y)\}$. Во втором случае минимальные затраты центра на стимулирование $J_2(z)$ по реализации результата деятельности $z \in \hat{I} A_0$ определяются следующим образом (см. теорему 1):

$J_2(z) = \min_{y \in Y(z)} \sum_{i=1}^n c_i(y)$, а эффективность стимулирования K_2 равна:

$$K_2 = \max_{z \in A_0} \{H(z) - J_2(z)\}.$$

Теорема 3. $K_2 = K_1$.

Доказательство теоремы 3 приведено в приложении.

Теорема 3 (которую условно можно назвать "теоремой об идеальном агрегировании в моделях стимулирования"), помимо оценок сравнительной эффективности имеет чрезвычайно важное методологическое значение. Она утверждает, что в случае, когда функция дохода центра зависит только от результата деятельности АС, эффективности стимулирования одинаковы как при использовании стимулирования АЭ за наблюдаемые действия, так и при стимулировании за агрегированный результат деятельности, несущий в силу предположений А.5 и А.6 меньшую информацию (отметим, что центр при этом должен знать функции затрат агентов), чем вектор действий АЭ.

Другими словами, наличие агрегирования информации не снижает эффективности функционирования системы. Это достаточно парадоксально, так как в [2, 6] доказано, что наличие неопределенности и агрегирования в задачах стимулирования не повышает эффективности. В рассматриваемой модели присутствует идеальное агрегирование (см. определение и подробное обсуждение проблем агрегирования в управлении активными системами в [1, 6, 7]), возможность осуществления которого содержательно обусловлена тем, что центру неважно какие действия выбирают АЭ, лишь бы эти действия приводили с минимальными суммарными затратами к заданному результату

деятельности. Условия А.5 и А.6 оказывается достаточными для того, чтобы центр мог переложить все «проблемы» по определению равновесия на АЭ. При этом уменьшается информационная нагрузка на центр, а эффективность стимулирования остается такой же.

Итак, качественный вывод из результата теоремы 3 следующий: если доход центра зависит от агрегированных показателей деятельности АЭ, то целесообразно основывать стимулирование АЭ на этих агрегированных показателях. Даже если индивидуальные действия АЭ наблюдаются центром, то использование системы стимулирования, основывающейся на действиях АЭ, не приведет к увеличению эффективности управления, а лишь увеличит информационную нагрузку на центр.

Напомним, что при описании модели АС выше мы ограничились случаем, когда для всех АЭ используется система стимулирования одного типа. В том числе это предположение означает, что, если действия наблюдаемы, то они наблюдаемы центром у всех АЭ, а если ненаблюдаемы, то, опять же, у всех АЭ. На практике часто встречаются ситуации, когда действия одних элементов наблюдаемы, а других – нет. В подобных случаях центру следует использовать комбинацию моделей результатов, приведенных в [8], и теоремы 1: тех АЭ, действия которых наблюдаемы, стимулировать на основании их действий, а остальных – на основании агрегированного результата их деятельности.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе приведены результаты изучения теоретико-игровых моделей механизмов стимулирования в АС с агрегированием информации. При исследовании этого класса моделей ключевую роль играет *обобщение принципа компенсации затрат*.

Принцип компенсации затрат [2, 3] заключается в том, что оптимальная система стимулирования должна в точности компенсировать затраты АЭ. На модели с агрегированием информации принцип компенсации затрат обобщается следующим образом: минимальные затраты центра на стимулирование

по реализации заданного результата деятельности АС определяются как минимум компенсируемых центром суммарных затрат АЭ, при условии, что последние выбирают вектор действий, приводящий к заданному результату деятельности.

Авторы признательны В.С. Алиеву за внимание к настоящей работе и ценные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Докажем, что при использовании центром системы стимулирования (6) вектор действий $y^*(x)$ является равновесием Нэша в игре АЭ. Равновесный по Нэшу (при использовании центром системы стимулирования $s(x)$) вектор действий АЭ $y^N \hat{I} A'$ определяется следующим образом: " $i \hat{I} I$ ", " $y_i \hat{I} A_i$ $s_i(Q(y^N)) - c_i(y^N) \geq s_i(Q(y'_i, y_{-i}^N)) - c_i(y'_i, y_{-i}^N)$ ". Предположим, что $y^*(x)$ не является равновесием Нэша. Тогда " $i \hat{I} I$ ", " $y'_i \hat{I} A_i$ $s_{ix}(Q(y^*)) - c_i(y^*) < s_{ix}(Q(y'_i, y_{-i}^*)) - c_i(y'_i, y_{-i}^*)$ ".

Рассмотрим два случая. В первом случае $y'_i \hat{I} A_i$ $Q(y'_i, y_{-i}^*) \neq x$. Тогда получаем, что $c_i(y'_i, y_{-i}^*) < 0$ – противоречие с предположением А.2. Во втором случае $y'_i \hat{I} A_i$ $Q(y'_i, y_{-i}^*) = x$. Тогда $c_i(y^*) > c_i(y'_i, y_{-i}^*)$ – противоречие с предположениями А.2, А.6 и определением множества $Y^*(x)$.

Итак, при использовании центром системы стимулирования (6) $y^*(x)$ – равновесие Нэша. Затраты центра на стимулирование при этом равны $\tilde{J}(x)$. Минимальность этих затрат следует из того (см. [3]), что в равновесии Нэша все АЭ имеют нулевые значения целевых функций и ни у одного из них в общем случае (то есть не только в точке Нэша) не существует стратегии, обеспечивающей ему строго положительное значение целевой функции (выбор любым АЭ действий, характеризуемых нулевыми затратами, в силу предположения А.2 и (6) гарантирует ему значение целевой функции в точности равное нулю).

Доказательство теоремы 3. Пусть $K_1 < K_2$, тогда " $y \hat{\Gamma} A$ " выполнено:

$$(П.1) H(Q(y)) - \sum_{i=1}^n c_i(y) < H(x) - \min_{y \in Y(x)} \sum_{i=1}^n c_i(y),$$

где $x = \arg \max_{z \in A_0} \{H(z) - J_2(z)\}$. Выбирая в левой части выражения (П.1)

$$y = y^*(x) \hat{\Gamma} Y^*(x), \text{ получим: } \sum_{i=1}^n c_i(y^*(x)) > \min_{y \in Y(x)} \sum_{i=1}^n c_i(y) - \text{противоречие в силу}$$

определений множеств $Y(x)$ и $Y^*(x)$.

Пусть $K_1 > K_2$, тогда " $z \hat{\Gamma} A_0$ " выполнено:

$$(П.2) \{H(Q(y^*)) - \sum_{i=1}^n c_i(y^*)\} > H(z) - \min_{y \in Y(z)} \sum_{i=1}^n c_i(y),$$

где $y^* = \arg \max_{y \in A} \{H(Q(y)) - J_1(y)\}$. Выбирая в правой части выражения (П.2)

$$\text{результат деятельности } z \text{ равным } x = Q(y^*), \text{ получим: } \sum_{i=1}^n c_i(y^*) < \min_{y \in Y(x)} \sum_{i=1}^n c_i(y)$$

- противоречие в силу того, что $y^* \hat{\Gamma} Y(x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981.
2. Новиков Д.А. Стимулирование в социально-экономических системах (базовые математические модели). М.: ИПУ РАН, 1998.
3. Новиков Д.А., Петраков С.Н. Курс теории активных систем. М.: СИНТЕГ, 1999.
4. Алиев В.С., Кононенко А.Ф. Об условиях точного агрегирования в теоретико-игровых моделях. М.: ВЦ РАН, 1991.
5. Алиев В.С., Цветков А.В. Игра двух лиц с фиксированной последовательностью ходов при агрегированной информации / Планирование, оценка деятельности и стимулирование в активных системах. М.: ИПУ АН СССР, 1985.
6. Новиков Д.А. Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. М.: Фонд "Проблемы управления", 1999.
7. Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы стимулирования в многоэлементных организационных системах. М.: ИПУ РАН, 2000.
8. Новиков Д.А., Цветков А.В. Декомпозиция игры активных элементов в задачах стимулирования // Автоматика и телемеханика. 2001. №2. С.173-180.