УДК 519.714.3 *Автоматика и Телемеханика. 2001. № 2. С. 163 – 170*

Д.А. Новиков, д-р техн. наук

А.В. Цветков, канд техн. наук

(Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН, Москва)

ДЕКОМПОЗИЦИЯ ИГРЫ АКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ СТИМУЛИРОВАНИЯ

Задача стимулирования в многоэлементной активной системе (*АС*) *с несепарабельными функциями затрат активных элементов* (*АЭ*) *решается на основе декомпозиции игры АЭ, то есть построения системы стимулирования, реализующей оптимальные* (*с точки зрения управляющего органа - центра*) *стратегии АЭ как равновесия в доминантных стратегиях.*

1. ВВЕДЕНИЕ

В большинстве рассматриваемых в теории активных систем [1-4] и в теории контрактов [5-6] моделей стимулирования изучаются одноэлементные АС, состоящие из одного управляющего органа (центра) и одного управляемого субъекта - активного элемента. Отсутствие общих подходов к решению задач стимулирования в многоэлементных АС обусловлено, наверное, тем, что до недавнего времени были неизвестны эффективные методы анализа свойств решений игры АЭ. В настоящей работе реализуется предложенный в [7] метод, заключающийся в выборе системы стимулирования, реализующей оптимальный с точки зрения центра вектор действий АЭ как вектор их равновесий в доминантных стратегиях (РДС) [8], что позволяет декомпозировать игру АЭ и получить аналитическое решение задачи стимулирования.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СТИМУЛИРОВАНИЯ

Рассмотрим многоэлементную детерминированную двухуровневую АС, состоящую из центра и n АЭ. Стратегией АЭ является выбор действий, стратегией центра – выбор функции стимулирования, то есть зависимости вознаграждения каждого АЭ от его действий и, быть может, действий других АЭ.

Обозначим y_i î A_i - действие i-го АЭ, i î $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множество АЭ, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ î $A' = \prod_{i=1}^{n} A_i$ - вектор действий АЭ, $y_{-i} = (y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n)$ Î $A_{-i} = \prod_{j \neq i} A_j$ - обстановка игры для i-го АЭ.

Интересы и предпочтения участников АС – центра и АЭ – выражены их целевыми функциями. Целевая функция центра $F(s, y)$ представляет собой разность между его доходом $H(y)$ и суммарным вознаграждением $u(y)$, выплачиваемым АЭ: $u(y) = \sum_{i=1}^{n} s_i(y)$, где $s_i(y)$ - стимулирование i-го АЭ, $s(y) = (s_1(y), s_2(y), \ldots, s_n(y))$. Целевая функция i-го АЭ $f_i(s_i, y)$ представляет собой разность между стимулированием, получаемым от центра, и затратами $c_i(y)$, то есть:

(1) $f_i(s_i, y) = s_i(y) - c_i(y)$, i î I.

(2) $F(s, y) = H(y) - \sum_{i=1}^{n} s_i(y)$.

Отметим, что и индивидуальное вознаграждение, и индивидуальные затраты i-го АЭ по выбору действия y_i в общем случае зависят от действий всех АЭ (случай сильно связанных АЭ с несепарабельными затратами [7]).

Примем следующий порядок функционирования АС. Центру и АЭ на момент принятия решения о выбираемых стратегиях (соответственно - функциях стимулирования и действиях) известны целевые функции и допустимые множества всех участников АС. Центр, обладая правом первого хода, выбирает функции стимулирования и сообщает их АЭ, после чего АЭ при известных функциях стимулирования выбирают действия, максимизирующие их целевые функции.

Относительно параметров АС введем следующие предположения:

А.1. $\forall\ i \in I\ A_i \subseteq \Re^1_+$.

А.2. $\forall\ i \in I$ 1) функция $c_i(\cdot)$ непрерывна по всем переменным; 2) $\forall\ y_i \in A_i$ $c_i(y)$ не убывает по y_i, $i \in I$; 3) $\forall\ y \in A'\ c_i(y) \geq 0$; 4) $\forall\ y_{-i} \in A_{-i}\ c_i(0, y_{-i}) = 0$.

А.3. Функции стимулирования кусочно-непрерывны и принимают неотрицательные значения.

А.4. Функция дохода центра непрерывна по всем переменным и достигает максимума при ненулевых действиях АЭ.

Обозначим M - множество систем стимулирования, удовлетворяющих предположению А.3, $P(s)$ – множество равновесных при системе стимулирования s стратегий АЭ – множество решений игры (тип равновесия пока не оговаривается; единственно предположим, что АЭ выбирают свои стратегии одновременно и независимо друг от друга, не имея возможности обмениваться дополнительной информацией и полезностью [4, 8]).

Как и в одноэлементной АС [2, 4], гарантированной эффективностью (далее просто "эффективностью") стимулирования является минимальное значение целевой функции центра на соответствующем множестве решений игры:

(3) $K(s) = \min\limits_{y \in P(s)} F(s, y)$.

Задача синтеза оптимальной функции стимулирования заключается в поиске допустимой системы стимулирования s^*, имеющей максимальную эффективность:

(4) $s^* = arg \max\limits_{s \in M} K(s)$.

В [2, 4] доказано, что в частном случае, когда АЭ независимы (вознаграждение каждого из них и затраты каждого из них сепарабельны, то есть зависят только от его собственных действий), то оптимальной (точнее –

δ-оптимальной, где $\delta = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$) является квазикомпенсаторная система стимулирования:

(5) $\sigma_{iK}(y_i) = \begin{cases} c_i(y_i^*) + \delta_i, & y_i = y_i^* \\ 0, & y_i \neq y_i^* \end{cases}, \; i \in I,$

где δ_i - сколь угодно малые строго положительные константы, а оптимальное действие y^*, реализуемое системой стимулирования (5) как РДС, является решением следующей задачи оптимального согласованного планирования:

$$y^* = arg \max_{y \in A'} \{H(y) - \sum_{i=1}^{n} c_i(y_i)\}.$$

Перейдем к решению задачи стимулирования в многоэлементной АС.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СТИМУЛИРОВАНИЯ В МНОГОЭЛЕМЕНТНОЙ АС

Если стимулирование каждого АЭ зависит от действий всех АЭ (случай коллективного стимулирования [3, 7]) и затраты несепарабельны, то определения множества равновесий Нэша $E_N(\sigma)$ и РДС $y_d \in A$ имеют вид:

(6) $E_N(\sigma) = \{y^N \in A \mid \forall i \in I \;\forall y_i \in A_i \;\sigma_i(y^N) - c_i(y^N) \geq \sigma_i(y_i, y_{-i}^N) - c_i(y_i, y_{-i}^N)\}$,

$y_{i_d} \in A_i$ - доминантная стратегия i-го АЭ, тогда и только тогда, когда

$$\forall y_i \in A_i, \;\forall y_{-i} \in A_{-i} \;\sigma_i(y_{i_d}, y_{-i}) - c_i(y_{i_d}, y_{-i}) \geq \sigma_i(y_i, y_{-i}) - c_i(y_i, y_{-i}).$$

Если при заданной системе стимулирования у всех АЭ имеется доминантная стратегия, то говорят, что данная система стимулирования реализует соответствующий вектор действий как РДС.

Если стимулирование каждого АЭ зависит только от его собственных действий (случай индивидуального стимулирования [3, 7]), то определения множества равновесий Нэша $E_N(\sigma)$ и РДС $y_d \in A$ имеют вид:

(7) $E_N(\sigma) = \{y^N \in A \mid \forall i \in I \;\forall y_i \in A_i \;\sigma_i(y_i^N) - c_i(y^N) \geq \sigma_i(y_i) - c_i(y_i, y_{-i}^N)\}$,

$y_{i_d} \in A_i$ - доминантная стратегия i-го АЭ, тогда и только тогда, когда

$$\forall y_i \in A_i, \;\forall y_{-i} \in A_{-i} \;\sigma_i(y_{i_d}) - c_i(y_{i_d}, y_{-i}) \geq \sigma_i(y_i) - c_i(y_i, y_{-i}).$$

Фиксируем произвольный вектор действий АЭ $y^* \in A'$ и рассмотрим следующую систему стимулирования:

$$(8)\quad \sigma_i(y^*, y) = \begin{cases} c_i(y_i^*, y_{-i}) + d_i, & y_i = y_i^* \\ 0, & y_i \neq y_i^* \end{cases}, \quad d_i \geq 0,\ i \in I.$$

<u>Теорема 1.</u> При использовании центром системы стимулирования (8) y^* – РДС. Более того, если $d_i > 0$, $i \in I$, то y^* – единственное РДС.

Доказательства всех теорем вынесены в приложение.

Содержательно, при использовании системы стимулирования (8) центр использует следующий **принцип декомпозиции**: он предлагает i-му АЭ – "выбирай действие y_i^*, а я компенсирую тебе затраты, независимо от того какие действия выбрали остальные АЭ, если же ты выберешь любое другое действие, то вознаграждение будет равно нулю". Используя такую стратегию центр декомпозирует игру АЭ.

Если стимулирование каждого АЭ зависит только от его собственного действия, то, фиксировав для каждого АЭ обстановку игры, перейдем от (8) к системе индивидуального стимулирования следующим образом: фиксируем произвольный вектор действий АЭ $y^* \in A'$ и определим систему стимулирования:

$$(9)\quad \sigma_i(y^*, y_i) = \begin{cases} c_i(y_i^*, y_{-i}^*) + d_i, & y_i = y_i^* \\ 0, & y_i \neq y_i^* \end{cases}, \quad d_i \geq 0,\ i \in I.$$

Отметим, что функция стимулирования (9) зависит только от действия i-го АЭ, а величина y_{-i}^* входит в нее как параметр. Кроме того, при использовании центром системы стимулирования (9), в отличие от (8), каждый из АЭ имеет косвенную информацию обо всех компонентах того вектора действий, который хочет реализовать центр. Для того, чтобы система стимулирования (9) реализовывала вектор y^* как РДС необходимо введение дополнительных (по сравнению со случаем использования (8)) предположений относительно функций затрат АЭ.

<u>Теорема 2.</u> При использовании центром системы стимулирования (9) $y^* \in E_N(\sigma)$. Более того:

а) если выполнено условие:

(10) $\forall y^1 \neq y^2 \in A' \ \exists i \in I: \ y_i^1 \neq y_i^2$ и $c_i(y^1) + c_i(y^2) > c_i(y_i^1, y_{-i}^2) - d_i$,

то y^* - единственное равновесие Нэша;

б) если выполнено условие:

(11) $\forall i \in I, \ \forall y^1 \neq y^2 \in A' \ c_i(y^1) + c_i(y^2) \geq c_i(y_i^1, y_{-i}^2) - d_i$,

то вектор действий y^* является РДС;

в) если выполнено условие (11) и $d_i > 0, \ i \in I$, то вектор действий y^* является единственным РДС.

При $d_i \geq 0, \ i \in I$, условие (11) выполнено, в частности, для любых сепарабельных затрат активных элементов; а условие (10) – для сепарабельных строго монотонных функций затрат при $d_i > 0, \ i \in I$, при этом стратегия (9) переходит в стратегию (5) (отметим, что в условии (10) можно использовать нестрогое неравенство, одновременно требуя строгой положительности d_i; точно так же в пункте в) можно ослабить требование строгой положительности d_i, но рассматривать (11) как строгое неравенство). Кроме того, в работе [7] для частного случая сепарабельных затрат (когда затраты каждого АЭ зависят только от его собственных действий) доказано, что в рассматриваемой модели для любой системы коллективного стимулирования найдется система индивидуального стимулирования не меньшей эффективности.

Содержательно, при использовании системы стимулирования (9) центр предлагает i-му АЭ – "выбирай действие y_i^*, а я компенсирую тебе затраты, считая, что остальные АЭ также выбрали соответствующие компоненты - y_{-i}^*, если же ты выберешь любое другое действие, то вознаграждение будет равно нулю". Используя такую стратегию центр декомпозирует игру АЭ.

Идея **декомпозиции игры АЭ** за счет использования соответствующих компенсаторных функций стимулирования типа (8) и (9) является ключевой для всех моделей стимулирования в многоэлементных АС (см. также [7]).

Здесь же уместно качественно пояснить необходимость введения неотрицательных констант $\{d_i\}$ в выражениях (5), (8) и (9). Если требуется реализовать некоторое действие как одно из равновесий Нэша, то (как видно из формулировок и доказательств теорем) эти константы могут быть выбраны равными нулю. Если требуется, чтобы равновесие было единственным (в частности, чтобы АЭ не выбирали нулевые действия - иначе при вычислении гарантированного результата в (3) центр вынужден рассчитывать на выбор АЭ нулевых действий - см. предположение А.4), то элементам следует доплатить сколь угодно малую, но строго положительную величину за выбор именно того действия, которое предлагается центром. Более того, величины $\{d_i\}$ в выражениях (5), (8) и (9) играют важную роль и с точки зрения устойчивости компенсаторной системы стимулирования по параметрам модели. Например, если функция затрат i-го АЭ известна с точностью до D_i £ $d_i / 2$, то компенсаторная система стимулирования все равно реализует действие y^* (см. доказательства и подробное обсуждение в [9]).

Вектор оптимальных реализуемых действий АЭ y^*, фигурирующий в качестве параметра в выражении (9), определяется в результате решения следующей задачи оптимального согласованного планирования:

$$y^* = arg \max_{t \in A'} \{H(t) - u(t)\},$$

а эффективность системы стимулирования (9) равна следующей величине:

$$K^* = H(y^*) - \sum_{i=1}^{n} c_i(y^*) - d.$$

<u>Теорема 3.</u> Класс (с параметром y^*) систем стимулирования (8), (9) является d-оптимальным.

В рассмотренных задачах стимулирования оптимальными оказались разрывные квазикомпенсаторные функции стимулирования: АЭ компенсировались затраты при выборе ими определенных действий (при тех или иных предположениях об обстановке игры), в остальных случаях вознаграждение равнялось нулю. Рассмотрим насколько изменятся полученные результаты, если потребовать, чтобы функции стимулирования были непрерывными. Интуитивно понятно, что, если стимулирование будет в окрестности реализуемого действия изменяться быстрее, чем затраты, то все результаты останутся в силе. Приведем формальный результат.

Пусть в рассмотренной выше модели функции затрат АЭ непрерывны по всем переменным, а множества возможных действий АЭ компактны. Определим непрерывные функции стимулирования следующего вида

(12) $s_i(y) = c_i(y)\, q_i(y_i^*, y)$,

где $q_i(y_i^*, y)$ – непрерывная функция своих переменных, удовлетворяющая следующему условию:

(13) $\forall\, i \in I \ \ \forall\, y_i \in A_i \ \ \forall\, y_{-i} \in A_{-i} \ \ q_i(y_i^*, y) \leq 1, \ \ q_i(y_i^*, y_i^*, y_{-i}) = 1.$

<u>Теорема 4.</u> Если выполнена гипотеза благожелательности, то при использовании центром системы стимулирования (12)-(13) y^* – РДС.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе представлены результаты рассмотрения теоретико-игровых моделей механизмов стимулирования в многоэлементных активных системах в предположении некооперативного поведения АЭ.

При исследовании этого класса моделей ключевую роль играют два принципа – *принцип декомпозиции игры АЭ* и *принцип компенсации затрат*.

Принцип компенсации затрат, заключающийся в том, что минимальная система стимулирования, реализующая любое действие АЭ, должна в точности компенсировать его затраты, справедлив и для многоэлементных, и для одноэлементных АС.

Принцип декомпозиции игры (см. теоремы 1 и 2) АЭ специфичен для многоэлементных АС и заключается побуждении АЭ выбирать наиболее выгодные для центра действия как РДС, за счет использования соответствующих систем стимулирования (см. выражения (8) и (9)), которые являются оптимальными (теорема 3).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Докажем сначала, что вектор $y^* \in A'$ при $d_i \geq 0,\ i \in I$, является равновесием Нэша. Пусть y^* - не равновесие Нэша.

Тогда $\exists\, i \in I$, $\exists\, \tilde{y}_i \in A_i$: $\sigma_i(y^*, \tilde{y}_i, y^*_{-i}) - c_i(\tilde{y}_i, y^*_{-i}) > \sigma_i(y^*, y^*) - c_i(y^*)$. Подставляя (8), получаем, что $c_i(\tilde{y}_i, y^*_{-i}) < -d_i$, что противоречит предположению А.2.

Докажем, что при $d_i > 0$, y^* - единственное равновесие Нэша. Пусть $y' \in A'$ – равновесие Нэша, причем $y' \neq y^*$. Тогда $\forall\, i \in I$, $\forall\, y_i \in A_i$ $\sigma_i(y^*, y_i', y'_{-i}) - c_i(y_i', y'_{-i}) \geq \sigma_i(y^*, y_i, y'_{-i}) - c_i(y_i, y'_{-i})$. Подставляя $y_i = y_i^*$, получаем: $c_i(y_i', y'_{-i}) \leq -d_i$, что противоречит предположению А.2.

Фиксируем произвольный номер $i \in I$ и докажем, что y_i^* - доминантная стратегия i-го АЭ. Запишем определение доминантной стратегии: $\forall\, y_i \in A_i$, $\forall\, y_{-i} \in A_{-i}$ $\sigma_i(y^*, y_i^*, y_{-i}) - c_i(y_i^*, y_{-i}) \geq \sigma_i(y^*, y_i, y_{-i}) - c_i(y_i, y_{-i})$. Подставляя (8), получаем: $d_i \geq -c_i(y_i, y_{-i})$, что всегда имеет место в силу предположения А.2.

Докажем, что y^* - единственное РДС. Пусть существует РДС $y' \neq y^*$, тогда из определения доминантной стратегии следует, что при использовании центром системы стимулирования (8) выполнено: $\exists\, i \in I$: $c_i(y') \leq -d_i$, что противоречит предположению А.2.

Доказательство теоремы 2. То, что $y^* \in E_N(\sigma)$ при $d_i \geq 0$, $i \in I$, следует из приведенного выше определения равновесия Нэша (7) и выражения (9).

Докажем пункт а). Предположим, что выполнено (10) и существует равновесие Нэша $y' \neq y^*$. Тогда для любого АЭ $i \in I$ (в том числе и для такого, для которого выполнено $y_i' \neq y_i^*$), выбор стратегии y_i' максимизирует его целевую функцию (в том числе и по сравнению с выбором стратегии y_i^*) при обстановке игры y'_{-i}, значит выполнено: $-c_i(y') \geq c_i(y^*) + d_i - c_i(y_i^*, y'_{-i})$, что противоречит (10).

Докажем пункт б). Запишем определение РДС для рассматриваемой модели при использовании центром системы стимулирования (9): y^* - РДС тогда и только тогда, когда

(П.1) $\forall\, i \in I\ \forall\, y_i \in A_i, y_i \neq y_i^*\ y_{-i} \in A_{-i}\ \ c_i(y_i^*, y^*_{-i}) - c_i(y_i^*, y_{-i}) \geq -c_i(y_i, y_{-i}) - d_i$.

Подставляя в (11) $y^1 = y^*$, $y^2 = y$, получаем, что при $d_i \geq 0$, $i \in I$, выполнено (П.1).

Докажем пункт в). Предположим, что существует вектор действий $y' \in A'$, $y' \neq y^*$, такой, что $y' \notin E_\delta(\sigma)$. Тогда система неравенств, аналогичная (П.1), имеет место и для y'. Подставляя в нее $y=y^*$, получим: $-\delta_i \geq c_i(y_i', y_{-i}^*)$, что при $\delta_i > 0$ противоречит предположению А.2.

Доказательство теоремы 3. Теоремы 1 и 2 утверждают, что при использовании систем стимулирования (8) и (9), соответственно, действие y^* является равновесием (Нэша или РДС). При $\delta_i = 0$, $i \in I$, эти системы стимулирования характеризуются минимально возможными затратами на стимулирование (напомним, что в силу предположений А.2 и А.3 центр должен обеспечить АЭ неотрицательную полезность (условие индивидуальной рациональности гласит, что любой АЭ всегда имеет возможность выбрать нулевое действие, которое даже при нулевом вознаграждении обеспечивает ему неотрицательную полезность), следовательно, по теореме о том, что оптимальным является класс систем стимулирования, реализующих действия с минимальными затратами на стимулирование [4], класс систем стимулирования (8), (9) имеет максимальную эффективность в задачах стимулирования как первого, так и второго рода.

При использовании системы стимулирования (8) или (9) затраты центра на стимулирование по реализации действия y^* равны следующей величине:

$$u(y^*) = \sum_{i=1}^{n} (c_i(y^*) + \delta_i).$$

Предположим, что существует другая система стимулирования, которая реализует то же действие y^*, но с меньшими затратами на стимулирование. Из условия индивидуальной рациональности АЭ следует, что затраты на стимулирование по реализации вектора действий y^* не могут быть меньше, чем $\sum_{i=1}^{n} c_i(y^*)$. Так как функция стимулирования входит в целевую функцию центра аддитивно, то потери эффективности при использовании центром системы стимулирования (8) или (9) не превышают $\delta = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$.

Доказательство теоремы 4. Выбирая действие y_i^*, независимо от обстановки игры, i-ый АЭ получает нулевой выигрыш. Подставляя (12) в определение РДС, получаем, что, выбирая любое другое действие, АЭ при любой обстановке (в силу условия (13) выполнено: $\forall\ y_i \in A_i \quad \forall\ y_{-i} \in A_{-i}$ $(q_i(y_i^*, y) - 1)\ c(y) \le 0$) получает неположительный выигрыш.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурков В.Н., Кондратьев В.В.* Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981.
2. *Новиков Д.А.* Стимулирование в социально-экономических системах (базовые математические модели). М.: ИПУ РАН, 1998.
3. *Новиков Д.А.* Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. М.: Фонд "Проблемы управления", 1999.
4. *Новиков Д.А., Петраков С.Н.* Курс теории активных систем. М.: СИНТЕГ, 1999.
5. *Mookherjee D.* Optimal incentive schemes with many agents // Review of Economic Studies. 1984. Vol. 51. № 2. P. 433 - 446.
6. *Новиков Д.А.* Механизмы стимулирования в динамических и многоэлементных социально-экономических системах // Автоматика и Телемеханика. 1997. № 6. С. 3 - 26.
7. *Новиков Д.А., Цветков А.В.* Механизмы стимулирования в многоэлементных организационных системах. М.: , 2000.
8. *Myerson R.B.* Game theory: analysis of conflict. London: Harvard Univ. Press, 1991.
9. *Новиков Д.*А. Обобщенные решения задач стимулирования в активных системах. М.: ИПУ РАН, 1998.