Для получения нетривиального решения системы (2.16) экспертам следует задать (по аналогии с [34]) часть элементов матриц $\Lambda_{w_{u_i}}$ и $\Lambda_{w_{u_i \gamma_i}}$, т.е. решить задачу смешанной идентификации билинейной системы [95].

### 2.2.2. Разработка алгоритмов идентификации нелинейных окрестностных смешанных систем

Нелинейная окрестностная смешанная система описывается уравнением [12,86]

$$\Phi\big(g; \{v(\alpha), \alpha \in O_v[g]\}; \{x(\beta), \beta \in O_x[g]\}; \{y(\gamma), \gamma \in O_y[g]\}, a\big) = 0, \qquad (2.24)$$

где $g \in A = \{0, 1, \ldots\}$, $O_v[g], O_x[g], O_y[g]$ – окрестности узла $g$ системы по входу, состоянию, выходу соответственно; $\alpha, \beta, \gamma \in A$.

В задаче идентификации задан массив $K_L$ наборов «вход–состояние–выход» $v_u$, $x_u$, $y_u$, $1 \le u \le L$ во всех вершинах g, включенных в окрестности.

Для отыскания вектора параметров $a$ следует решить систему уравнений:

$$\Phi\big(g; \{v_u(\alpha), \alpha \in O_v[g]\}; \{x_u(\beta), \beta \in O_x[g]\}; \{y_u(\gamma), \gamma \in O_y[g]\}, a\big) = 0,$$

$$g \in G, \; 1 \le u \le L.$$

Задача может быть решена при помощи итерационного алгоритма нелинейного метода наименьших квадратов, использующего линеаризацию функции Φ по вектору a в окрестности текущей точки $a_u$, что приводит к оценке $\hat{a}^{(L)}$ вектора параметров a. При поступлении нового набора данных $K_{L+1} = \big\{\big(v_{L+1}(\alpha), \alpha \in O_v(g)\big); \big(x_{L+1}(\beta), \beta \in O_x(g)\big); \big(y_{L+1}(\gamma), \gamma \in O_\gamma(g)\big)\big\}$, пересчет оценки $\hat{a}^{(L)}$ в оценку $\hat{a}^{(L+1)} = \theta(\hat{a}^{(L)}, K_{L+1})$ осуществляется при помощи рекурретно-итерационной процедуры нелинейного метода наименьших квадратов, что решает задачу адаптивной идентификации параметров для систем нелинейного (в частности, билинейного) окрестностного класса.

Рассмотрим частный случай общей системы (2.24), явную разностную окрестностную нелинейную систему по состоянию

$$x_{i+1} = f(x_i, a) + N\xi_i, \quad i = 0, 1, \ldots, L,$$

где $x_i \in R^n$; $f$ – матрица известных нелинейных функций; $f \in R^{n \times m}$, $a \in R^m$ – вектор неизвестных параметров; N – квадратная матрица известных коэффициентов; $\xi_i$ – гауссов шум с характеристиками $M(\xi_i) = 0$,

$M(\xi_i \xi_j^T) = I\delta_{i-j}$; M – оператор математического ожидания; $\delta$ – дельта-функция Кронекера; T – символ транспонирования.

Оценку $\hat{a}^{(L+1)} = \theta(\hat{a}^{(L)}, K_{L+1})$ параметров получаем из нелинейного алгебраического уравнения, являющегося развитием [79] на случай окрестностных систем,

$$\sum_{i=0}^{L} \left( \frac{\partial f\left(x_i, \hat{a}^{(L+1)}\right)}{\partial a} \right)^T R^{-1} \left( x_{i+1} - f\left(x_i, \hat{a}^{(L+1)}\right) \right) = 0, \tag{2.25}$$

где $R = NN^T$.

Для решения (2.25) применяем алгоритм линеаризации

$$a^{j+1} = a^j + \left[ \sum_{i=1}^{L} \left( \frac{\partial f\left(x_i, a^j\right)}{\partial a} \right)^T R^{-1} \frac{\partial f\left(x_i, a^j\right)}{\partial a} \right]^{-1} \cdot$$

$$\cdot \sum_{i=0}^{L} \left( \frac{\partial f\left(x_i, a^j\right)}{\partial a} \right)^T R^{-1} \left( x_{i+1} - f\left(x_i, a^j\right) \right), \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

Алгоритм дает последовательность значений параметров, сходящуюся к решению уравнения (2.25).

## 2.3. Синтез алгоритмов смешанного управления окрестностными системами

### 2.3.1. Постановка задачи смешанного управления

В данном разделе рассмотрим две различные постановки задачи смешанного управления для смешанных систем [34]. Термин “задача смешанного управления” был введен в главе 1.

Рассмотрим постановку для симметричных систем. Для смешанной системы рассуждения проводятся аналогично.

Предположим, что в системе (1.3) во всех узлах $a \in A$ заданы либо векторы входных воздействий, либо векторы состояний. Количество узлов с заданными входами $v[a_{k_i}], i = \overline{1, e}$ есть e; количество узлов с заданными состояниями $x[a_{l_i}], i = \overline{1, f}$ равно f. Здесь $e + f = N$. Необходимо определить оставшиеся неизвестными f векторов входа $v[a_{l_i}], i = \overline{1, f}$ и e векторов состояния $x[a_{k_i}], i = \overline{1, e}$.

Назовем данную постановку задачи смешанного управления глобальной [34]. Примеры таких задач встречаются в прикладных дисциплинах [74].

Конкретизируем окрестности по входу и состоянию каждого из узлов системы (1.3) $a \in A$:

$$O_v[a] = \left\{\alpha_{a,1}, \mathbf{K}, \alpha_{a,\deg_v a}\right\}, \; O_x[a] = \left\{\beta_{a,1}, \mathbf{K}, \beta_{a,\deg_x a}\right\},$$

где $\deg_v a$, $\deg_x a$ – степени вершины a (число соседей) по входу и состоянию соответственно.

Заданы значения известных координат входа $v\left[\tilde{k}_i, \tilde{k}^{+}_{i,j}\right]$ и состояния $x\left[\tilde{l}_i, \tilde{l}^{+}_{i,j}\right]$.

Здесь и далее для краткости записи нотация $s^{+}_{ij}$, где $s \in \{k, l\}$, обозначает пару $(s_i, s^{+}_{ij})$ – элемент прямого произведения $S \times S_i$, то есть j-ю известную координату в вершине $s_i$. Аналогично, $s_{\bar{ij}}$ – j-я неизвестная координата в узле $s_i$.

Множества $\tilde{K} \subset A$, $\tilde{K} = \left\{\tilde{k}_1, ..., \tilde{k}_e\right\}$, $\left|\tilde{K}\right| = \tilde{e}$, $\tilde{L} \subset A$, $\tilde{L} = \left\{\tilde{l}_1, ..., \tilde{l}_f\right\}$, $\left|\tilde{L}\right| = \tilde{f}$ содержат номера узлов системы, в которых задана часть компонентов вектора входного воздействия, состояния соответственно. На элементах множеств $\tilde{K}$, $\tilde{L}$ заданы множества $\tilde{K}^{+}_i = \left\{\tilde{k}^{+}_{i,1}, \mathbf{K}, \tilde{k}^{+}_{i,\tilde{e}_i}\right\}$, $i = \overline{1,\tilde{e}}$, $j = \overline{1,\tilde{e}_i}$, $\tilde{e}_i \le m$ и $L^{+}_i = \left\{l^{+}_{i,1}, \mathbf{K} \tilde{l}^{+}_{i,\tilde{f}_i}\right\}$, $i = \overline{1,\tilde{f}}$, $j = \overline{1,\tilde{f}_i}$, $\tilde{f}_i \le n$, содержащие номера известных компонентов входного воздействия и состояния в каждой из вершин с номером $\tilde{k}_i$ и $\tilde{l}_i$ соответственно.

С помощью введенных обозначений сформулируем локальную задачу смешанного управления. Необходимо определить неизвестные компоненты сигналов системы:

- часть координат входа в вершинах из множества $\tilde{K}$ $v\left[\tilde{k}_i, \tilde{k}^{-}_{i,j}\right]$, $i = \overline{1,\tilde{e}}$, $j = \overline{1, m - \tilde{e}_i}$;
- часть координат состояния в вершинах из множества $\tilde{L}$ $x\left[\tilde{l}_i, \tilde{l}^{-}_{i,j}\right]$, $i = \overline{1,\tilde{f}}$, $j = \overline{1, n - \tilde{f}_i}$;
- полностью неизвестные векторы входа и состояния в узлах с номерами из множеств $\overline{K}, \overline{L}$, дополняющих заданные множества $\tilde{K}, \tilde{L}$ до множества A.

## 2.32. Разработка глобальных алгоритмов смешанного управления

Введем необходимые для синтеза алгоритма решения данной задачи определения [34]. Определим множества $K = L \cap M$, $|K| = r$, $r \le \min(g, p)$, $M^* = M \setminus K$, $|M^*| = g - r$, $L^* = L \setminus K$, $|L^*| = p - r$. Другими словами, K содержит вершины, в которых известны и управления, и состояния; $M^*$ содержит вершины, где известны только управления и $L^*$ содержит узлы, где известны только состояния. Далее, введем множество $K^* = A \setminus (L^* \cup M^* \cup K)$, $|K^*| = N - (g + p - r)$, состоящее из узлов, в которых неизвестны ни управляющие воздействия, ни состояния. Очевидно, что искомые множества $M'$ и $L'$ подчиняются тождествам:

$$M' = L^* \cup K^* = (L \setminus K) \cup \left(A \setminus (L \cup M)\right),$$

$$L' = M^* \cup K^* = (M \setminus K) \cup \left(A \setminus (L \cup M)\right).$$

Уточненная задача выглядит следующим образом: необходимо определить неизвестные управления

$$v_u = \left[v[l_1^*]...v[l_{|L^*|}^*]...v[k_1^*]...v[k_{|K^*|}^*]\right]^T \text{ на множествах } L^*, K^*$$

и неизвестные состояния

$$x_u = \left[x[m_1^*]...x[m_{|M^*|}^*]...x[k_1^*]...x[k_{|K^*|}^*]\right]^T \text{ на множествах } M^*, K^*.$$

Обозначим вектор неизвестных через $X = [v_u \ x_u]^T$.

Далее во избежание громоздких выкладок считаем, что при любом A $O_x[a] = O_v[a] = O[a]$. В общем случае алгоритм сохраняется, так как окрестности по состоянию и управлению можно задать с помощью соответствующего выбора матриц $\Xi, \Omega$. Например, если $\beta \notin O[a]$, $a, \beta \in A$ , то $\Xi[a, \beta]$ – матрица, состоящая только из нулей.

Разделим известные и неизвестные члены в уравнениях, перенеся известные в правую, а неизвестные – в левую часть. При этом в левой части окажутся члены, содержащие управления с индексами из множеств $L^*, K^*$ и члены, содержащие состояния с индексами из множеств $M^*, K^*$, в правой – члены, содержащие управления с индексами из множеств $M^*, K$ и состояния с индексами из множеств $L^*, K$.

Таким образом, система (1.3) приведена к системе линейных алгебраических уравнений специальной иерархической блочной структуры

$$\Lambda X = B. \qquad (2.26)$$

Матрица коэффициентов $\Lambda$ этой системы имеет вид

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\Psi[M^*,L^*] & \Psi[M^*,K^*] & -\Phi[M^*,M^*] & -\Phi[M^*,K^*]\\ \Psi[L^*,L^*] & \Psi[L^*,K^*] & -\Phi[L^*,M^*] & -\Phi[L^*,K^*]\\ \Psi[K,L^*] & \Psi[K,K^*] & -\Phi[K,M^*] & -\Phi[K,K^*]\\ \Psi[K^*,L^*] & \Psi[K^*,K^*] & -\Phi[K^*,M^*] & -\Phi[K^*,K^*]\end{bmatrix}, \qquad (2.27)$$

где элементы блочной матрицы $\Lambda\in R^{Nm\times\{q(N-g)+n(N-p)\}}$ сами являются блочными матрицами и имеют следующую структуру:

$$\Psi[S_1,S_2]=\begin{bmatrix}\Psi[s_{11},s_{21}] & \dots & \Psi[s_{11},s_{2|s_2|}]\\ \vdots & & \vdots\\ \Psi[s_{1|s_1|},s_{21}] & \dots & \Psi[s_{1|s_1|},s_{2|s_2|}]\end{bmatrix}, \Psi[S_1,S_2]\in R^{|S_1|m\times|S_2|q}, \qquad (2.28)$$

$$\Phi[S_1,S_2]=\begin{bmatrix}\Phi[s_{11},s_{21}] & \dots & \Phi[s_{11},s_{2|s_2|}]\\ \vdots & & \vdots\\ \Phi[s_{1|s_1|},s_{21}] & \dots & \Phi[s_{1|s_1|},s_{2|s_2|}]\end{bmatrix}, \Phi[S_1,S_2]\in R^{|S_1|m\times|S_2|n}, \qquad (2.29)$$

где $S_1=\{s_{11},\dots s_{1|s_1|}\}$, $S_2=\{s_{21},\dots s_{2|s_2|}\}$ – множества из набора $\{M^*,L^*,K,K^*\}$, $|S_1|,|S_2|$ – мощности (число элементов) этих множеств.

Столбец свободных членов $B\in R^{Nm\times 1}$ также является блочным вектором и принимает следующий вид:

$$B=[b[M^*]\quad b[L^*]\quad b[K]\quad b[K^*]]^T. \qquad (2.30)$$

Его элементы $b[S]\in R^{|S|m\times 1}$ имеют нижеприведенную структуру:

$$b[S]=\begin{bmatrix}-\sum\limits_{i=1}^{|S|}\Psi[s_1,m_i^*]v[m_i^*]+\sum\limits_{j=1}^{r}\left(-\Psi[s_1,k_j]v[k_j]+\Phi[s_1,k_j]x[k_j]\right)+\\ +\sum\limits_{i=1}^{p-r}\Phi[s_1,l_i^*]x[l_i^*]\\ \vdots\\ -\sum\limits_{i=1}^{|S|}\Psi[s_{|s|},m_i^*]v[m_i^*]+\sum\limits_{j=1}^{r}\left(-\Psi[s_{|s|},k_j]v[k_j]+\Phi[s_{|s|},k_j]x[k_j]\right)+\\ +\sum\limits_{i=1}^{p-r}\Phi[s_{|s|},l_i^*]x[l_i^*]\end{bmatrix}, \qquad (2.31)$$

где $S\in\{M^*,L^*,K,K^*\}$.

Поставленная задача может быть исследована и решена с использованием обобщенного обращения; если $\Lambda^{-}$ – обобщенная обратная к $\Lambda$, то

а) система (2.26) имеет решение тогда и только тогда, когда $\Lambda\Lambda^{-}B = B$;

б) решение совместной системы записывается в виде

$$X = \Lambda^{-}B + (I - \Lambda^{-}\Lambda)y, \qquad (2.32)$$

где $I \in R^{\{q(N-g)+n(N-p)\}\times\{q(N-g)+n(N-p)\}}$ – единичная матрица,

$y \in R^{\{q(N-g)+n(N-p)\}\times 1}$ – произвольный вектор;

в) псевдорешение несовместной системы, минимизирующее невязку между правой и левой частями (2.26), записывается в виде

$$X = \Lambda^{+}B + (I - \Lambda^{+}\Lambda)y, \qquad (2.33)$$

где $\Lambda^{+}$ – псевдообратная к $\Lambda$.

Алгоритмы обобщенного обращения и псевдообращения достаточно полно разработаны и исследованы. Контролем расчета при помощи данного алгоритма (при условии, что система (2.26) совместна) может служить подстановка найденных по формуле (2.33) $x_u$ и $v_u$ в систему (1.3).

В случае, когда одно (или несколько) из множеств $M^*, L^*, K, K^*$ пусто, алгоритм сохраняет свою функциональность. Из матриц $\Lambda, B$ вычеркиваются блоки, имеющие индексы пустых множеств. Например, для прямой задачи является пустым множество K, а множество $L^*$ состоит из одного элемента $x[0]$. Для задачи управления пусты множества $M^*, K$.

Таким образом, данная постановка задачи смешанного управления является более общей, чем прямая задача и задача управления. Последние являются частными случаями задачи смешанного управления.

Отметим частный случай, когда $L \cap M = \varnothing$, $L \cup M = A$. Тогда $\Lambda \in R^{(g+p)q\times(qp+ng)}$, $B \in R^{(g+p)q\times 1}$ приобретают вид

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Psi[m_1,l_1] & \ldots & \Psi[m_1,l_p] & -\Phi[m_1,m_1] & \ldots & -\Phi[m_1,m_g] \\ \vdots & & & & \vdots & \\ \Psi[m_g,l_1] & \ldots & \Psi[m_g,l_p] & -\Phi[m_g,m_1] & \ldots & -\Phi[m_g,m_g] \\ \Psi[l_1,l_1] & \ldots & \Psi[l_1,l_p] & -\Phi[l_1,m_1] & \ldots & -\Phi[l_1,m_g] \\ \vdots & & & & \vdots & \\ \Psi[l_p,l_1] & \ldots & \Psi[l_p,l_p] & -\Phi[l_p,m_1] & \ldots & -\Phi[l_p,m_g] \end{bmatrix}, \qquad (2.34)$$

$$
B = \begin{bmatrix}
-\sum_{i=1}^{g}\Psi[m_1, m_i]v[m_i] + \sum_{j=1}^{p}\Phi[m_1, l_j]x[l_j] \\
\vdots \\
-\sum_{i=1}^{g}\Psi[m_g, m_i]v[m_i] + \sum_{j=1}^{p}\Phi[m_g, l_j]x[l_j] \\
-\sum_{i=1}^{g}\Psi[l_1, m_i]v[m_i] + \sum_{j=1}^{p}\Phi[l_1, l_j]x[l_j] \\
\vdots \\
-\sum_{i=1}^{g}\Psi[l_p, m_i]v[m_i] + \sum_{j=1}^{p}\Phi[l_p, l_j]x[l_j]
\end{bmatrix}. \qquad (2.35)
$$

### *Сингулярные системы*

Важным частным случаем системы (1.3) являются сингулярные системы (см., например, [52, 117, 120]), в данном контексте записываемые в виде

$$
\Phi[a, a]\,x[a] = -\sum_{\beta \in O[a]} \Phi[a, \beta]\,x[\beta] + v[a], \qquad (2.36)
$$

где $\Phi[\alpha, \beta] \in R^{q \times n}$, $\alpha, \beta \in A$.

Для сингулярных систем алгоритм решения глобальной задачи смешанного управления упрощается, матрицы принимают вид

$$
\Lambda = \begin{bmatrix}
E[M^*, L^*] & E[M^*, K^*] & -\Phi[M^*, M^*] & -\Phi[M^*, K^*] \\
E[L^*, L^*] & E[L^*, K^*] & -\Phi[L^*, M^*] & -\Phi[L^*, K^*] \\
E[K, L^*] & E[K, K^*] & -\Phi[K, M^*] & -\Phi[K, K^*] \\
E[K^*, L^*] & E[K^*, K^*] & -\Phi[K^*, M^*] & -\Phi[K^*, K^*]
\end{bmatrix}, \qquad (2.37)
$$

где $\Phi[S_1, S_2] \in R^{|S_1|m \times |S_2|n}$, $S_1, S_2 \in \{M^*, L^*, K, K^*\}$ определяются по формулам (2.28)-(2.30), а $E[S_1, S_1] \in R^{|S_1|m \times |S_2|q}$ – блочные матрицы, состоящие из единичных матриц $I \in R^{q \times q}$ и определяемые следующим образом:

$$
E[S_1, S_2] = \begin{bmatrix}
I_{11} & \mathbf{K} & I_{1|S_1|} \\
\vdots & & \vdots \\
I_{|S_2|1} & \mathbf{K} & I_{|S_2||S_1|}
\end{bmatrix}, \ \Psi[S_1, S_2] \in R^{|S_1|q \times |S_2|q}. \qquad (2.38)
$$

Элементы вектора B $b[S] \in R^{|S|q \times 1}$, $S \in \{M^*, L^*, K, K^*\}$ имеют следующий вид:

$$
b[S]=\begin{bmatrix}
-\sum\limits_{i=1}^{|S|} v[s_i]+\sum\limits_{j=1}^{r}\left(-v[k_j]+\Phi[s_1,k_j]x[k_j]\right)+\sum\limits_{i=1}^{p-r}\Phi[s_1,l_i^*]x[l_i^*]\\
\vdots\\
-\sum\limits_{i=1}^{|S|} v[s_i]+\sum\limits_{j=1}^{r}\left(-v[k_j]+\Phi[s_{|S|},k_j]x[k_j]\right)+\sum\limits_{i=1}^{p-r}\Phi[s_{|S|},l_i^*]x[l_i^*]
\end{bmatrix}. \qquad (2.39)
$$

### 2.3.3. Разработка локальных алгоритмов смешанного управления для симметричных систем

Рассмотрим алгоритм, соответствующий локальной постановке задачи смешанного управления, когда в некоторых узлах заданы компоненты входов и состояний [34,37] (см., также, [23,27,29-31,33,89,90]).

Конкретизируем окрестности по входу и состоянию каждого из узлов системы (1.3) $a \in A$:

$$O_v[a]=\{\alpha_{a,1},\ldots,\alpha_{a,\deg_v a}\}, \qquad O_x[a]=\{\beta_{a,1},\ldots,\beta_{a,\deg_x a}\},$$

где $\deg_v a$, $\deg_x a$ – степени вершины a (число соседей) по входу и состоянию соответственно.

Для вывода алгоритма решения ЛЗСУ для симметричной системы применим следующий подход, напоминающий подход к решению задачи смешанной параметрической идентификации: распишем уравнения системы для всех узлов $\forall a \in A$ и разнесем неизвестные и заданные компоненты сигналов в разные части уравнений, оставив первые справа, а вторые слева, получив таким образом систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) $\Lambda X = B$ специальной иерархической блочной структуры относительно вектора неизвестных, составленного из неизвестных компонентов сигналов. Далее СЛАУ возможно решить с использованием псевдообращения.

Для формирования матрицы коэффициентов и вектора свободных членов разобьем множество аргумента A на непересекающиеся множества.

Сделаем некоторые предположения. Пусть $S^{v,x}=\hat{K}\cap\hat{L}, \left|S^{v,x}\right|=g$ – множество вершин, в которых частично известны вход и состояние.

Обозначим $K=\hat{K}\setminus S^{v,x}$, $|K|=\hat{e}-\left|S^{v,x}\right|=e$ – множество узлов, в которых известен лишь вход; $L=\hat{L}\setminus S^{v,x}$, $|L|=\hat{f}-\left|S^{v,x}\right|=f$ – множество узлов, в которых известно лишь состояние.

Обозначим $S = A \setminus (K \cup L \cup S^{v,x})$, $|S| = h$ – множество узлов, в которых неизвестны вход и состояние.

Множества $K, L, S^{v,x}, S$, выбранные так, что $A = K \cup L \cup S^{v,x} \cup S$, удовлетворяют наложенным ранее требованиям:

$S_{f_i} \cap S_{f_j} = \varnothing$, $S_{f_i}, S_{f_j} \in \{K, L, S^{v,x}, S\}$, $i, j = \overline{1,4}$ (множества не пересекаются друг с другом) и $\sum_{i=1}^{4} |S_{f_i}| = N$.

Составим вектор неизвестных X в СЛАУ для поиска неизвестных координат сигналов системы

$$X = [v^- \quad x^-], \tag{2.40}$$

где блочные векторы $v^-, x^-$ имеют следующий вид:

$$v^- = [v[K^-] \quad v[L\ ] \quad v[S^{v,x-}] \quad v[S\ ]], \tag{2.41}$$

$$x^- = [x[K\ ] \quad x[L^-] \quad x[S^{v,x-}] \quad y[S\ ]]. \tag{2.42}$$

Распишем ниже структуру составляющих блочных векторов $v^-, x^-$. Для вектора $v^-$ они имеют вид

$$v[K^-] = \left\| v[k_i^-] \right\|,\ i = \overline{1, e_i},\ v[k_i^-] = \left\| v[k_i, k_{i,j}^-] \right\|,\ j = \overline{1, m - e_i};$$

$$v[L\ ] = \left\| v[l_i\ ] \right\|,\ i = \overline{1, f_i},\ v[l_i\ ] = \left\| v[l_i\ , j] \right\|,\ j = \overline{1, m};$$

$$v[S^{v,x-}] = \left\| v[s_i^{v,x-}] \right\|,\ i = \overline{1, g},\ v[s_i^{v,x-}] = \left\| v[s_i^{v,x-}, s_{i,j}^{v,x-}] \right\|,\ j = \overline{1, m - g_i};$$

$$v[S\ ] = \left\| v[s_i\ ] \right\|,\ i = \overline{1, h},\ v[s_i\ ] = \left\| v[s_i\ , j] \right\|,\ j = \overline{1, m}.$$

Для $x^-$ эти векторы имеют вид

$$x[K\ ] = \left\| x[k_i\ ] \right\|,\ i = \overline{1, e_i},\ x[k_i\ ] = \left\| x[k_i\ , j] \right\|,\ j = \overline{1, n};$$

$$x[L^-] = \left\| x[l_i^-] \right\|,\ i = \overline{1, f_i},\ x[l_i^-] = \left\| x[l_i^-, l_{i,j}^-] \right\|,\ j = \overline{1, n - f_i};$$

$$x[S^{v,x-}] = \left\| x[s_i^{v,x-}] \right\|,\ i = \overline{1, g},\ x[s_i^{v,x-}] = \left\| x[s_i^{v,x-}, s_{i,j}^{v,x-}] \right\|,\ j = \overline{1, n - g};$$

$$v[S\ ] = \left\| v[s_i\ ] \right\|,\ i = \overline{1, h},\ v[s_i\ ] = \left\| v[s_i\ , j] \right\|,\ j = \overline{1, m}.$$

Определим вспомогательные множества $\forall\, a \in A = K \cup L \cup S^{v,x} \cup S$:

$$K \cap O_v[a] = K_v[a] = \{k_{v,1}[a], \ldots, k_{v,\tilde{e}_a^v}[a]\};\ |K_v[a]| = \tilde{e}_a^v;$$

$$L \cap O_v[a] = L_v[a] = \{l_{v,1}[a], \ldots, l_{v,\tilde{e}_a^v}[a]\};\ |L_v[a]| = \tilde{f}_a^v;$$

$$S^{v,x} \cap O_v[a] = S_v^{v,x}[a] = \{s_{v,1}^{v,x}[a], \ldots, s^{v,x}_{v,\tilde g_a^v}[a]\};\ \left|S_v^{v,x}[a]\right| = \tilde g_a^v;$$

$$S \cap O_v[a] = S_v[a] = \{s_{v,1}[a], \ldots, s_{v,\tilde h_a^v}[a]\};\ \left|S_v[a]\right| = \tilde h_a^v.$$

Аналогично

$$K \cap O_x[a] = K_x[a] = \{k_{x,1}[a], \ldots, k_{x,\tilde e_a^x}[a]\};\ \left|K_x[a]\right| = \tilde e_a^x;$$

$$L \cap O_x[a] = L_x[a] = \{l_{x,1}[a], \ldots, l_{x,\tilde e_a^x}[a]\};\ \left|L_x[a]\right| = \tilde f_a^x;$$

$$S^{v,x} \cap O_x[a] = S_x^{v,x}[a] = \{s_{x,1}^{v,x}[a], \ldots, s^{v,x}_{x,\tilde g_a^x}[a]\};\ \left|S_x^{v,x}[a]\right| = \tilde g_a^x;$$

$$S \cap O_x[a] = S_x[a] = \{s_{x,1}[a], \ldots, s_{x,\tilde h_a^x}[a]\};\ \left|S_x[a]\right| = \tilde h_a^x.$$

Распишем уравнения системы для всех узлов, что даст систему из N матричных уравнений:

$$\sum_{i=1}^{\tilde e_{k1}^v} \Xi[k_1, k_{v,i}[k_1]]\, v[k_{v,i}[k_1]] + \sum_{i=1}^{\tilde f_{k1}^v} \Xi[k_1, l_{v,i}[k_1]]\, v[l_{v,i}[k_1]] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\tilde g_{k1}^v} \Xi[k_1, s_{v,i}^{v,x}[k_1]]\, v[s_{v,i}^{v,x}[k_1]] + \sum_{i=1}^{\tilde h_{k1}^v} \Xi[k_1, s_{v,i}[k_1]]\, v[s_{v,i}[k_1]] =$$

$$= \sum_{i=1}^{\tilde e_{k1}^v} \Omega[k_1, k_{x,i}[k_1]]\, x[k_{x,i}[k_1]] + \sum_{i=1}^{\tilde f_{k1}^v} \Omega[k_1, l_{x,i}[k_1]]\, x[l_{x,i}[k_1]] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\tilde g_{k1}^v} \Omega[k_1, s_{v,i}^{v,x}[k_1]]\, x[s_{v,i}^{v,x}[k_1]] + \sum_{i=1}^{\tilde h_{k1}^v} \Omega[k_1, s_{v,i}[k_1]]\, x[s_{v,i}[k_1]]$$

$$\vdots$$

Матрица коэффициентов $\Lambda$ уравнения относительно вектора неизвестных X примет вид

$$\Lambda = [\Lambda_\Xi \quad \Lambda_\Omega], \tag{2.43}$$

где входящие в нее блоки имеют следующую структуру:

$$\Lambda_\Xi = \begin{bmatrix} \Xi[K, K^{-1}] & \Xi[K, L] & \Xi[K, S^{v,x-}] & \Xi[K, S] \\ \Xi[L, K^{-1}] & \Xi[L, L] & \Xi[L, S^{v,x-}] & \Xi[L, S] \\ \Xi[S^{v,x}, K^{-}] & \Xi[S^{v,x}, L] & \Xi[S^{v,x}, S^{v,x-}] & \Xi[S^{v,x}, S] \\ \Xi[S, K^{-1}] & \Xi[S, L] & \Xi[S, S^{v,x-}] & \Xi[S, S] \end{bmatrix}, \tag{2.44}$$

$$\Lambda_\Omega=\begin{bmatrix}\Omega[K\ ,K\ ] & \Omega[K\ ,L^-] & \Omega[K,S^{v,x-}] & \Omega[K,S\ ]\\ \Omega[L\ ,K\ ] & \Omega[L\ ,L^-] & \Omega[L\ ,S^{v,x-}] & \Omega[L\ ,S\ ]\\ \Omega[S^{v,x},K\ ] & \Omega[S^{v,x},L^-] & \Omega[S^{v,x},S^{v,x-}] & \Omega[S^{v,x},S\ ]\\ \Omega[S\ ,K\ ] & \Omega[S\ ,L^-] & \Omega[S\ ,S^{v,x-}] & \Omega[S\ ,S\ ]\end{bmatrix}. \qquad (2.45)$$

Блок пропадает, если хотя бы один из его параметров – пустое множество. Для $\forall\, S^s \in \{K, L, S^{v,x}, S\}, s=\overline{1,4}$

$$\Xi[S^s,K^-]=\begin{bmatrix}\Xi[s_1^s,k_1] & \cdots & \Xi[s_1^s,k_e]\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \Xi[s_{|S_i^f|}^s,k_1] & \cdots & \Xi[s_{|S^s|}^s,k_e]\end{bmatrix},$$

$$\Xi[s_i^s,k_j]=\begin{cases}\Xi^-[s_i^s,k_j]\in R^{c\times(m-e_j)}, \text{ если } k_j\in K\cap O_v[s_i^s]\\ 0\in R^{c\times(m-e_j)}\end{cases};$$

$$\Xi^-[s_i^s,k_j]=\begin{cases}\Xi[s_i^s,k_j](row,col), \text{если } v[k_j,col] \text{ неизвестен;}\\ \qquad row=\overline{1,c}; col=\overline{1,m-e_j},\\ 0, \text{ иначе,}\end{cases}$$

$$\Xi[S^s,L]=\begin{bmatrix}\Xi[s_1^s,l_1] & \cdots & \Xi[s_1^s,l_f]\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \Xi[s_{|S^s|}^s,l_1] & \cdots & \Xi[s_{|S^s|}^s,l_f]\end{bmatrix},$$

$$\Xi[s_i^s,l_j]=\begin{cases}\Xi^-[s_i^s,l_j]\in R^{c\times m}, \text{ если } l_j\in L\cap O_v[s_i^s]\\ \qquad 0\in R^{c\times m}\end{cases},$$

$$\Xi^-[s_i^s,l_j]=\begin{bmatrix}\Xi[s_i^s,l_j](1,1) & \cdots & \Xi[s_i^s,l_j](1,m)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \Xi[s_i^s,l_j](c,1) & \cdots & \Xi[s_i^s,l_j](c,m)\end{bmatrix},$$

$$\Xi[S^s,S^{v,x}]=\begin{cases}\text{пусто, если } S^{v,x-}=\{\}\\ \begin{bmatrix}\Xi[s_1^s,s_1^{v,x}] & \cdots & \Xi[s_1^s,s_g^{v,x}]\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \Xi[s_{|S^s|}^s,s_1^{v,x}] & \cdots & \Xi[s_{|S^s|}^s,s_g^{v,x}]\end{bmatrix}\end{cases},$$

$$\Xi[S^s,S]=\begin{bmatrix} \Xi[s_1^s,s_1] & \cdots & \Xi[s_1^s,s_h] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Xi[s_{|S^s|}^s,s_h] & \cdots & \Xi[s_{|S^s|}^s,s_h] \end{bmatrix}.$$

Вектор свободных членов СЛАУ примет вид

$$B=\left[b[M^*]\ b[L^*]\ b[K]\ b[K^*]\right]^T\in R^{N\times 1}, \tag{2.46}$$

где блок, соответствующий множеству S из набора $\{M^*,L^*,K,K^*\}$, имеет вид $b[S]=\left[b[s_1]\ldots b[s_{|S|}]\right]$. Его элементы вычисляются по следующей формуле:

$$b[s_i]=\sum_{i=1}^{g-r}\sum_{j=1}^{g_i}\left(\Xi[m_1^*,m_i^*](1,m_{ij}^+)v(m_i^*,m_{ij}^+)\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s_i''}\left(\Xi[m_1^*,k_i](1,k_{ij}^+)v(k_i,k_{ij}^+)\right)-$$

$$-\sum_{i=1}^{p-r}\sum_{j=1}^{p_i}\left(\Phi[m_1^*,l_i^*](1,l_{ij}^+)x(l_i^*,l_{ij}^+)\right)-$$

$$-\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s_i''}\left(\Phi[m_1^*,k_i](1,k_{ij}^+)x(k_i,k_{ij}^+)\right).$$

### *Вариант алгоритма смешанного управления*

Рассмотрим вариант локального алгоритма решения задачи смешанного управления для смешанных систем [34,35]. Данный алгоритм может применяться в тех случаях, когда ограничения на объем доступной памяти компьютера менее жесткие, чем в предыдущем случае. Его преимущество – более высокая скорость работы.

Пусть после расписывания уравнения модели смешанной системы (1.4) для всех узлов системы получено уравнение вида

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} V \\ X \\ Y \end{bmatrix}=0, \tag{2.47}$$

где $V\in R^{Nm}$, $X\in R^{Nn}$, $Y\in R^{Nq}$ – векторы, содержащие все компоненты векторов входных воздействий, состояний и выходов указанной системы; $A\in R^{cN\times Nm}$, $B\in R^{cN\times Nn}$, $C\in R^{cN\times Nq}$ – блочные матрицы коэффициентов, составленные из матриц параметров $\Xi$, $\Omega$, $\Gamma$ соответственно.

После этого необходимо:

- вырезать элементы столбцов матрицы коэффициентов уравнения (2.47), соответствующие известным компонентам векторов входов, состояний и выходов;
- перенести в правую часть (2.47) элементы вырезаемых столбцов, умноженные на значения соответствующих заданных компонентов входов, состояний и выходов.

Далее, решение системы (2.47) может быть найдено с использованием псевдообращения.

### 2.3.4. Алгоритмы управления билинейными окрестностными системами

Рассмотрим две различные постановки задачи смешанного управления для билинейных окрестностных систем (см. п. 1.3.1).

В первой постановке предполагаем, что в системе (1.120) во всех узлах $a \in A$ заданы либо векторы входных воздействий, либо векторы состояний. Количество узлов с заданными входами $v[a_i], i = \overline{1, r}$ равно r. Количество узлов с заданными состояниями $x[a_i], i = \overline{1, f}$ равно f. Имеем, $r + f = N$ – количество всех узлов. Необходимо определить f неизвестных векторов входа $v[a_i], i = \overline{1, f}$ и r векторов состояния $x[a_i], i = \overline{1, r}$.

Во второй постановке предполагается, что в узлах системы заданы часть координат входа $v[k_i, k_{ij}^+]$ и часть координат состояния $x[r_i, r_{ij}^+]$. Здесь $k_{ij}^+$ – j-я известная координата входа в узле i, а $r_{ij}^+$ – j-я известная координата состояния в узле i.

$K \subset A, K = \{k_1, ..., k_l\}, \ |k| = l, R \subset A, R = \{r_1, ..., r_f\}, \ |L| = f$ – множества, содержащие номера узлов системы, в которых заданы часть компонентов входа и состояния системы соответственно; $K_i^+ = \left\{k_{i,1}^+, ..., k_{i,l_i}^+\right\}, \ i = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, r_i}, \ r_i \le m, \ R_i^+ = \left\{r_{i,1}^+, ..., r_{i,f_i}^+\right\}, \ i = \overline{1, f}; \ j = \overline{1, f_i}, \ f_i \le n$ – множества, содержащие номера известных компонентов входа и состояния в вершинах $k_i, r_i$.

При второй постановке требуется определить неизвестные компоненты входа в узлах из множества K $v[k_i, k_{ij}^-], i = \overline{1, l}, \ j = \overline{1, m - l_i}$, неизвестные компоненты состояния в узлах из множества R $x[r_i, r_{ij}^-], \ i = \overline{1, f}, \ j = \overline{1, n - f_i}$, полностью неизвестные векторы входа и состояния в узлах $\overline{K}, \overline{R}$, дополняющих K, R до множества A.

В обоих алгоритмах следует при раскрытии произведений трехмерных матриц на векторы преобразований сформировать нелинейные скалярные системы, разделить известные и неизвестные члены в уравнениях, перенеся известные в правую, а неизвестные – в левую часть. В этой системе каждую сложную переменную степенного вида $x_i^{\alpha} \cdot u_j^{\beta}$, $\alpha = \overline{0,2}$, $\beta = \overline{0,2}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ – считаем линейной переменной

$$X_k = X_{\alpha,\beta} = x_i^{\alpha} \cdot u_j^{\beta}, \tag{2.48}$$

$k = \overline{1,p}$ – количество сложных переменных.

Система принимает вид

$$\Lambda X = B. \tag{2.49}$$

Далее, необходимо

- вырезать элементы столбцов матрицы коэффициентов уравнения (2.49), соответствующие известным компонентам векторов входов и состояний;
- перенести в правую часть (2.49) элементы вырезанных столбцов, умноженные на значения соответствующих заданных компонент входов и состояний.

Решение системы (2.49) ищется с помощью псевдообращения. Далее решаем нелинейную систему (2.48).

## 2.4. Синтез алгоритмов оптимального смешанного управления для симметричных систем

### 2.4.1. Оптимальное по состоянию и ограниченное по входу смешанное управление

Для симметричной модели (1.3) ставится следующая задача [34,91,92]. Заданы p компонент векторов входных воздействий $v_2$ и q компонент векторов состояний $x_2$.

Пусть

$$E = \begin{bmatrix} x_{11}^{*} - x_{11} \\ \vdots \\ x_{1q}^{*} - x_{1q} \end{bmatrix}, \tag{2.50}$$

где q – мерный вектор допустимой ошибки, т.е. отклонений оптимальных значений от значений, задаваемых экспертами $x_{1i}^{*}, i=1,\mathbf{K},q$.

Необходимо определить оставшиеся неизвестными $mN-p$ входов $v_1$ и $nN-q$ состояний $x_1$ симметричной системы так, чтобы критерий качества

$$J=\frac{1}{2}E^{T}E \ +\frac{1}{2}v_1^{T}v_1 \qquad (2.51)$$

достигал минимального значения.

Данный критерий минимизирует квадрат нормы отклонения состояний $x_1$ от экспертных оценок и налагает требование минимальности квадрата нормы неизвестного входа $v_1$.

Решим задачу аналитически. Пусть после компоновки известных и неизвестных компонент входов и состояний в векторы–столбцы уравнение симметричной системы имеет вид

$$A_1x_1+A_2x_2=B_1v_1+B_2v_2. \qquad (2.52)$$

Блочные матрицы $A_1, A_2, B_1, B_2$ скомпонованы из элементов матриц–параметров $\Xi, \Omega$ и имеют соответствующую размерность.

Из выражения (2.52) получаем линейное матричное уравнение относительно $x_1$

$$A_1x_1=B_1v_1+B_2v_2-A_2x_2. \qquad (2.53)$$

Критерий совместности системы (2.53) примет вид

$$A_1A_1^{+}(B_1v_1+B_2v_2-A_2x_2)=B_1v_1+B_2v_2-A_2x_2, \qquad (2.54)$$

а ее нормальное решение (или псевдорешение) есть

$$x_1=A_1^{+}(B_1v_1+B_2v_2-A_2x_2). \qquad (2.55)$$

Тогда вектор допустимой ошибки можно представить в следующем виде:

$$E=x_1^{*}-x_1=x_1^{*}-A_1^{+}(B_1v_1+B_2v_2-A_2x_2).$$

Необходимое условие экстремума критерия J следующее:

$$\frac{\partial J}{\partial v_1}=0. \qquad (2.56)$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial J}{\partial v_1}=\frac{1}{2}2E^{T}\left(-A_1^{+}B_1\right)+\frac{1}{2}2v_1^{T}=-E^{T}A_1^{+}B_1+v_1^{T}.$$

С учетом (2.56)

$$v_1=(E^{T}A_1^{+}B_1)^{T}. \qquad (2.57)$$

Затем, после нахождения неизвестных компонент входных воздействий $v_1$, с помощью (2.55) можно определить неизвестные компоненты состояний $x_1$.

Контроль решения может быть выполнен путем подстановки всех компонент входов и состояний в уравнения симметричной системы, расписанные для всех ее узлов. В случае выполнения (2.54) получаем тождество. В противном случае имеет место невязка левой и правой частей уравнения.

### 2.4.2. Оптимальное по состоянию и входу смешанное управление

Критерий (2.51), как уже замечено, налагает требование [34] минимальности нормы неизвестного вектора входа $v_1$. Это полезно, когда вектор $v_1$ содержит преимущественно компоненты управлений. В этом случае подобное требование может быть интерпретировано как требование ограниченности управляющих воздействий. Однако, если $v_1$ в основном содержит компоненты возмущений, то требование минимальности его нормы уже не обоснованно. В этом случае более предпочтительна другая форма критерия, минимизирующая квадрат нормы отклонения $v_1$ от вектора, содержащего экспертные оценки оптимальных значений входов $v_1^*$

$$J = \frac{1}{2}E^T E + \frac{1}{2}\left(v_1^* - v_1\right)^T \left(v_1^* - v_1\right). \tag{2.58}$$

В этом случае необходимое условие экстремума критерия J имеет вид

$$\frac{\partial J}{\partial v_1} = \frac{1}{2}2E^T\left(-A_1^+ B_1\right) + \frac{1}{2}2\left(v_1^* - v_1\right)^T(-1) = -E^T A_1^+ B_1 - \left(v_1^* - v_1\right)^T = 0.$$

Откуда

$$\left(v_1^* - v_1\right)^T = -E^T A_1^+ B_1,$$

$$v_1^* - v_1 = -B_1^T (A_1^+)^T E,$$

$$v_1 = v_1^* + B_1^T (A_1^+)^T E. \tag{2.59}$$

После получения неизвестного вектора входа $v_1$ остальные шаги такие же, как и в предыдущем случае.

***Пример применения алгоритма смешанного оптимального управления***

Работу метода проиллюстрируем на простом примере [34]. Задана симметричная система, которая состоит из двух узлов; имеет одномерный вход и двумерное состояние. С учетом окрестностей модель имеет вид

$$\sum_{i=1}^{2} \Xi[a, a_i]\, v[a_i] = \sum_{i=1}^{2} \Omega[a, a_i]\, x[a_i].$$

Заданы вход и состояние во втором узле и вектор ошибки

$v_2 = 2, x_2 = [1 \quad -1]^T, \quad E = [0.08 \quad 0.08]^T.$

Найдем вход и состояние в первом узле так, чтобы достигался минимум значений критерия (2.51). Пусть после приведения к виду (2.52) модель имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} x_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} v_1 + \begin{bmatrix} 17 \\ 1 \end{bmatrix} v_2 .$$

Отсюда матрицы коэффициентов

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}, \; B_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \; B_2 = \begin{bmatrix} 17 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Найдем псевдообратную к $A_1$ по алгоритму Фаддеева:

$$A_1^+ = \begin{bmatrix} 0.5385 & -0.1589 \\ 0.2308 & 0.0769 \end{bmatrix}.$$

Тогда $v_1 = \left(E^T A_1^+ B_1\right)^T = 0.197$. Соответствующий вектор $x_1$ согласно (2.55), принимает значение $x_1 = \begin{bmatrix} 19.38 \\ 9.07 \end{bmatrix}$. Проверка решения может быть осуществлена подстановкой найденных значений в уравнения модели, расписанные для обоих узлов. При этом слева получаем вектор $[34.594 \quad 1.61]^T$, а справа вектор $[34.591 \quad 1.606]^T$. Очевидно, что найденное решение удовлетворяет уравнениям узлов системы.

## 2.5. Примеры применения моделей и методов

### 2.5.1. Пример модели сложного промышленного объекта

***Описание листопрокатного производства как объекта управления***

С точки зрения системного подхода листопрокатное производство (ЛПП) представляет собой сложную дискретную систему с множеством внутренних связей между подсистемами–узлами [34,35]. Для оценивания существенных показателей, определяемых лишь для цеха в целом, введем фиктивную подсистему “ЛПП в целом”, связанную со всеми другими подсистемами ЛПП. Для учета взаимного влияния подсистем друг на друга, примем во внимание связи между всеми агрегатами каждого из отделений ЛПП: травильного, прокатного, термического и листоотделочного.

Граф ЛПП в этом случае примет вид, изображенный на рис. 2.1.

Рис 2.1 помещен в конце файла

Номера узлов модели ЛПП соответствуют следующим агрегатам:

1 – агрегат непрерывного отжига АНО № 1;
2 – агрегат непрерывного отжига АНО № 2;
3 – пятиклетьевой стан 2030;
4 – агрегат непрерывного отжига АНО;
5 – агрегат горячего цинкования АГЦ;
6 – агрегат полимеризации поверхности АПП;
7 – колпаковые печи КП;
8 – дрессировочный стан ДС № 1;
9 – дрессировочный стан ДС № 2;
10-19 – агрегаты резки АР № 1-10;
20 – цех в целом.

При анализе работы цеха были выбраны следующие существенные факторы работы цеха, приведенные в табл. 2.1. Курсивом в ней выделены показатели из основного документа – технического отчета о работе ЛПП за месяц, которые непосредственно не отнесены к сигналам модели, но на основании которых рассчитываются требуемые показатели.

Так как некоторые показатели характеризуют специальный узел – “ЛПП в целом”, то у остальных узлов соответствующие компоненты сигналов принимались равными нулю, что эквивалентно их отсутствию.

Таблица 2.1

Существенные факторы работы цеха

| Компоненты входа и состояния | Наименование показателя |
|---|---|
| | **Объем производства, тыс. т**: |
| x[1] | Произведено годного, тыс. т |
| | *План, тыс. т* |
| x[2] | Отклонение от плана, % |
| x[3] | Среднечасовая производительность, т/час |
| | **Простои, час**: |
| | Технологические: |
| x[4] | Суммарные |
| x[5] | По вине технологов цеха |
| x[6] | По вине предшествующих переделов |
| x[7] | По смежным отделениям |
| | По службам: |
| x[8] | По мех. оборудованию |
| x[9] | По энергооборудованию |
| x[10] | По электрооборудованию |
| x[11 | По вине АСУ |
| | **Брак, т**: |
| x[12] | По вине предшествующих переделов |
| x[13] | Внутрицеховой |
| | **Качество**: |
| | *Объем ОСВ I группы, тыс. т* |
| | *Объем III группы, тыс. т* |
| x[14] | Доля ОСВ I группы, % |
| x[15] | Доля III группы, % |
| | **Движение металла**: |
| | *Задано в производство, тыс. т* |
| | *Получено годного, тыс. т* |
| x[16] | Расход металла, % |
| | **Движение валков**: |
| | Рабочие, кг/т |
| | *Норма* |
| | *Факт* |
| | Опорные, кг/т |
| | *Норма* |
| | *Факт* |
| x[17] | Отклонение расхода от нормативного, % |
| | **Расход электроэнергии, ГВт·ч**: |
| | *Расход по отделениям* |
| v[1] | Фактический расход |
| | **Вспомогательные материалы:** |
| | *Расход по отделениям, т* |
| v[2] | Фактический расход, т |

### *Идентификация модели и смешанное управление ЛПП*

Используя методику, рассмотренную в главе 2, проведем параметрическую идентификацию листопрокатного производства [34]. Часть результатов идентификации приведена ниже.

$$\Xi[1,1] = [0.00033709 \quad 0.01126973], \quad \Xi[1,1] = [0.00032997 \quad 0.01102753],$$

$$\Xi[1,1] = [0.00108908 \quad 0.00906138], \quad \Xi[1,1] = [0.00390850 \quad 0.00000000],$$

$$\vdots$$

$$\Omega[1,1] = [-0.01308985 \quad -0.01759389 \quad \ldots \quad -0.00053428 \quad 0.01424745],$$

$$\Omega[1,2] = [-0.01281686 \quad 0.00039138 \quad \ldots \quad -0.00053428 \quad 0.01424745].$$

Используя методику, рассмотренную в главе 2, решим задачу смешанного управления для листопрокатного производства. В качестве исходных данных берется объем производства и расход электроэнергии в цехе. Часть результатов приведена ниже (с округлением до тысячных).

$$v[1,1] = 2.366, \; v[1,2] = 79.100, \; v[2,1] = 2.316,$$

$$v[2,2] = 77.400, \; v[3,1] = 7.644;$$

$$\vdots$$

$$x[1,1] = 91.875, \; x[1,2] = -11.232, \; x[1,3] = 123.488,$$

$$x[1,4] = 92.100, \; x[1,5] = 79.500;$$

$$\vdots$$

$$x[20,2] = 0.872, \; x[20,3] = 252.179, \; x[20,4] = 180.400,$$

$$x[20,5] = 168.460, \; x[20,6] = 3.520, \; x[20,7] = 4.930,$$

$$x[20,8] = 297.400, \; x[20,9] = 4.200, \; x[20,10] = 78.600,$$

$$\vdots$$

$$x[20,14] = 5.260, \; x[20,15] = 0.0120$$

$$\vdots$$

$$x[20,14] = 5.260, x[20,15] = 0.0120, \; x[20,16] = 17.680,$$

$$x[20,17] = 18.720.$$

Ценность построенной модели заключается в том, что она позволяет прогнозировать такие стохастические показатели, как простои оборудования. Одновременно она может дать ответ на вопрос “Что будет с производством, если …”, используя подход смешанного управления и задавая в качестве исходных данных необходимые условия. Ни детерминированный, ни стохастический (например, регрессионная модель) не обеспечивали подобной гибкости модели.

### *Разработка оптимальных режимов работы цеха*

Для расчета оптимальных показателей необходимо сформировать критерий оптимальности, для чего, в свою очередь, требуется выделить набор показателей, сильнее других влияющих на результаты работы ЛПП [34]. На основании мнения экспертов были выделены следующие показатели, вошедшие в критерий качества (табл. 2.2, где показатели приведены в порядке убывания важности).

Критерий качества было решено выбрать квадратичным

$$J = \sum_{i=1}^{9}\left(\tilde{x}_i - \tilde{x}_i^*\right)^2 + \sum_{i=1}^{9}\left(\tilde{v}_i - \tilde{v}_i^*\right)^2, \tag{2.60}$$

где $\tilde{x}_i, i = \overline{1,9}$ – выбранные показатели из набора, перечисленного в табл. 2.2; $\tilde{x}_i^*, i = \overline{1,9}$ – экстремальные значения соответствующих показателей.

Таблица 2.2

Показатели, вошедшие в критерий качества

| Компоненты входа и состояния | Наименование показателя | Требование к оптимуму |
|---|---|---|
| x(1) | Произведено годного, тыс. т | max |
| x(14) | Доля ОСВ I группы, % | max |
| v(1) | Расход электроэнергии, ГВт·ч | min |
| x(16) | Расход металла, % | min |
| x(15) | Доля III группы, % | min |
| x(13) | Внутрицеховой брак, т | min |
| x(3) | Среднечас. производительность, т/ч | max |
| x(5) | Простои по вине технологов цеха, час | min |
| x(8) | Простои по мехоборудованию, час | min |

Последние выбирались на основании мнения экспертов, считающих возможным взять в качестве таковых наилучшее реально достигнутое значение в ЛПП за некоторый период времени (квартал, год).

На основе алгоритмов оптимального смешанного управления, представленных в данной главе, получим оптимальные в смысле введенного критерия значения технико-экономических показателей цеха. Для сравнения результатов в табл. 2.3 приведем лучшие достигнутые значения показателей за 1991 год.

Таблица 2.3

Оптимальные значения выбранных параметров за 1991 год

| Компоненты входа и состояния | Оптимальные значения |
|---|---|
| x(1) | 187.621 |
| x(14) | 7.389 |
| v(1) | 26.466 |
| x(16) | 17.676 |
| x(15) | 0.000 |
| x(13) | 437.300 |
| x(3) | 255.907 |
| x(5) | 118.931 |
| x(8) | 297.400 |

Варьируя последовательно первый; первый и второй; первый, второй и третий факторы, получили результаты, приведенные в табл. 2.4.

Полученные результаты согласуются с реальными данными. Они иллюстрируют наилучшие достижимые значения показателей ЛПП в смысле критерия (2.60).

Таблица 2.4

Результаты оптимизации

| Компоненты входа и состояния | 1 показатель | 2 показателя | 3 показателя |
|---|---|---|---|
| | Оптимальные значения критерия | | |
| | 1167.44 | 1164.90 | 1164.22 |
| | Значения показателей, соответствующие оптимальному значению критерия | | |
| x(1) | 183.73900 | 183.7300 | 184.38600 |
| x(14) | 5.15118 | 7.3890 | 7.38900 |
| v(1) | 26.86550 | 26.8640 | 26.58750 |
| x(16) | 17.31420 | 17.3130 | 17.37540 |
| x(15) | 0.0117604 | 0.0117 | 0.011802 |
| x(13) | 428.54700 | 428.5300 | 430.06100 |
| x(3) | 246.96200 | 246.9500 | 247.83500 |
| x(5) | 164.97500 | 164.9700 | 165.55800 |
| x(8) | 291.24700 | 291.2300 | 292.27700 |

### 2.5.2. Симметричные и билинейные модели цеха очистки сточных вод

***Модели цеха очистки сточных вод***

Современные очистные сооружения, предназначенные для очистки городских сточных вод, состоящих из хозяйственно-бытовых и промышленных стоков, являются сложными, многостадийными, распределёнными системами [99]. В свете возрастающих экологических требований актуальными для данных систем являются задачи определения параметров тех узлов, для которых измерение является дорогим и затруднительным, определение параметров входного и промежуточных участков по заданным инструкцией параметрам выхода из системы (норма на сброс в реку), определение параметров промежуточных участков по заданным экспертами (инструкцией) значениям параметров на входе и выходе из системы.

Сооружения системы включают в себя подсистемы механической, биологической очистки, обеззараживания и обработки осадка. Механическая очистка представлена решётками, песколовками, усреднителями, первичными отстойниками; биологическая – аэротенками, вторичными отстойниками; обеззараживание – контактными резервуарами; обработка осадков – илоуплотнителями, иловыми площадками, цехом механического обезвоживания.

В наиболее простом варианте, допускающем измерение параметров, систему рассматривают [99] как совокупность четырёх узлов, именуемых «вход на очистные сооружения», «после усреднения», «после механической очистки», «сброс в реку». Из 35 измеряемых параметров 2 (прозрачность и взвешенные вещества) условно приняты за вход в систему, остальные 33 – за состояние. При этом для параметра запах введена количественная характеристика (фекалии – 1, илистое – 0).

Для решения указанных выше задач наиболее приспособленными являются окрестностные модели и метод смешанного управления [34,99].

В свете сказанного решение задачи смешанного управления позволяет определить неизвестные компоненты входов v и состояний x по известной их части v* и x*.

Было проведено несколько вариантов расчётов, с идентификацией модели и смешанным управлением в каждом из них. Результаты расчётов показали, что полезным является введение пятого опорного узла «цеха в целом», т.е. узла, компонентами которого являются средние значения 4 названных узлов системы. При этом при определении текущих параметров 2-го и 3-го узлов («после усреднения» и после «механической очистки») по параметрам входа и выхода из системы (данные инструкции) по результатам моделирования с учётом данных предыдущего года погрешность составила 4%, а по данным текущего года – менее 1%. Аналогичные результаты получены при решении других поставленных выше задач. Была проведена смешанная идентификация системы по заданным первому и четвёртому узлам в предположении о 10% и 30-40% снижении значений во втором и третьем узлах соответственно по отношению к входу.

Результаты расчётов показывают адекватность окрестностных моделей и применимость смешанного управления для моделирования системы очистки сточных вод.

### *Модели биологической очистки сточных вод с учётом энергозатрат*

Существенную роль в современных очистных сооружениях, предназначенных для очистки городских сточных вод, играет биологическая очистка [98]. Сооружения биологической очистки предназначены для снятия органических загрязнений. Биологическая очистка представлена следующими сооружениями: аэротенками, вторичными отстойниками, контактными резервуарами. Аэротенки предназначены для очистки сточных вод от органических загрязнений, находящихся в сточных водах в растворённом и нерастворённом виде. Технический регламент работы аэротенков обусловлен поддержанием нескольких характеристик, обеспечивающих нормально идущий процесс биологической очистки. Такими характеристиками являются: гидравлическая нагрузка, регулируемая шиберами; процент регенерации активного ила, регулируемый количеством коридоров; доза ила в аэротенке и регенераторе, регулируемая количеством циркуляционного оборудования; количество растворённого кислорода, регулируемого количеством работающих воздуходувок; интенсивность аэрации, регулируемая работой системы аэрации. В аэротенках микробиальная масса находится во взвешенном состоянии в виде отдельных хлопьев, представляющих собой зооглейные скопления микроорганизмов, простейших и более организованных представителей фауны. Этот биоценоз организмов, развивающихся в аэробных условиях на органических загрязнениях, содержащихся в сточной воде, называется активным илом. Органические кислоты, спирты, белки, углеводы используются бактериями для получения углерода, азота, фосфора и т.д., вследствие чего происходит прирост массы бактерий.

Интенсивность биохимических процессов зависит от ряда факторов: температуры, обеспечения кислородом, перемешивания (интенсивность аэрации), состава биоценоза, наличия питательных веществ. Часть ила после отстаивания возвращается в аэротенки (циркуляционный ил), часть удаляется в илоуплотнители. Бактерии имеют высокую скорость воспроизводства. На этой способности к быстрому размножению и высокой скорости потребления питательных веществ основано использование биологических методов очистки сточных вод.

Для изучения работы аэротенков была построена [98] симметричная модель с двумя узлами. Симметричная модель (1.3)

$$\sum_{\alpha \in O_x[a]} \Xi[a,\alpha]\, x[\alpha] = \sum_{\beta \in O_v[a]} \Omega[a,\beta]\, v[\beta]$$

при сделанных предположениях имеет вид

$$\begin{cases} \Omega[1,1]x[1] + \Omega[1,2]x[2] = \Xi[1,1]v[1] \\ \Omega[2,1]x[1] + \Omega[2,2]x[2] = \Xi[2,2]v[2], \end{cases} \tag{2.61}$$

где $v[a] \in R^3$, $x[a] \in R^3$ – вход и состояние в узле a систем, $\Xi[a,\alpha] \in R^{1\times 3}$, $\Omega[a,\beta] \in R^{1\times 3}$ – матрицы-параметры, $O_x[a], O_v[a]$ – окрестности узла a по состоянию и входному воздействию соответственно. В нашем случае $O_v[1] = \{1\}$, $O_v[2] = \{2\}$, $O_x[1] = \{1,2\}$, $O_x[2] = \{1,2\}$.

В качестве компонент состояния взяты растворённый кислород, азот аммонийный и азот нитритов. В качестве входов затраты электроэнергии. Очистка сточных вод от азота аммонийного и азота нитритов напрямую зависит от количества электроэнергии, затраченной на увеличение интенсивности аэрации, увеличения процесса рециркуляции, т.е. на работу воздуходувок, циркуляционных насосов, шнеков. Для решения задачи смешанного управления в качестве состояний выходного узла взяты данные ПДС (норма) и рассчитаны затраты электроэнергии в кВт. Результаты расчётов показывают незначительное изменение затрат электроэнергии по сравнению с использованными при идентификации.

***Исследование влияния сточных вод на эвтрофирование водоёмов***

Исследования влияния сточных вод на эвтрофирование водоёмов в связи с увеличением концентрации биогенных элементов являются важными и актуальными. К биогенным элементам [97] относятся вещества, входящие в состав организмов и имеющие определённое биологическое значение, в том числе азот, фосфор, кремний, железо и многие другие. Попадая в водоёмы в определённых концентрациях и сочетаниях друг с другом они способствуют развитию условий, угнетающих отдельные виды гидробионтов.

Одним из главнейших биогенных элементов являются азот и фосфор. Поступление большого количества азота и фосфора в водные объекты приводит к их эвтрофированию. В результате эвтрофирования в водоёмах происходит накопление питательных веществ, что ведёт к нарушению процессов саморегуляции в биоценозах, вызывая «цветение» воды. Биомасса фитопланктона во время «цветения» возрастает до 2,5-10,0 г/см$^3$ против нормы 0,1-0,4 г/см$^3$ в олиготрофных водоёмах.

Факторы дополнительно стимулирующие развитие «цветения»: повышение минерализации, температуры, содержания железа, кремния, общего содержания растворённых органических примесей, уменьшение растворённого кислорода.

Таким образом, азот и фосфор, накапливаясь в водоёме, вызывают его цветение. Всё перечисленное обусловливает повышенные требования к обеспечению норм содержания биогенных элементов в сточных водах и жёсткие нормативы, установленные на содержание биогенных элементов в сточных водах, сбрасываемых в водные объекты, что по данным других стран должно составлять 1,5-5,0 мг/дм$^3$.

В целях исследования влияния сточных вод на экологию окружающей среды, в частности, на эвтрофирование водоёмов, была построена окрестностная модель цеха очистки сточных вод.

Расчёты показали, что задание биогенных элементов азота аммонийного, азота натритов, азота нитратов, фосфора фосфатов в 1 и 4-м узлах в соответствии с требованиями инструкции на вход и выход системы позволяет получить такое распределение этих элементов во втором и третьем узлах, которое обеспечивает на выходе из системы очистки сточных вод их минимальную концентрацию с наименьшими последствиями для эвтрофи-рования водоёмов.

### 2.5.3. Окрестностные модели транспортных систем

Рассмотрим возможность использования разработанных окрестностных моделей [68] для повышения эффективности функционирования системы «Автомобиль–транспортный поток–окружающая среда». Эта система характеризуется наличием сложных, в общем случае нелинейных, связей между элементами транспортного потока, между различными потоками и всеми этими элементами системы с окружающей средой. Указанная система представляет собой совокупность взаимодействующих элементов, связанных общей целью функционирования – повышением безопасности дорожного движения при уменьшении затрат на управление транспортным потоком и улучшении экологической обстановки придорожной территории. В качестве некоторых параметров входа элемента системы «Автомобиль» можно назвать скорость движения автомобиля ($V_a$, км/ч), эффективную мощность двигателя ($N_e$, кВт), в качестве параметров состояния – масса вредных выбросов с отработавшими газами двигателя (диоксид углерода – $CO_2$, оксид углерода – CO, оксиды азота – $NO_x$, углеводороды – $C_xH_y$).

Как было установлено Государственной инспекцией по надзору за загрязнением воздушной среды (Норвегия, 1993) и Государственным природоохранным управлением (Швеция, 1987), величина ущерба окружающей среде зависит от скорости автомобиля и равномерности езды и возникает при всех мероприятиях по организации дорожного движения, которые влияют на интенсивность движения, состав транспортного потока, уровень скорости и равномерность езды. Взаимосвязь между скоростью движения и относительным количеством выбросов различных типов выхлопа показана в табл. 2.5.

Таблица 2.5

Взаимосвязь между скоростью движения и относительным количеством выбросов вредных веществ

| Вредные вещества выхлопа | Скорость движения, км/ч | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 20 | 40 | 60 | 70 | 80 | 100 |
| $CO_2$ | 3,75 | 1,75 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 1,15 |
| CO | 7,00 | 2,10 | 1,20 | 1,00 | 1,50 | 1,75 | 3,00 |
| $NO_x$ | 0 | 0,45 | 0,75 | 1,00 | 1,25 | 1,50 | 1,75 |
| $C_x H_y$ | 3,25 | 2,00 | 1,15 | 1,00 | 1,00 | 1,05 | 1,50 |

Таблица является представительной для легкового автомобиля. Выбросы при скорости (примерно 60 км/ч), обеспечивающей наименьший выброс, обозначены равными 1,00, а выбросы при других значениях скорости рассчитаны относительно этого уровня.

В качестве некоторых параметров входа элемента системы «Транспортный поток» можно назвать интенсивность движения транспортных средств ($N_a$, ед/ч) и плотность транспортного потока (q, ед/км), а в качестве параметров состояния – относительное количество выбросов различных типов выхлопа двигателя (диоксида углерода – $CO_2$, оксида углерода – CO, оксидов азота – $NO_x$, углеводородов – $C_xH_y$). Для потока легковых автомобилей зависимость выходных характеристик от состояния в общем случае нелинейная. В целях упрощения модели считаем, что данные для транспортного потока, состоящего из легковых автомобилей, движущихся в одном направлении, получены линейным преобразованием характеристик системы «Автомобиль».

В современном аспекте развития автомобильного транспорта вопросы экологии занимают все более значительное место. Представляется полезной следующая постановка задачи: по заданным экспертом или инструкцией значениям параметров, отвечающих требованиям экологической безопасности эксплуатации автотранспортных средств, определить соответствующие значения других параметров системы [68].

Наиболее приспособленным, по нашему мнению, для решения данной задачи является применение симметричных моделей и методов смешанной идентификации и управления. Термин «смешанная идентификация» связан с тем, что часть элементов матриц–параметров задается экспертами. Термин «смешанное управление» связан с тем, что задана часть координат как входных воздействий, так и состояний, требуется же определить оставшиеся неизвестные координаты входа и состояния. Пусть в системе «Автомобиль–транспортный поток–окружающая среда» v – вход, управление, x – состояние узлов. Окрестности узлов системы по входу и состоянию имеют вид: $O_v[1]=\{1\}; O_v[2]=\{2\}; O_v[3]=\{3\};$

$O_x[1]=\{1,2,3\}; O_x[2]=\{1,2,3\}; O_x[3]=\{1,2,3\}$.

Узел 1 представляет собой при детальном описании совокупность отдельных систем типа «Автомобиль», узел 2 – совокупность систем типа «Транспортный поток». В симметричной системе уравнения узлов имеют следующий вид (обозначения узлов заменены их номерами)

$$\begin{cases} \Omega[1,1]x[1]+\Omega[1,2]x[2]+\Omega[1,3]x[3]=\Xi[1,1]v[1], \\ \Omega[2,1]x[1]+\Omega[2,2]x[2]+\Omega[2,3]x[3]=\Xi[2,2]v[2], \\ \Omega[3,1]x[1]+\Omega[3,2]x[2]+\Omega[3,3]x[3]=\Xi[3,3]v[3]. \end{cases} \tag{2.62}$$

По данным табл. 2.5 проведена параметрическая идентификация системы (2.62).

Разработка подходов для эффективного управления требует задания критерия оптимальности. Подходящим является использование одного из самых распространенных – квадратичного. Формирование симметричной модели приводит к тому, что в критерии должны равноправно присутствовать как состояния, так и входные воздействия:

$$J=\sum_{i=1}^{N_x}(x_i-x_i^*)^2+\sum_{i=1}^{N_v}(v_i-v_i^*)^2, \tag{2.63}$$

где $x_i, i=\overline{1,N_x}$ – выбранные показатели из числа компонент состояний узлов системы; $x_i^*, i=\overline{1,N_x}$ – экстремальные значения соответствующих показателей, задаваемые экспертами или инструкцией; $v_i, i=\overline{1,N_v}$; $v_i^*, i=\overline{1,N_v}$ – то же для компонент входа.

В последнее время все большее внимание уделяется исследованию влияния автомобильного транспорта на качество окружающей среды. Это влияние в значительной мере определяется скоростью движения транспортных средств, так как высокая скорость и частая перемена скорости движения увеличивает расход топлива, выбросы отработанных газов автомобильного двигателя и уровень транспортного шума. Одним из средств решения данной проблемы служит установление предела скорости передвижения, что является идеальным средством достижения компромисса между оптимальной пропускной способностью для транспортных средств, безопасностью дорожного движения и охраной окружающей среды для всех, кто, так или иначе, связан с дорогой.

В работе [68] исследовано влияние ограничения скорости движения автотранспортных средств на массу выбросов токсичных компонентов отработавших газов автомобильных двигателей, расход топлива автомобилей и уровень транспортного шума. Для нахождения сочетания параметров, обеспечивающих минимальный эколого-экономический ущерб от автотранспорта по среднеквадратичному критерию оптимальности, применена симметричная модель и метод смешанного управления. При этом в критерий включаются параметры, от которых зависит экологическая безопасность транспортного средства: содержание свинца, оксидов азота и углерода, сажи и других вредных веществ в выбросах отработавших газов двигателей, а также уровень шума от одиночного автомобиля или транспортного потока.

# 3. НЕЧЕТКО-ОКРЕСТНОСТНЫЕ СИСТЕМЫ

## 3.1. Основания теории нечетких систем: от натуральных к нечетким числам

Материал, представленный в данном разделе, позволяет проследить «развитие понятия о числе» от натуральных чисел до использующихся в современных задачах искусственного интеллекта нечетких чисел и подготовить введение подхода к учету нечеткости окрестностей по состоянию дискретно-временных систем.

### 3.1.1. Пустое множество

В настоящее время уже общепризнанно, что понятие множества принадлежит к числу первоначальных математических понятий, а теория множеств является основой современной фундаментальной и прикладной математики. При изучении теории множеств на всех уровнях естественнонаучного, технического, гуманитарного образования основное внимание уделяется оперированию с множествами – алгебре множеств. При решении той или иной задачи предполагается заданным универсальное для нее множество U, а операции выполняются над его частями или подмножествами A, включая несобственные – само множество U и пустое множество $\varnothing$, то есть над элементами его булеана B(U) – множества всех его подмножеств. С методической точки зрения представляется целесообразным уже на первых этапах изучения теории множеств подробно рассмотреть эти понятия, имеющие как указанное выше теоретическое, так и прикладное значение, в частности, являющиеся отправными для развития теории и практики нечетких множеств, широко применяющихся при решении многих современных проблем искусственного интеллекта.

***Пустое множество как одно из базовых понятий теории множеств***

Следует отметить, что в книге первой «Теория множеств» первой части «Основные структуры анализа» трактата Н. Бурбаки «Начала математики» [54], в главе 2 «Теория множеств», понятие подмножества вводится в разделе 2 «Включение» (с. 76), а понятие пустого множества – в разделе 7 «Дополнение множества. Пустое множество» (с. 80–81) из § 1 «Коллективизирующие соотношения»; понятие множества всех подмножеств – в разделе 1 «Аксиома множества частей» (с. 112–113) из § 5 «Произведение семейства множеств»; понятие натурального числа – в разделе 1 «Определение целых чисел» (с. 197–198) из § 4 «Натуральные целые числа. Конечные множества» главы 3 «Упорядоченные множества. Кардинальные числа. Натуральные числа».

Придерживаясь, наряду с формальным подходом, принятым в [54,67], более распространенной «наивной» точки зрения, пустое множество можно описать как «множество, не содержащее ни одного элемента»; см., например, [67] где, в отличие от [54], используется и термин «булеан». Принято считать, что пустое множество в известном смысле является простейшим из множеств; что существует только одно пустое множество, то есть что все пустые множества равны между собой; что пустое множество является подмножеством любого множества, а потому и входит в любой булеан; что любое подмножество пустого множества является пустым множеством. Последнее соглашение позволяет определить булеан пустого множества как $B(\varnothing)=\{\varnothing\}\neq\varnothing$, то есть как множество, единственным элементом которого является само пустое множество. При этом, в силу приведенных соглашений, выполняется как соотношение $\varnothing\in\{\varnothing\}=B(\varnothing)$, так и соотношение $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}=B(\varnothing)$; следует отметить, что для других множеств подобные соотношения отличаются: так, для $A\subseteq U$ справедливо $A\subseteq A\in\{A\}$, но $A\not\subset\{A\}\neq A$; в частности, для $a\in A$ справедливо $a\in\{a\}$, но $a\not\subset\{a\}\neq a$. В силу соотношений, указанных для булеана пустого множества, его булеан, или второй булеан пустого множества, определяется как $B(B(\varnothing))=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, а его булеан, или третий булеан пустого множества – как $B(B(B(\varnothing)))=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$ (по поводу продолжения этого процесса см. ниже).

Пустое множество, при всей его простоте, играет базовую роль во многих вопросах математики и ее приложений. Это подтверждается, в частности, последующим изложением. Здесь приведем лишь простейшие примеры.

Одним из основных понятий универсальной алгебры [67] является $A_\Omega$-алгебра, где A – некоторое множество, $\Omega$ – область операторов, то есть множество операторов $\omega\in\Omega$ вместе с отображением $a:\Omega\to N$, где $a(\omega)$ называется арностью оператора $\omega$, если $a(\omega)=n$, то $\omega$ называется n-арным, так что $\Omega(n)=\{\omega\in\Omega:a(\omega)=n\}$; структурой $A_\Omega$-алгебры называется семейство отображений $\Omega(n)\to A\wedge(A\wedge n), n\in N$ (обозначение степени символом $\wedge$ принято здесь для удобства изложения). В смысле этого понятия само множество можно считать $\varnothing$-алгеброй [67].

Другое основное понятие универсальной алгебры [67] – оператор замыкания на множестве A как отображение C булеана B(A) в себя, обладающее свойствами: для всех $X,Y\in B(A)$ $\{X\subseteq Y\Rightarrow C(X)\subseteq C(Y)\}$, $\{X\subseteq C(X)\}$, $\{C(C(X))=C(X)\}$. Одна из самых неожиданных конкретизаций оператора замыкания, носящая чисто логический характер, была дана в виде операции присоединения следствий и применятся в формальных теориях. А именно, теория определяется как произвольное множество X предложений некоторого языка L. Если X замкнуто относительно операции присоединения следствий, то есть $X = C(X)$, то X называется теорией C. C(X) есть наименьшая теория C, содержащая X. В смысле этих понятий $C(\varnothing)$ есть система всех логически доказуемых или общезначимых предложений теории C.

### 3.1.2. Натуральные числа

Пустое множество лежит и в основе формального определения натуральных чисел [54], множество которых $N = \{0,1,2,\mathbf{K}\}$, в отличие от укоренившегося представления, включает число 0; с этого числа, собственно, и начинается определение натурального числа. Действительно, говорят, что множества A и B равномощны или эквивалентны, если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие; это записывают в виде $|A| = |B|$, где $|A|$ – кардинальное число или мощность множества A. Кардинальное число 0 определяют [54] как $0 = |\varnothing|$; кардинальное число 1 – как $1 = |\{\varnothing\}|$, то есть как $1 = |B(\varnothing)|$; кардинальное число 2 – как $2 = |\{\varnothing, \{\varnothing\}\}|$, то есть как $2 = |B(B(\varnothing))|$; следующим на этом пути было бы определено кардинальное число $4 = |\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}|$, то есть $4 = |B(B(B(\varnothing)))|$. Другой путь состоит в том [54], что, введя операции – в частности, сложение – над кардинальными числами, говорят, что кардинальное число $|A|$ конечно или является натуральным целым числом, если $|A| \neq |A| + 1$; в этом случае говорят, что множество A конечно, а $|A|$ является числом его элементов. Так как $0 \neq 0+1=1$, $1 \neq 1+1=2$, $2 \neq 2+1$, то введенные ранее кардинальные числа $0,1,2$ являются натуральными числами. Далее определяют натуральные числа $3 = 2 + 1$, $4 = 3 + 1$ и, на этом пути, все множество N натуральных чисел или весь натуральный ряд. Равносильный путь состоит [67] в последовательном, рекуррентном индексировании множеств, начинающемся снова с пустого множества: $0 = \varnothing, 1 = \{0\}, 2 = \{0,1\}, 3 = \{0,1,2\}, \mathbf{K}$

#### *Кратные одноэлементные множества и кратные булеаны*

Как уже отмечалось, простейшим из подмножеств любого множества является пустое множество, которое теперь, после определения числа 0, можно охарактеризовать как 0-элементное. Следующими по простоте являются одноэлементные подмножества. По каждому элементу $u \in U$ может быть построена последовательность кратных одноэлементных множеств

$$u =< u;0 >\in \{u\} = \{< u;0 >\} =< u;1 >\in \{\{u\}\} = \{\{< u;0 >\}\} =$$

$$= \{< u;1 >\} =< u;2 >\in \{\{\{u\}\}\} = \{\{\{< u;0 >\}\}\} = \{\{< u;1 >\}\} =$$

$$= \{< u;2 >\} =< u;3 >\in \mathbf{K} \in \{< u;k-1 >\} =< u;k >\in \mathbf{K}\ ,$$

причем $|< u;k >| = 1$ для любого $k \in N \setminus \{0\}$, тогда как равенство $|< u;0 >| = |u|$, в данном контексте, не имеет смысла, так как не имеет смысла $|u|$. По каждому множеству $A \subseteq U$ также может быть построена последовательность кратных одноэлементных множеств

$$\{A\} =< A;1 >\in \{\{A\}\} = \{< A;1 >\} =< A;2 >\in \{\{\{A\}\}\} =$$

$$= \{\{< A;1 >\}\} = \{< A;2 >\} =< A;3 >\in \mathbf{K}\{< A;k-1 >\} =< A;k >\in \mathbf{K}$$

и для единства обозначений $A =< A;0 >\in < A;1 >$,

причем $|A| = |< A;0 >| \neq |< A;k >| = 1$ для любого $k \in N \setminus \{0\}$. В частности, для пустого множества $|\varnothing| = |< \varnothing;0 >| = 0 \neq 1 = |< \varnothing;k >|$ при любом $k \in N \setminus \{0\}$. Кратные одноэлементные множества являются простейшими, после пустого множества, элементами кратных булеанов любого множества, определяемых следующим образом.

Как уже отмечалось, булеан B(A) некоторого множества A образован всеми его подмножествами, включая A и $\varnothing$, причем $|B(A)| = 2\hat{}|A|$; по этой причине булеан множества A часто обозначают через $B(A) = 2\hat{}A$. Подобно вышеизложенному могут быть определены кратные булеаны множества A, а именно, с использованием их же обозначений, а также введенных ранее обозначений для кратных одноэлементных множеств,

$$B(A;0) = A =< A;0 >\in B(A;1) = B(A) =$$

$$= \{A, \mathbf{K}, \varnothing\} \in B(A;2) = B(B(A;1)) = B(B(A)) =$$

$$= \{B(A;1), \mathbf{K}, < A;1 >, \mathbf{K}, < \varnothing;1 >, < \varnothing:0 >\} \in B(A;3) =$$

$$= B(B(A;2)) = \{B(A;2), \mathbf{K}, < A;2 >, \mathbf{K}, < \varnothing;2 >, < \varnothing;1 >, < \varnothing;0 >\} \in$$

$$\in \mathbf{K} \in B(A;k) = B(B(A;k-1)) \in \mathbf{K}\ ,$$

или $B(A;0) = A$, $B(A;k) = 2\hat{}B(A;k-1)$ для $k \in N \setminus \{0\}$, причем $|B(A;0)| = |A|$, $|B(A;k)| = 2\hat{}|B(A;k-1)|$ для $k \in N \setminus \{0\}$. В частности, для пустого множества

$$B(\varnothing;0) = \varnothing =< \varnothing;0 >\in B(\varnothing;1) = \{\varnothing\} =$$

$$=< \varnothing;1 >\in B(\varnothing;2) = \{< \varnothing;1 >, < \varnothing;0 >\} \in B(\varnothing;3) =$$

$$= \{B(\varnothing;2), < \varnothing;2 >, < \varnothing;1 >, < \varnothing;0 >\} \in B(\varnothing;4) =$$

$= \{B(\varnothing;3), \{B(\varnothing;2), <\varnothing,2>, <\varnothing;1>\}, \{B(\varnothing;2\}, <\varnothing;2>, <\varnothing;0\},$
$\{B(\varnothing;2), <\varnothing;1>, <\varnothing;0>\}, \{<\varnothing;2>, <\varnothing;1>, <\varnothing;0>\},$
$\{B(\varnothing,2), <\varnothing;2>\}, \{B(\varnothing,2), <\varnothing;1>\}, \{B(\varnothing;2), <\varnothing;0>\},$
$\{<\varnothing;2>, <\varnothing;1>\}, \{<\varnothing;2>, <\varnothing;0>\}, \{<\varnothing;0>, <\varnothing;0>\},$
$< B(\varnothing;2);1>, <\varnothing;3>, <\varnothing;2>, <\varnothing;1>, <\varnothing;0>\} \in$
$\in \mathbf{K} \in B(\varnothing;k) = 2\hat{}\, B(\varnothing;k-1) \in \mathbf{K},$

причем $|B(\varnothing;0)| = 0,$ $|B(\varnothing;1| = 2\hat{}\,0 = 2\hat{}\,(1-1) = 1,$ $|B(\varnothing;2| = 2\hat{}\,1 = 2\hat{}\,(2-1) = 2$ – три первых, определенных выше, натуральных числа, но $|B(\varnothing;3)| = 2\hat{}\,2 = 2\hat{}\,(3-1) = 4$ и далее $|B(\varnothing;4)| = 2\hat{}\,4 = 16, |B(\varnothing;5)| = 2\hat{}\,16, \mathbf{K}$ Обращает на себя внимание «сверхсильный» рост этой последовательности натуральных чисел.

Таким образом, как отмечено выше и подтверждено примерами, кратные одноэлементные множества имеют минимальную, после пустого множества, мощность в каждом кратном булеане, тогда как каждый кратный булеан является множеством максимальной мощности в следующем кратном булеане.

Для того, чтобы, подобно всем этим числам, записать и число 0 как степень числа 2, может быть использован символ $-\infty$, если положить $2\hat{}\,(-\infty) = 0,$ то есть $-\infty = \log_2 0;$ его присоединение к множеству действительных чисел, в контексте идемпотентной математики [71], приводит к идемпотентному полуполю $R_{max};$ в рассматриваемом здесь контексте может оказаться полезным идемпотентное подполукольцо $N_{max}$ этого полуполя. Можно ввести в рассмотрение множество $B(\varnothing;-1),$ определив его так, чтобы $\varnothing = 2\hat{}\,B(\varnothing:-1)$ и $|B(\varnothing;-1)| = \log_2 0 = -\infty;$ это позволит записать $B(\varnothing;k) = 2\hat{}\,B(\varnothing;k-1)$ и $|B(\varnothing;k)| = 2\hat{}\,|B(\varnothing;k-1)|$ для любого $k \in N.$ Для произвольного множества A можно ввести в рассмотрение множество $B(A;-1),$ определив его так, чтобы $A = 2\hat{}\,B(A;-1)$ и $|B(A;-1)| = \log_2 n;$ это позволит записать $B(A;k) = 2\hat{}\,B(A;k-1)$ и $|B(A;k)| = 2\hat{}\,|B(A;k-1)|$ для любого $k \in N.$

### 3.1.3. Мультимножества и сверхнатуральные числа

Мультимножество [49] или комплект [49], в отличие от обычного множества, может содержать кратные, повторяющиеся, совпадающие элементы, несколько экземпляров одного и того же элемента. Если обычное множество полностью описывается своей характеристической функцией, заданной на этом множестве и принимающей значения в множестве $\{0.1\}$, а рассматриваемое ниже нечеткое множество – функцией принадлежности, заданной на этом нечетком множестве и принимающей значения в множестве [0,1], то мультимножество описывается функцией экземплярности, заданной на этом мультимножестве и принимающей значения в множестве $N \setminus \{0\}$. Простейшие и общеизвестные примеры мультимножеств таковы: основная теорема арифметики о том, что каждое положительное натуральное число однозначно представимо произведением простых чисел (среди которых могут быть повторяющиеся), устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством $N \setminus \{0\}$ и множеством F(P) конечных мультимножеств простых чисел, называемых также конечными сверхнатуральными числами [112] (здесь P – множество простых чисел); основная теорема алгебры о том, что каждый нормированный многочлен P(z) степени n над полем C комплексных чисел имеет ровно n корней (вообще говоря, комплексных и кратных), устанавливает взаимно однозначное соответствие между такими многочленами и мультимножествами их корней; в матричной алгебре мультимножество образуют канонические формы матриц; в математической статистике мультимножествами являются случайные выборки, что особенно проявляется после их систематизации, при переходе к абсолютным частотам (переход к относительным частотам ближе уже к нечетким множествам). Мультимножества играют важную роль в таких современных приложениях, как теория сетей Петри [49], теория формальных языков и грамматик и многих других, так как и в [49], терминальные строки нециклической контекстно-свободной грамматики образуют мультимножество, которое становится обычным множеством в том и только том случае, когда грамматика недвусмысленна.

Известно аксиоматическое описание алгебры мультимножеств, наделенной подходящими операциями, как MV-алгебры (см., например, [49,112]). Следует отметить, что эта аксиоматика адекватна и алгебре рассматриваемых ниже нечетких множеств. MV-алгебра является более общей алгебраической структурой, чем булева алгебра.

Многие задачи искусственного интеллекта приводятся к решению реляционных уравнений – мультимножественных или нечетких. Некоторые прямые методы решения последних приведены в [49]. Возможен и чисто алгебраический подход, приводящий к задаче исследования и решения матричных уравнений над полукольцами. Получаемые при этом результаты могут быть использованы, в частности, при моделировании информационных систем, содержащих базы данных и знаний с неполной информацией.

Полукольца, примеры которых уже упоминались выше, определяются как алгебраические структуры с двумя ассоциативными дистрибутивно связанными операциями (трактуемыми, например, как «аддитивная» или «сложение» и «мультипликативная» или «умножение»), иначе говоря, как две дистрибутивно связанные полугруппы. Это естественная область для задания матричных уравнений, однако из-за отсутствия, в общем случае, обратных операций в полугруппах возникают определенные проблемы при исследовании и решении таких уравнений. Следует отметить, что совокупность матриц над полукольцом является частичным (с точностью до согласования размеров при выполнении операций) полукольцом [53]; использование понятия регулярного [53] элемента его мультипликативной полугруппы (в предложенной трактовке – обобщенно обратимой матрицы) позволяет до конца провести исследование уравнения на совместность и найти некоторое решение совместного уравнения; получение общего решения хорошо известно в случае, когда аддитивная полугруппа является группой (каждый элемент имеет противоположный), то есть полукольцо оказывается кольцом; в общем же случае с использованием понятия регулярного элемента аддитивной полугруппы (в предложенной трактовке – обобщенно противоположимой матрицы) пока не удается получить общее решение. Подход к преодолению этих трудностей представлен в [108].

В некоторых случаях оказывается возможным перейти из полукольца в некоторое ассоциированное с ним кольцо, решить в нем уравнение, используя при этом алгоритм обобщенного обращения матриц над ассоциативными кольцами, и, возвратившись в исходное полукольцо, получить в нем таким образом общее решение уравнения. Примером такого преобразования может служить обобщенная стоуновская двойственность [53] между обобщенными булевыми алгебрами (дистрибутивными решетками с нулем и относительными дополнениями) и обобщенными булевыми кольцами (ассоциативными кольцами, все элементы которых идемпотентны).

Обобщенные булевы алгебры образуют подкласс дистрибутивных решеток, которые в свою очередь образуют подкласс полуколец. В этой связи представляет интерес вопрос как о распространении обобщенной стоуновской двойственности на более общие полукольца, чем обобщенные булевы алгебры, так и о сопоставлении результатов из [49] с результатами, получаемыми на основе перехода в возникающие при этом кольца или иные алгебраические структуры, ассоциированные с исходными полукольцами. В работе [112] представлено распространение стоуновской двойственности на мультимножества и локально конечные MV-алгебры.

### 3.1.4. Нечеткие множества и нечеткие числа как элементы второго булеана

Прикладное значение кратных булеанов в задачах искусственного интеллекта связано с тем, что если обычное – четкое – множество, то есть подмножество множества U, является, по определению, элементом его первого булеана B(U), то, как показано в [122], нечеткое подмножество, обычно характеризующееся своей функцией принадлежности, при определенных условиях может быть охарактеризовано набором четких множеств – его сечений, срезов или множеств уровня, то есть элементом второго булеана B(B(U)); наиболее существенное условие состоит в том, чтобы объединение подмножеств, входящих в набор, давало все множество U; этому условию удовлетворяют, например, сам первый булеан B(U) и вообще любой набор, включающий множество U, а также набор всех одноэлементных подмножеств множества U. Еще одним является условие частной замкнутости множеств набора относительно их пересечений; в [122] показано, как должен быть пополнен набор в случае нарушения этого условия.

Связь второго булеана с нечеткими множествами подсказывает его аксиоматическое описание. Хорошо известно, что первый булеан с операциями дополнения, объединения и пересечения четких множеств удовлетворяет аксиомам булевой алгебры – алгебраической структуры, относящейся к упоминавшимся выше идемпотентным полукольцам, а также к дистрибутивным решеткам с дополнениями. С другой стороны, как уже отмечалось, известна аксиоматика нечеткой алгебры как MV-алгебры, отличающейся от булевой алгебры (и включающей последнюю как частный случай), предложенная за 7 лет до возникновения теории нечетких множеств. MV-алгебра, наряду с указанными выше булевыми операциями, использует специальные операции «сложения» и «умножения» – именно в случае идемпотентности последних MV-алгебра превращается в булеву алгебру. Представляет как теоретический, так и практический интерес интерпретация этих операций во втором булеане. Здесь уместна аналогия с тем, что над соответствиями, как подмножествами прямого произведения множеств, выполнимы обычные операции дополнения, объединения и пересечения, но имеют место и специальные операции транспонирования и композиции, выполняемые именно над соответствиями.

Представляется перспективным развитие подхода [122] в направлении использования последующих кратных булеанов, что позволит повысить гибкость понятия нечеткого множества подобно тому, как принятое в настоящее время понятие нечеткого множества отличается большей гибкостью по сравнению с понятием четкого множества.

Нечеткое число A определяется (см., например, [49]) как нечеткое подмножество множества R действительных чисел, функция принадлежности которого удовлетворяет следующим специальным условиям:

Нормальность $\max_{x \in A} \mu_A(x) = 1$ (часто дополнительно требуется унимодальность $\mu_A(x) = 1$ только для одного $x \in A$); выпуклость $\mu_A(y) \geq \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(z)\}$ для $z \geq y \geq x$.

Целый раздел теории нечетких множеств – нечеткая арифметика или мягкие вычисления – основан на введении аналогов арифметических операций над нечеткими числами. Эти операции вводятся через операции либо над функциями принадлежности на основе принципа расширения, либо над наборами сечений на основе интервального принципа. При втором подходе определяется уровень принадлежности как ордината функции принадлежности нечеткого числа; пересечение функции принадлежности с этим уровнем дает пару значений – границ интервала достоверности; иначе говоря, для нечеткого числа, как и для произвольного нечеткого множества, определяется набор сечений, срезов или множеств уровня, то есть представляющий это нечеткое число элемент второго булеана B(B(R)); при этом, с точки зрения данного рассмотрения, существенно то, что операции над нечеткими числами определяются через операции над наборами их сечений, выполняемыми по правилам интервальной арифметики (о последней см., например, [71]). Следует отметить, что условия, предъявляемые к функциям принадлежности нечетких чисел, обеспечивают выполнение сформулированных ранее условий, при которых нечеткое число полностью характеризуется набором своих сечений. Таким образом, для нечеткой арифметики вполне естественным является оперирование с наборами четких множеств как с элементами второго булеана. Это подтверждает целесообразность подхода [71] с позиций именно мягких вычислений.

Материал, представленный в данном разделе, позволяет проследить «развитие понятия о числе» от исходных для всей фундаментальной и прикладной математики натуральных чисел до использующихся в современных задачах искусственного интеллекта нечетких чисел.

## 3.2. Представления нечетко-окрестностных систем

### 3.2.1. Системы, нечеткие по аргументу

Понятие нечеткой системы может быть введено уже в контексте общей теории систем [72] как нечеткое соответствие между нечеткими входным и выходным объектами, причем функционализация такой системы приводит к нечетким внутреннему объекту и реакции. В контексте аргументноалфавитных систем [107], детализирующих общие системы: элементами объектов являются сигналы – входы, выходы и состояния, зависящие от некоторого аргумента и принимающие значения, как и параметры системы, в некоторых алфавитах, – нечеткими могут быть как множество значений аргумента, так и алфавиты. Трактовка последних как нечетких множеств более популярна, так как связана с естественной нечеткостью измерений значений сигналов в системе и ее параметров (см., например, [109,113]).

Представляет интерес и вопрос об учете нечеткостей, возникающих в множестве значений аргумента системы. Постановка этого вопроса естественна в классе окрестностных систем, для которых множество значений аргумента наделено некоторой окрестностной структурой. В случае дискретного аргумента, наиболее важном для большинства современных приложений, эта структура, вообще говоря, отличается от топологической. Разнообразные примеры таких структур и соответствующих систем содержались в теории дискретно-аргументных систем [4,9]. Класс дискретных окрестностных систем и моделей был формализован в [13,36].

Во многих прикладных задачах окрестности, как подмножества множества значений аргумента, оказываются нечеткими. Уже в случае простейших дискретно-временных и близких к ним систем это приводит, вообще говоря, к необходимости [18] учета зависимости текущего состояния не стандартно от одного или фиксированного числа непосредственно предшествующих состояний, а от всей предыстории, то есть от состояний из временного промежутка от начального до текущего момента времени, иначе говоря – к системам с нефиксированным последействием, одним из представителей которых являются дискретные системы Вольтерра [51,58,64,65].

Нечеткие множества и системы представляют в настоящее время широкую область интенсивных исследований в рамках проблематики искусственного интеллекта, в частности, принятия решений в условиях неопределенности. Большинство из этих исследований находят отражение в публикациях журнала именно с таким названием – «Fuzzy Sets and Systems» (см., например, [109,113] и наиболее «свежие» на данный момент работы [110,119), а также в большом числе других изданий близкой тематики (см., например, [20,48,49]), в том числе отечественных (см., например, журналы «Автоматика и телемеханика», «Теория и системы управления» и др., библиографию в работах [10,21,47]). Нечеткие меры Сугено и нечеткие интегралы Сугено и Шоке [20,48,49], находящие разнообразные приложения (так, в [48,49,110] они применяются в задачах агрегирования критериев при многокритериальном принятии решений), представляются подходящим математическим аппаратом для описания нечетких динамических систем.

Цель дальнейшего изложения – предложить подход к учету нечеткости окрестностей по состоянию дискретно-временных систем и согласовать этот подход как с исследованиями дискретных систем Вольтерра, так и с исследованиями нечетких систем, проводящимися в связи с задачами искусственного интеллекта.

### 3.2.2. Линейные нечетко-окрестностные системы

Остановимся подробнее на формализации некоторых понятий, связанных с введением нечеткости по аргументу, сначала для конечных окрестностных систем [16,17].

Пусть $Z_N = \{0,1,\ldots,N-1\}$ – конечный носитель. Положим [88] $\nu_0 = 1,$ $\nu_1 = m_1,\ldots,\nu_j = m_1\ldots m_j,\ldots,\nu_d = m_1\ldots m_d = N$. Представим $k \in K$ в смешанной многопозиционной системе счисления.

$$k = \sum_{j=1}^{d} k_j \nu_{j-1},\ 0 \le k_j \le m_j - 1,\ s = \sum_{j=1}^{d} s_j \nu_{j-1},\ 0 \le s_j \le m_j - 1,\ j = 1,\ldots,d;$$

полагая $\chi[k,s] = \exp\left[2\pi i \sum_{j=1}^{d} \frac{k_j s_j}{m_j}\right]$, $k \in K,\ s \in S,\ Z_N$ – носитель для k и s.

Нечетким изображением назовем функцию $F[s]$, заданную на S,

$$F_\mu[s] = N^{-1} \sum_{k \in K} \mu[k] f[k] \bar{\chi}[k,s], \qquad (3.1)$$

где $\mu[k] \in [0,1]$ – функция принадлежности нечетких окрестностей [18].

Нечетким оригиналом для нечеткого изображения $F[s]$, заданного на s, назовем функцию $f[k]$, заданную на K

$$f_\mu[k] = \sum_{s \in S} \mu[s] \chi[k,s] F[s],\ k \in K. \qquad (3.2)$$

Нечеткая свертка сигналов определяется формулой

$$(f * g)[k] = N^{-1} \sum_{l \in K} \mu[\beta \dotplus l]\, f[k \dotplus l] g[l] = N^{-1} \sum_{l \in K} \mu[l] f[l] g[k \dotplus l]. \qquad (3.3)$$

Обобщением систем, рассмотренных в [7,16,17], является нечеткая конечная система, задаваемая на конечном носителе $Z_N$ уравнением

$$\sum_{\tau \in F_y[t]} \mu_y[t,\tau] \varphi_y[t,\tau] y[\tau] = \sum_{\sigma \in F_v[t]} \mu_v[t,\sigma] \varphi_v[t,\sigma] v[\sigma], \qquad (3.4)$$

где $t,\tau,\sigma \in Z_N$, вход $v[\sigma] \in R^p$, матричная весовая функция $\varphi_v[t,\sigma] \in R^{p_1 \times p}$, выход $y[\tau] \in R^q$, матричная девесовая функция $\varphi_y[t,\tau] \in R^{q_1 \times q}$; $\mu_v[t,\sigma] \in R^{m \times p_1}, \mu_y[t,\tau] \in R^{m \times q_1}$ – матричные функции принадлежности нечетких окрестностей $F_v[t]$ и $F_y[t]$, носителем которых является $Z_N$, а элементы принадлежат [0,1].

Частным случаем является нечеткая десверточная система

$$\sum_{l\in K} \mu_y[k \dot{-} l]\varphi_y[k \dot{-} l]y[l] = \sum_{l\in k}\mu_v[k \dot{-} l]\varphi_v[k \dot{-} l]v[k]. \qquad (3.5)$$

С использованием теоремы о свертке описание системы в преобразованной области принимает вид

$$(M_y * \Phi)[s]Y[s] = (M_v * \Psi)[s]V[s], \qquad (3.6)$$

где $M_y[s], \Phi[s], Y[s], M_v[s], \Psi_v[s], V[s]$ изображения $\mu_y[k], \varphi_y[k], y[k], \mu_v[k], \psi_v[k], v[k]$.

Рассмотрим систему, обобщающую рассмотренные в [7] и задаваемую в основной области уравнением двойной свертки

$$((\mu_y * \varphi_y) * y)[k] = ((\mu_v * \varphi_v) * v)[k], \qquad (3.7)$$

где $k \in K = \{0,1,..., N-1\}$.

При этом нечеткая двойная свертка имеет вид

$$((\mu_y * \varphi_y) * y)[k] = N^{-1} \sum_{m\in K} (N^{-1} \sum_{l\in K} \mu_y[m \dot{-} l]\varphi_y[l])y[k \dot{-} m]. \qquad (3.8)$$

С использованием теоремы о двойной свертке для конечных преобразований Фурье описание системы в преобразованной области принимает вид

$$M_y[s]\Phi_y[s]Y[s] = M_v[s]\Phi_v[s]V[s], \qquad (3.9)$$

где $V[s], \Phi_v[s], M_v[s], Y[s], \Phi_y[s], M_y[s]$ – изображения соответственно $v[k], \varphi_v[k], \mu_v[k], y[k], \varphi_y[k], \mu_y[k]$.

Далее, остановимся [18] на формализации нечеткости окрестностей по состоянию для модельного примера – линейной стационарной дискретно-временной динамической системы, описываемой при традиционном четком подходе уравнением состояний $x[t] = Ax[t-1]$, $x[0] = x_0$, $t \in Z_0$, $x[t] \in R^n$, $A \in R^{n\times n}$, решение которого (реакция на начальное состояние) записывается в виде $x[t] = A^t x[0]$ и удовлетворяет фундаментальному в теории систем полугрупповому свойству – следствию соотношения $A^{t+s} = A^t A^s$.

Четкие окрестности по состоянию $NX[0,t]$ такой системы состоят из единственного момента времени $\{t-1\}$. Четкими расширенными окрестностями по состоянию естественно считать множества моментов времени $ENX[0,t] = \{t-1, ..., 1, 0\}$. Полный учет этих окрестностей в уравнении состояний при его записи в виде $x[t]=A[t-1]x[t-1]+...+A[0]x[0]$, как нетрудно убедиться, приводит к нарушению полугруппового свойства, хотя его частичный учет, а именно – для систем k-го порядка $x[t]=A[t-1]x[t-1]+$ $+...+A[t-k]x[t-k]$, к такому нарушению не приводит. При четком подходе окрестности описываются своими характеристическими функциями, соответственно $\chi_{NX[0,t]}[\tau]=1,\ \tau=t-1,$ и $=0, \tau<t-1,$ $\chi_{NXK[0,t]}[\tau]=1,$ $\chi_{ENX[0,t]}[\tau]\equiv 1,\ \ \tau=t-1,...,t-k,$ и $=0, \tau=t-k-1,...,0,$ значения 1 и 0 которых можно считать неявно присутствующими в приведенных уравнениях состояний в виде множителей в соответствующих слагаемых. Заметим, что в последнем случае удобно и обозначение $\chi_{NX[t-k,t]}[\tau]\equiv 1$.

Переходя к нечеткому окрестностному аналогу рассмотренного модельного примера, опишем нечеткие расширенные окрестности по состоянию $FENX[0,t]$ их функциями принадлежности $\mu_{FENX[0,t]}[\tau]\in[0,1]$ и введем их в явном виде в уравнения состояний: $x[t]=\sum_{\tau\in FENX[0,t]}A[\tau]\mu_{FENX[0,t]}[\tau]x[\tau]$, что позволяет отнести их к классу систем с переменной структурой. Выполнение полугруппового свойства для таких систем требует подчинения функций принадлежности определенным условиям. Так, в простейшем случае скалярной системы с единичными коэффициентами $A[\tau]$, описываемой уравнением $x[t]=\sum_{\tau\in FENX[0,t]}\mu_{FENX[0,t]}[\tau]x[\tau]$, расчет реакции уже на втором шаге приводит к соотношению вида $\mu_{FENX[0,2]}[0]+\mu_{FENX[0,2]}[1]\mu_{FENX[0,1]}[0]=$ $=\mu_{FENX[1,2]}[1]\mu_{FENX[0,1]}[0]$; одноточечные множества естественно рассматривать как четкие; тогда условие, которому должна подчиняться функция принадлежности двухточечного множества, принимает вид, достаточно естественно интерпретируемый как с точки зрения теории систем, так и с точки зрения теории нечетких множеств: $\mu_{FENX[0,2]}[0]+\mu_{FENX[0,2]}[1]=1$. Дальнейший расчет реакции системы приводит к разветвляющейся совокупности условий подобного рода. С другой стороны, требование выполнения полугруппового свойства может быть ослаблено; это приводит к нетрадиционной трактовке нечеткой динамики.

В пункте 1.1.1 первой главы введены симметричные системы (1.3), обобщающие классические дискретные.

В системе (1.3) имеет место четкое задание окрестностей элементов a множества A. При нечетком задании этих окрестностей окрестности $O_x[a], O_y[a]$, расширяются до всего множества A. В уравнении (1.3) это соответствует [45] появлению весов в каждом слагаемом:

$$\sum_{\alpha\in A}\Omega[a,\alpha]M_x[a,\alpha]X[\alpha]=\sum_{\beta\in A}\Xi[a,\beta]N_v[a,\beta]V[\beta], \qquad (3.10)$$

где $M_x[a,\alpha]\in R^{n\times k}$, $N_v[a,\beta]\in R^{p\times l}$ – матрицы коэффициентов, элементы которых $m_{ij}$, $n_{fg}\in[0,1]$, $i=\overline{1,u}$; $j=\overline{i,k}$; $f=\overline{1,p}$; $g=\overline{1,l}$, $X[\alpha]\in R^{k\times m}$, $V[\beta]\in R^{l\times m}$. Элементы этих матриц являются значениями функции принадлежности, что соответствует заданию нечетких множеств. Обобщение (3.10) системы (1.3) является аналогом системы (3.4) на случай соотношений типа вход–состояние. В отличие от системы (1.3), где суммирование осуществляется по всем элементам окрестности узла a, в системе (3.10) суммирование идет по всем элементам множества A. Таким образом, в (1.3) при четком задании окрестностей матрицы $M_x, N_v$ представлены коэффициентами 0 и 1, а в (3.10) элементы этих матриц принадлежат отрезку [0,1].

В качестве методов решения системы (3.10) могут быть использованы методы, основанные на «расшивании» системы уравнений по узлам системы [34], рассмотренные во второй главе.

### 3.2.3. Нелинейные нечетко-окрестностные системы

Нелинейная смешанная нечётко-окрестностная система описывается уравнением [47,86]

$$\Phi\big(g;\{\mu_v, v(\alpha),\ \alpha\in O_v[g]\};\ \{\mu_x, x(\beta),\ \beta\in O_x[g]\};\ \{\mu_y, y(\gamma),\ \gamma\in$$
$$\in O_y[g]\}, a\big)=0, \qquad (3.11)$$

где $g\in A=\{0,1,\mathbf{K}\}, O_v[g], O_x[g], O_y[g]$ – окрестности узла $g$ системы по входу, состоянию, выходу соответственно; $\alpha,\beta,\gamma\in A, \mu_v,\mu_x,\mu_y\in[0,1]$ – функции принадлежности по входу, состоянию, выходу и являются элементами матриц инцидентности по входу $F_v=\{\mu_v\}$, состоянию $F_x=\{\mu_x\}$, выходу $F_y=\{\mu_y\}$ и характеризуют степень нечёткого влияния друг на друга элементов окрестностей $O_v, O_x, O_y$.

В задаче идентификации задан массив $K_L$ наборов «вход–состояние–выход» $v_u$, $x_u, y_u, \mu_v, \mu_x, \mu_y, 1\le u\le L$ во всех вершинах g, включенных в окрестности. Для отыскания вектора параметров $a$ следует решить систему уравнений

$$\Phi\big(g;\{\mu_v, v_u(\alpha),\ \alpha\in O_v[g]\};\ \{\mu_x, x_u(\beta),\ \beta\in O_x[g]\};\ \{\mu_y, y_u(\gamma),\ \gamma\in$$
$$\in O_y[g]\}, a\big)=0,\quad g\in G,\ 1\le u\le L\ . \qquad (3.12)$$

Задача может быть решена при помощи итерационного алгоритма нелинейного метода наименьших квадратов, использующего линеаризацию функции Φ по вектору a в окрестности текущей точки $a_u$, что приводит к оценке $\hat{a}^{(L)}$ вектора параметров a. При поступлении нового набора данных

$$K_{L+1} = \{(\mu_v, v_{L+1}(\alpha),\ \alpha \in O_v(g));\ (\mu_x, x_{L+1}(\beta),\ \beta \in O_x(g));$$
$$(\mu_y, y_{L+1}(\gamma), \gamma \in O_\gamma(g))\} \qquad (3.13)$$

пересчет оценки $\hat{a}^{(L)}$ в оценку $\hat{a}^{(L+1)} = \theta(\hat{a}^{(L)}, K_{L+1})$ осуществляется при помощи рекурретно-итерационной процедуры нелинейного метода наименьших квадратов, что решает задачу адаптивной идентификации параметров для систем данного нечетко-окрестностного класса.

Рассмотрим частный случай общей системы (3.11), явную разностную нечетко-окрестностную нелинейную систему по состоянию

$$x_{i+1} = f(x_i, \ldots, x_{i-p}, \mu_{x_i}; a) + N\xi_i,\ i = 0, 1, \ldots, L,\ 1 \le p \le i,$$

где $x_i \in R^n$, f – матрица известных нелинейных функций, $f \in R^{n\times m}$, $a \in R^m$ – вектор неизвестных параметров, N – квадратная матрица известных коэффициентов, $\xi_i$ – гауссов шум с характеристиками

$$M(\xi_i) = 0, M(\xi_i \xi_j^T) = I\delta_{i-j}$$

M – оператор математического ожидания, $\delta$ – дельта-функция Кронекера, T – символ транспонирования.

Оценку $\hat{a}^{(L+1)} = \theta(\hat{a}^{(L)}, K_{L+1})$ на параметры получаем из нелинейного алгебраического уравнения, являющимся развитием [79] на случай нечётко-окрестностных систем,

$$\sum_{i=0}^{L} \left( \frac{\partial f\left(x_i, \hat{a}^{(L+1)}, \mu_{x_i}\right)}{\partial a} \right)^T R^{-1} \left(x_{i+1} - f(x_i, \mu_{x_i}, \hat{a}^{(L+1)})\right) = 0, \qquad (3.14)$$

где $R = NN^T$.

Для решения (3.14) применяем алгоритм линеаризации [79,86]

$$a^{j+1} = a^j + \left[ \sum_{i=1}^{L} \left( \frac{\partial f(x_i, \mu_{x_i}, a^j)}{\partial a} \right)^T R^{-1} \frac{\partial f(x_i, \mu_{x_i}, a^j)}{\partial a} \right]^{-1} \cdot$$

$$\cdot \sum_{i=1}^{L} \left( \frac{\partial f(x_i, \mu_{x_i}, a^j)}{\partial a} \right)^T R^{-1} \left(x_{i+1} - f(x_i, \mu_{x_i}, a^j)\right),\ j = 0, 1, 2, \ldots$$

Алгоритм дает последовательность значений параметров, сходящуюся к решению уравнения (3.14). Расширим данную постановку, считая, что структура данной системы известна не полностью, т.е. некоторые из элементов матриц инциденций требуют определения. Включая эти неизвестные значения $\mu_v, \mu_x, \mu_y$ в число неизвестных параметров, применяем описанный подход.

Одним из способов описания систем являются ряды (разложения) Вольтерра – функциональные ряды, продолжающие линейный оператор свертки [47]

$$y[t] = \sum_{s \in 0,\dots,t} h[t,s]v[s] \tag{3.15}$$

нелинейными однородными операторами степеней 2, …, n, …

$$y[t] = v_0[t] + \sum_{s \in \{0,\dots,t\}} h_1[t,s]v[s] +$$

$$+\sum_{s_1,s_2 \in \{0,\dots,t\}} \sum h_2[t,s_1,s_2]v[s_1]v[s_2] + \dots +$$

$$+\sum_{s_1,\dots,s_n \in \{0,\dots,t\}} \dots \sum h_n[t,s_1,\dots,s_n]v[s_1]v[s_2]\dots v[s_n] + \dots .$$

Это может быть обобщено в виде [47]

$$y[a] = v_0[a] + \sum_{b \in N_v[a]} h[a,b]v[b] +$$

$$+\sum_{b_1,b_2 \in N_{v[a]}} \sum h[a,b_1,b_2]v[b_1]v[b_2] + \mathbf{K} +$$

$$+\sum_{b_1,\dots,b_n \in N_{v[a]}} \dots \sum h[a,b_1,\dots,b_n]v[b_1]v[b_2]\dots v[b_n] + \dots$$

Частным случаем является билинейная система

$$y[a] = \sum_{b_1,b_2 \in N_v[a]} \sum h[a,b_1,b_2]v[b_1]v[b_2]. \tag{3.16}$$

Рассмотрим в этом случае нечетко-окрестностную систему $\Sigma$. Пусть [47] заданы ее носители: аргументный A и алфавитные $X, Y, Z$ (общее обозначение S); определены сигналы в системе $s: A \to S$ (входы $v: A \to V$, состояния $x: A \to X$, выходы $y: A \to Y$). Пусть дискретный носитель A наделен окрестностной структурой по отношению к системе $\Sigma$, т.е. для каждого элемента $a \in A$ и каждого сигнала s задана окрестность $N_s[a]$ (в дальнейшем это может быть $N_v[a], N_x[a], N_y[a]$, состоящая из $n_s[a]$ элементов (соответственно $n_v[a], n_x[a], n_y[a]$). Заданы вспомогательные алфавиты MS.

Элементарный нелинейный нечетко-окрестностный s-блок определяется как заданное для сигнала s и каждого $a \in A$ отображение $f_s : A \times S(n_S[a], \mu_S)$ в MS, т.е. $m_S[a] = f_S(a, \{\mu_s, s[b], b \in N_S[a]\})$, $m_S[a] \in MS$, где $\mu_S \in [0,1]$ – функция принадлежности. В предположении о наличии необходимых алгебраических структур в алфавитах в соответствии с разложением Вольтерра можно представить

$$m_S[a] = s_0[a] + \sum_{b\in N_S[a]} \mu_1 h_1[a,b]s[b] +$$

$$+\sum_{b_1,b_2\in N_S[a]}\sum \mu_2 h_2[t,b_1,b_2]s[b_1]s[b_2] + \ldots +$$

$$+\sum_{b_1,\ldots,b_n\in N_S[a]}\ldots\sum \mu_n h_n[a;b_1,\ldots,b_n]s[b_1]s[b_2]\ldots s[b_n] + \ldots, \qquad (3.17)$$

где $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots \in [0,1]$ – функции принадлежности.

Такие блоки могут быть использованы в теории систем следующим образом. Если s трактуется как системный вход v, а MS совпадает с Y, то $y[a] = m_V[a, \mu_V]$ определяет систему “вход-выход” в известном смысле. Если s трактуется как системное состояние, а MS совпадает с X, то $x[a] = m_X[a, \mu_X]$ определяет “автономную” (без входов и выходов, “свободную”) систему “в пространстве состояний” и служит ее уравнением состояний. При этом удобно допустить, что а не входит в $N_X[a]$; так определяемая система несингулярна. С другой стороны, если а входит в $N_X[a]$, то уравнение состояний $m_X[a, \mu_X] = 0$ определяет, вообще говоря, сингулярную систему.

Два блока, для одного из которых s трактуется как v, а для другого – как x, при условиях $MV = MX$ и $a \in N_X[a]$, определяют симметричную систему уравнением $m_V[a, \mu_V] = m_X[a, \mu_X]$, вообще говоря, сингулярную; если из $x[b], b \in N_X[a]$ можно выделить $s[a]$ и переписать последнее уравнение в виде

$$x[a] = -f_X^*\big(a; \{\mu_X, x[b], b \in N_X[a] \setminus a\}\big) + f_V\big(a; \{\mu_V, v[c], c \in N_V[a]\}\big), \qquad 3.18)$$

то эта система несингулярна.

Наконец, три блока, в которых s трактуется соответственно как v, x, y, объединенные общей системной функцией $F: A \times MV \times MX \times MY \to M$, где M – общий системный алфавит, определяют смешанную нечетко-окрестностную систему, уравнение которой удобно записать в виде $mF[a, \mu] = 0$ или

$$F\Big(a,\ f_V\big(a; \{\mu_V, v[c], c \in N_V[a]\}\big),\ f_X\big(a; \{\mu_X, x[b], b \in N_X[a]\}\big),$$
$$f_Y\big(a; \{\mu_Y, y[d], d \in N_Y[a]\}\big)\ \Big) = 0,$$

что соответствует (3.11).

В зависимости от возможности выразить из этого уравнения те или иные члены, можно получить тот или иной специальный класс систем.

Частным случаем (3.11) является билинейная нечетко-окрестностная система

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{\alpha\in O_{u_i}[a]} w_i[a,\alpha]\mu_i u_i[\alpha]+\sum_{i=1}^{r}\sum_{\substack{\alpha\in O_{u_i}[a]\\ \beta\in O_{\gamma_i}[a]}} w_i[a,\alpha,\beta]\mu_i u_i[\alpha]\cdot\nu_i\gamma_i[\beta]=0. \quad (3.19)$$

Здесь $O_{u_i}[a], O_{\gamma_i}[a]$ окрестности по $u_i, \gamma_i$ элемента $a$, $a\in A=\{a_1,...,a_N\}$ – множество значений аргумента билинейной окрестностной системы, $|A|=N$; $u_i, \gamma_i\in U, w_i[a,\alpha], w_i[a,\alpha,\beta] (i=\overline{1,r})$ – некоторые матрицы, $\mu_i,\nu_i\in[0,1]$.

Координатная форма (3.19) имеет вид

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{\alpha\in O_{u_i[a]}} w_{u_i}[a,\alpha]\mu_i u_i[\alpha]+$$

$$+\sum_{i=1}^{r}\sum_{\substack{\alpha\in O_{u_i[a]}\\ \beta\in O\gamma_i[a]}} [w_{1u_i\gamma_i}[a,\alpha,\beta]\nu_i\gamma_i[\alpha,1]\mu_i u_i[\beta]+\mathbf{K}+$$

$$+w_{m_i u_i\gamma_i}[a,\alpha,\beta]\nu_i\gamma_i[\alpha,m_i]\mu_i u_i[\beta]]=0\,. \quad (3.20)$$

Данная форма модели (3.20) представляется удобной для программной реализации.

## 3.3. Системы Вольтерра

### 3.3.1. Дискретные системы Вольтерра

Дискретная система Вольтерра, в соответствии с [65], описывается уравнением

$$x[t]=f(t;x[t-1],\mathbf{K},x[0])\,, \quad (3.21)$$

где $t\in O=\{0,1,\mathbf{K}\}$ – дискретное время, $x[t]\in O_n$ – вектор состояния системы, $f:O\times\Xi\to O_n$ – некоторая функция, $\Xi$ – пространство последовательностей $\xi$, элементами которых являются векторы из $O_n$. При этом для любого $t\in O$ значение функции $f(t;\xi)$ определяется только компонентами $x[0],\mathbf{K},x[t-1]$ последовательности $\xi$ и не зависит от $x[\tau],\tau<0$ и $\tau>t-1$. Поэтому эволюция системы (3.21) полностью определяется заданием одного начального состояния $x[0]$ или набора начальных состояний $(x[0], x[1], \mathbf{K}, x[r])$. Часто предполагается выполненным условие $f(t,0,\mathbf{K},0)\equiv 0$. Иногда, чтобы подчеркнуть зависимость решения $x[t]$ уравнения (3.21) от начальных состояний, оно обозначается $x[t;(x[0],\mathbf{K},x[r])]$.

В описании дискретной системы Вольтерра использована максимальная для данной ситуации окрестность $T = MNX[t] = \{t-1, \mathbf{K}, 0\}$ текущего состояния $x[t]$, так что уравнение (3.21) можно записать в виде

$$x[t] = f(t; \{x[\tau], \tau \in T\}). \tag{3.22}$$

При использовании стандартной его окрестности $SNX[t] = \{t-1\}$ получаем стандартную одношаговую дискретно-временную систему

$$x[t] = f(t; x[t-1]), \tag{3.23}$$

а при использовании фиксированной (одно и то же k для всех t) окрестности $KNX[t] = \{t-1, \mathbf{K}, t-k\}$ – стандартную дискретно-временную систему с k-шаговым запаздыванием

$$x[t] = f(t; x[t-1], \mathbf{K}, x[t-k]). \tag{3.24}$$

В [64,65] развит подход к исследованию устойчивости дискретных систем Вольтерра, использующий, в отличие от систем с конечным фиксированным последействием, не функции Ляпунова, зависящие от конечного числа аргументов, а функционалы Ляпунова, зависящие от всей траектории процесса от начального до текущего моментов времени. Построена формальная процедура, приводящая к явной форме таких функционалов, а следовательно, и условий устойчивости для различных подклассов дискретных систем Вольтерра. Для дальнейшего использования приведем следующий простейший пример из [64]. Пусть

$$x[t] = \sum_{\tau=0}^{t-1} a[t,\tau]\, x[\tau] = \sum_{\tau\in T} a[t,\tau]\, x[\tau] \tag{3.25}$$

скалярная линейная нестационарная дискретная система Вольтерра. Тогда условие ее устойчивости имеет вид $\alpha_0 \le 1$, а условие асимптотической устойчивости имеет вид $\alpha_0 < 1$, где

$$\alpha_0 = \sup_{t\ge 0} \sum_{\tau=0}^{\infty} |a[t,\tau]|.$$

Частными случаем (3.24) является простейшая линейная стационарная система

$$x[t] = a x[t-1], \tag{3.26}$$

для которой $\alpha_0 = a$.

В [51] показано, что дискретные системы Вольтерра допускают трактовку как динамические благодаря выполнению для них фундаментального в математической теории систем [72] полугруппового свойства или свойства композиции переходов состояний, которое в простейшем случае системы (3.26) является следствием соотношения $a^{t+s} = a^t a^s$, а в общем случае системы (3.21) обосновывается следующим образом. Пусть $r < s < t$ – некоторые моменты времени; пусть задан набор $(x[0], \mathbf{K}, x[r])$; он определяет решение дискретной системы Вольтерра на $[0,\infty)$

$$\varphi_{[0,\infty)}(x[0], \mathbf{K}, x[r]) = (x[0], \mathbf{K}, x[r], x[r+1] = x[r+1; (x[0], \mathbf{K}, x[r])] =$$
$$= x[r+2; (x[0], \mathbf{K}, x[r])] = f(r+1; x[r], \mathbf{K}, x[0])x[r+2] =$$
$$= f(r+2; f(r+1; x[r], \mathbf{K}, x[0]), x[r], \mathbf{K}, x[0]), \mathbf{K}, x[s] =$$
$$= x[s; (x[0], \mathbf{K}, x[r])], \mathbf{K}, x[t] = x[t; (x[0], \mathbf{K}, x[r])], \mathbf{K}),$$
сужение которого на временные отрезки $[0, s]$, $[0, t]$ определяет отображения $\varphi_{sr} = \varphi_{sr}(x[0], \mathbf{K}, x[r])$, $\varphi_{tr} = \varphi_{tr}(x[0], \mathbf{K}, x[r])$; аналогично определяется отображение $\varphi_{ts} = \varphi_{ts}(x[0], \mathbf{K}, x[s])$. Непосредственно проверяется, что для динамической системы с переходной функцией, заданной этим семейством отображений, выполняется свойство композиции переходов состояний в виде

$$\varphi_{tr} = \varphi_{ts}\varphi_{sr}$$

или в более подробной записи

$$\varphi_{tr}(x[0], \mathbf{K}, x[r]) = \varphi_{ts}(\varphi sr(x[0], \mathbf{K}, x[r])).$$

Внимание полугрупповому свойству уделено в связи с тем, что оно служит «проверочным» на право системе считаться динамической; это в полной мере относится к рассматриваемым далее нечетким системам.

### 3.3.2. Нечеткие дискретные системы типа Вольтерра

Реализацию предлагаемого подхода к учету нечеткости окрестностей по состоянию начнем со следующего замечания. Используемая в системах (3.23), (3.26) стандартная окрестность $SNX[t]$, как четкое подмножество максимальной $T = MNX[t]$, полностью описывается своей характеристической функцией $\chi_{SNX[t]}[\tau] = 1$ при $\tau = t-1$ и $\chi_{SNX[t]}[\tau] = 0$ при $\tau = t-2, \mathbf{K}, 0$, которая, благодаря принимаемым ею лишь двум значениям 0 и 1, может считаться неявно присутствующей в этих уравнениях; подобным же образом характеристическая функция $\chi_{MNX[t]}[\tau] \equiv 1, \tau = t-1, \mathbf{K}, 0$, неявно присутствует в уравнениях (3.21), (3.22), (3.25), а характеристическая функция $\chi_{KNX[t]}[\tau] = 1$ при $\tau = t-1, \mathbf{K}, t-k$ и $\chi_{KNX[t]}[\tau] = 0$ при $\tau = t-k-1, \mathbf{K}, 0$ – в уравнении (3.24).

При переходе к нечеткому окрестностному аналогу системы (3.26) представляется естественным вместо неявно входящих в уравнение системы характеристических функций четких окрестностей явно ввести в это уравнение функции принадлежности нечетких окрестностей, значения которых принадлежат не множеству $\{0,1\}$, а промежутку $[0,1]$. При этом следует учитывать, что сама максимальная окрестность текущего состояния

$x[t]$ может быть нечеткой, обозначаемой $FMNX[t]$, с функцией принадлежности $\mu_{FMNX[t]}[\tau]\in[0,1], \tau\in MNX[t]$; нечеткая стандартная окрестность $FSNX[t]$, как нечеткое подмножество максимальной $FMNX[t]$, описывается функцией принадлежности $\mu_{FSNX[t]}[\tau]\in[0,1], \tau\in MNX[t]$, причем в общем случае $\mu_{FSNX[t]}[\tau]\le\mu_{FMNX[t]}[\tau]$ для всех $\tau\in MNX[t]$. То же относится и к другим нечетким подмножествам максимальной окрестности: их функции принадлежности в общем случае заданы на всем множестве $FMNX[t]$ и в общем случае не превосходят его функцию принадлежности.

Введем в явном виде такую функцию принадлежности в (для простоты скалярные) уравнения (3.21), (3.22), обозначив ее для краткости через $\mu[t,\tau]$, $\tau = t-1, \mathbf{K}, 0$. Получим уравнение скалярной нечеткой нелинейной дискретной системы Вольтерра

$$x[t] = f(t;\, x[t-1], \mu[t;t-1];\, \mathbf{K},\, x[1], \mu[t;1];\, x[0], \mu[t;0]).$$

Применение к его правой части разложения в дискретный функциональный ряд Вольтерра [15] до членов второй суммарной степени по x, $\mu$ включительно приводит к описанию так введенной скалярной нечеткой нелинейной дискретной системы Вольтерра в виде

$$x[t] = a_0[t] + (\textstyle\sum_{\tau\in T} a_{1x}[t,\tau]x[\tau] + \sum_{\tau\in T} a_{1\mu}[t,\tau]\mu_t[\tau]) +$$
$$+(\textstyle\sum_{\tau_1\in T}\sum_{\tau_2\in T} a_{2xx}[t;\tau_1,\tau_2]x[\tau_1]x[\tau_2] +$$
$$+\textstyle\sum_{\tau_1\in T}\sum_{\tau_2\in T} a_{2\mu\mu}[t;\tau_1,\tau_2]\mu[t;\tau_1]\mu[t;\tau_2] +$$
$$+\{\textstyle\sum_{\tau_1\in T}\sum_{\tau_2\in T} a_{2\mu x}[t;\tau_1,\tau_2]\mu[t;\tau_1]x[\tau_2]\}) + \mathbf{K}$$

В [18] рассмотрен простейший модельный пример скалярной нечеткой линейной по состояниям дискретной системы Вольтерра, уравнение которой является весьма специальным случаем полученного выше описания, а именно – диагональным членом двойной суммы в фигурных скобках. При этом значения функции принадлежности естественным образом входят в коэффициенты уравнения. Для концентрации в дальнейшем изложении внимания на основном рассматриваемом здесь вопросе – учете нечеткости окрестностей по состоянию дискретно-временных систем – положим $a_{2\mu x}[t;\tau_1,\tau_2]=1$. Тогда скалярная нечеткая линейная по состояниям дискретная система типа Вольтерра опишется уравнением

$$x[t] = \textstyle\sum_{\tau=0}^{t-1}\mu[t,\tau]x[\tau] = \sum_{\tau\in T}\mu[t,\tau]x[\tau], \qquad (3.27)$$

вполне сопоставимым с уравнением (3.25) скалярной линейной нестационарной дискретной системы Вольтерра.

Таким образом, учет нечеткости окрестностей по состоянию даже стандартных одношаговых дискретно-временных систем приводит к системам типа Вольтерра, то есть с нефиксированным последействием. Как только что показано, в случае линейных систем возможный естественный подход к учету указанной нечеткости состоит во введении функций принадлежности непосредственно в коэффициенты уравнения системы. Полученная система линейна по состояниям, но билинейна по совокупности состояний и функций принадлежности; это подчеркивается в связи с тем, что в некоторых приложениях функции принадлежности допускают трактовку как входные воздействия системы, что может представлять интерес при решении проблем управления нечеткими системами, а также при исследовании выполнимости для них полугруппового свойства. Следует отметить, что дискретные системы Вольтерра (3.21) рассматриваются в [51,58,64,65] как автономные, то есть без учета входных воздействий.

В приведенном описании (3.27) нечеткая линейная дискретная система типа Вольтерра, как и система (3.25), удовлетворяет полугрупповому свойству, установленному в [51] для более общей системы (3.21)). В то же время из содержательного смысла систем (3.27) как нечетких окрестностных следует, что выполнение для них полугруппового свойства может потребовать подчинения функций принадлежности определенным условиям. Так, как и в п. 3.2.2. расчет реакции системы (3.27) уже на втором шаге приводит к соотношению вида (использованы более подробные обозначения функций принадлежности, введенные в начале данного раздела) $\mu_{FSNX\,[0,2]}[0]+\mu_{FSNX\,[0,2]}[1]\mu_{FSNX\,[0,1]}[0]=\mu_{FSNX\,[1,2]}[1]\mu_{FSNX\,[0,1]}[0]$; одноточечные множества естественно рассматривать как четкие; тогда, как и в п. 3.2.2, условие, которому должна подчиняться функция принадлежности двухточечного множества, принимает вид: $\mu_{FENX[0,2]}[0]+$ $+\mu_{FENX[0,2]}[1]=1$. Дальнейший расчет реакции системы приводит к разветвляющейся совокупности условий подобного рода и к нетрадиционной трактовке нечеткой динамики.

Объяснение особенности, проиллюстрированной приведенным примером, состоит в том, что характеристика дискретных систем Вольтерра как систем с нефиксированным последействием (в отличие от стандартных систем с конечным фиксированным последействием) позволяет расширить класс этих систем до более общего, чем в [51,58], класса систем с изменяющейся структурой, текущее состояние которых зависит не стандартно от одного или фиксированного числа непосредственно предшествующих состояний, но и не от всей предыстории, то есть не от всех состояний из временного промежутка от начального до текущего момента времени, а лишь от некоторого подмножества этих состояний, определяемого, вообще говоря, текущим состоянием, причем в общем случае неоднозначно.

Обоснованное в [51] выполнение полугруппового свойства для рассмотренных там четких систем с изменяющейся структурой связано, среди прочего, с тем, что при замене функций принадлежности нечетких множеств характеристическими функциями четких последние при увеличении t наращиваются без изменения их структуры. Функции же принадлежности могут изменять структуру при изменении t, что в общем случае приводит к системам с «более сильно» изменяющейся структурой, чем у рассмотренных в [51,58], вследствие чего полугрупповое свойство для нечетких систем может нарушаться, если функции принадлежности не подчинить дополнительным требованиям, пример которых приведен выше.

### 3.3.3. Нечеткие меры и интегралы

Понятие нечетких меры и интеграла было введено М. Сугено (см., например, [110,114,119,121,124]). Для современных приложений особый интерес эти понятия представляют применительно к конечным множествам. Пусть $T = MNX[t] = \{0, \mathbf{K}, t-1\}$ – такое множество; при рассмотрении динамических систем оно наделено естественным порядком следования его элементов. Нечеткая мера на T определяется как функция множества $m: 2^T \to [0,1]$ (здесь $2^T$ – булеан или множество всех подмножеств множества T), обладающая свойствами $m(\varnothing) = 0, m(T) = 1,\ \ A \subseteq B \Rightarrow m(A) \le m(B)$.

Подчеркивается, что требование аддитивности (в обычном смысле, конкретный пример см. ниже), обязательно присутствующее в стандартных определениях мер, к нечетким мерам, вообще говоря, не предъявляется; в то же время следует отметить, что с позиций идемпотентной математики [20], при рассмотрении промежутка $[0,1]$ как полукольца с операциями $\max, \min$ вместо базовых арифметических операций, идемпотентная мера, как пример нечеткой меры, свойством аддитивности обладает (конкретные примеры см. ниже).

Прототипом нечетких мер является обычная вароятностная мера, являющаяся конкретным примером аддитивной (в обычном смысле) меры: если $A \cap B = \varnothing$, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Конкретными примерами идемпотентно-аддитивных мер являются мера возможности, для которой $\Pi(A \cup B) = \max\{\Pi(A), \Pi(B)\}$, и мера достоверности (необходимости), для которой $N(A \cup B) = \min\{N(A), N(B)\}$. Известен класс мер Сугено, характеризующихся параметром $\lambda > -1$ и обладающих свойством $S(A \cup B) = S(A) + S(B) + \lambda S(A)S(B)$ (при $\lambda = 0$ это – обычные аддитивные меры), меры доверия и правдоподобия и др. (см., например, [114,124]).

Пусть $f:T \to [0,1]$ – некоторая функция. Нечеткий интеграл Сугено от этой функции по нечеткой мере $m = m_t$ на T определяется выражением

$$S(f,m,T) = \max_{\alpha \in [0,1]} \{\min[\alpha, m_t(F_\alpha)]\},$$

где $F_\alpha = \{t \in T : f[t] \geq \alpha\}$. Если $f = \mu$ – функция принадлежности некоторого нечеткого подмножества множества T, то $F_\alpha$ – множество уровня $\alpha$ этого подмножества. Другое представление этого интеграла можно получить в предположении, что функция f не возрастает на множестве T, так что при $t > s$ выполняется условие $f[t] \leq f[s]$ (для произвольной функции множество T может быть переупорядочено). В этом случае интеграл Сугено может быть представлен в виде

$$S(f,m,T) = \max_{\tau \in T} \{\min[m_t([0,\tau]), f[\tau]]\},$$

допускающем сопоставление с правой частью уравнений (3.25), (3.27), описывающих линейные нестационарные дискретные системы Вольтерра и нечеткие дискретные системы типа Вольтерра. Выражения находятся в следующем соответствии: состоянию $x[\tau]$ соответствует функция $f[\tau]$, коэффициентам $a[t;\tau], \mu[t;\tau]$ соответствует мера $m_t([0,\tau])$, арифметическим операциям сложения и умножения соответствуют операции max и min. Отмеченное соответствие позволяет определить нечеткую дискретную максминную систему типа Вольтерра-Сугено уравнением

$$x[t] = \max_{\tau \in T} \{\min[m_t([0,\tau]), x[\tau]]\}. \tag{3.28}$$

Ее наиболее бросающимися в глаза отличиями от рассмотренных ранее систем является использование максминных операций, ограничение области значений состояния промежутком $[0,1]$ и его невозрастание.

Другой тип нечеткого интеграла – идемпотентный интеграл Маслова [70] на полуполе $R_{max}$ или MAXPLUS, в котором сложение заменяется операцией взятия максимума, а умножение – обычным арифметическим сложением – предполагает, что нечеткая идемпотентная мера определяется некоторой заданной на T функцией $\varphi = \varphi_t$ в виде $m(A) = m_{t\varphi}(A) = \max_{\tau \in A} \varphi_t[\tau]$ для всех $A \subseteq T$; сам идемпотентный интеграл определяется выражением

$$I(f,m,T) = \max_{\tau \in T} \{\varphi_t[\tau] + f[\tau]\},$$

сравнение которого с (3.25), (3.27) позволяет определить нечеткую дискретную макcплюсовую систему типа Вольтерра-Маслова уравнением

$$x[t] = \max_{\tau \in T} \{\varphi_t[\tau] + x[\tau]\}, \tag{3.29}$$

характерное отличие которой также состоит в использовании модифицированных базовых операций.

Наиболее близкое к рассмотренным ранее представление имеет интеграл Шоке по нечеткой мере [114,121,124]. Здесь, как и в случае интеграла Сугено, предполагается, что функция f не возрастает на T, но область ее значений ограничена не промежутком [0,1], а более широким промежутком $[0,\infty)$. Интеграл Шоке в базовых арифметических операциях определяется выражением

$$C(f,m,T)=\sum_{\tau\in T}\{m_t([0,\tau])-m_t([0,\tau-1])\}f[\tau]$$

и оказывается наиболее сопоставимым с правыми частями уравнений (3.25), (3.27): состоянию $x[\tau]$ соответствует функция $f[\tau]$, коэффициентам $a[t;\tau],\mu[t;\tau]$ соответствует приращение меры $m_t([0,\tau])-m_t([0,\tau-1])$; иных отмеченных выше отличий нет. Это позволяет определить нечеткую дискретную систему типа Вольтерра-Шоке уравнением

$$x[t]=\sum_{\tau\in T}\{m_t([0,\tau])-m_t([0,\tau-1])\}x[\tau]. \tag{3.30}$$

Такая система допускает, например, представляющую определенный интерес интерпретацию условий устойчивости дискретных систем Вольтерра, приведенных в разделе 3.3.1: так как по определяющим свойствам нечеткой меры

$$\alpha_0=\sup_{t\ge 0}\sum_{\tau=0}^{\infty}|a[t;\tau]|=\sup_{t\ge 0}\sum_{\tau=0}^{\infty}|m_t([0,\tau])-m_t([0,\tau-1])|=$$

$$=\sup_{t\ge 0}\sum_{\tau=0}^{t-1}\{m_t([0,\tau])-m_t([0,\tau-1])\}=\sup_{t\ge 0}\{m_t(T)-m_t(\varnothing)\}=1$$

(при естественном соглашении $[0,-1]=\varnothing$), то система является устойчивой, но не асимптотически устойчивой. Ранее уже отмечалось, что в современных приложениях нечетких систем классическое структурное свойство устойчивости является далеко не самым важным.

Сопоставление введенных здесь нечетких систем с системами, рассмотренными в разделе 3.3.2, показывает, что в уравнениях систем Вольтерра-Сугено и Вольтерра-Шоке величины $m_t([0,\tau])$ и $m_t([0,\tau])-m_t([0,\tau-1])$ допускают трактовку как значения функций принадлежности нечетких окрестностей по состояниям: из определяющих свойств нечеткой меры следует, что эти величины принимают значения в промежутке [0,1].

Особого внимания требует предположение о невозрастании состояния введенных здесь систем на промежутке $[0,t-1]$: если не придавать динамического смысла рассмотренным нечетким интегралам, то такое предположение можно считать не слишком обременительным, поскольку, как уже отмечалось, область определения можно соответствующим образом переупорядочить. Однако при динамической трактовке, как тоже отмечалось, оно наделено естественным порядком следования его элементов – моментов времени, так что переупорядочение может затруднить динамическую интерпретацию. Здесь могут оказаться полезными соображения, используемые при исследовании нечетких конечно-аргументных систем [17], когда множество моментов времени формализуется при помощи конечной группы, в которой групповая операция не согласована с естественным временным порядком.

Следует отметить, что нечеткие системы Вольтерра-Сугено и Вольтерра-Маслова не являются линейными в обычном смысле слова, но «линейны» над соответствующими идемпотентными полукольцами, подобно отмеченной выше аддитивности мер. Это является одним из простейших в современной прикладной математике проявлений основной парадигмы идемпотентной математики [70], выражаемой идемпотентным принципом эвристического соответствия между важными, полезными и интересными конструкциями и результатами традиционной математики над числовыми полями и аналогичными конструкциями и результатами над идемпотентными полукольцами и полуполями. Идемпотентная математика, возникающая как двойник или «тень» традиционной, соотносится с последней примерно так же, как классическая физика – с квантовой; переход от традиционной математики к идемпотентной трактуется как «деквантование» или «вторичное деквантование». Во многих отношениях идемпотентная математика проще традиционной; однако переход от традиционных понятий и результатов к их идемпотентным аналогам часто является нетривиальным.

Выше неоднократно упоминалось имя итальянского математика В. Вольтерра (1860-1940 гг.). Оно хорошо известно специалистам не только в фундаментальной математике, но и во многих прикладных областях [15]. В. Вольтерра является одним из создателей математической экологии. Широко известная математическая модель совместного существования двух биологических видов (популяций) – экосистемы «хищник–жертва», называемая моделью Вольтерра-Лотки, заложила фундамент математической теории биологических сообществ [57].

Дискретные аналоги первоначально непрерывных моделей, разрабатывавшихся Вольтерра, с появлением современных информационных технологий находят, подчас неожиданные, приложения в самых разнообразных областях. Ярким примером может служить исследование дискретных моделей Вольтерра-Лотки в связи с проблемами нелинейной динамики, синергетики, фракталов и хаоса [75]. Данная работа служит примером еще одного подтверждения сказанному.

Различные области применения четких дискретных систем Вольтерра указаны в [51,58,64,65]. В частности, в [58] показано, как с их помощью могут моделироваться вычислительные процессы. В этом смысле нечеткие дискретные системы типа Вольтерра могут использоваться как модели «мягких» вычислительных процессов, оперирующих с нечеткими данными, которыми, как сейчас уже хорошо и широко понято, изобилуют техника, технологии, экономика, экология и другие прикладные области.

### *Нечеткие интегральные уравнения*

Ограничимся рассмотрением [19] нелинейного интегрального уравнения Урысона [55]

$$\varphi(x)=\int_D K(x,s,\varphi(s))ds,$$

где множество $D\subset E=R^n$, ядро $K(x,s,u)$ задано на $D\times D\times R$. Искомая функция $\varphi(x)$, вообще говоря, зависит от $D,K;$ для дальнейшего отразим зависимость только от $D:\varphi(x,D)$. Характеристическая функция множества $D\times D$ (где $\chi_{D\times D}(x,s)\equiv 1,(x,s)\in D\times D;\ \chi_{D\times D}(x,s)\equiv 0,(x,s)\in E\times E\setminus D\times D)$ неявно входит в уравнение;ее можно ввести явно, например, так:

$$\varphi(x,D)=\int_D K(x,s,\chi_{D\times D}(x,s),\varphi(s,D))ds\ ,$$

где теперь $K(x,s,u,v)$ задано на $D\times D\times\{1\}\times R$ .

Пусть $F=[0,1]^{D\times D}$ – множество всех нечетких подмножеств А множества $D\times D$ (их функций принадлежности $\mu_A(x,s)\in[0,1],(x,s)\in D\times D,A\in F)$. Пусть для каждого $x\in D$ задано нечеткое множество $A(x)\in F$ (его функция принадлежности $\mu_{A(x)}(x,s))$. Запишем нечеткое нелинейное интегральное уравнение

$$\varphi(x,A(x))=\int_{A(x)}K(x,s,\mu_{A(x)}(x,s),\varphi(s,A(s))ds\ ,$$

где теперь $K(x,s,u,v)$ задано на $D\times D\times[0,1]\times R$. Разложение в интегростепенной ряд (ряд Вольтерра) от функциональных аргументов $\mu,\varphi$ приводит его к уравнению типа Ляпунова-Шмидта, базового для теории ветвления нелинейных интегральных уравнений. Член второй суммарной степени этого ряда определяет нечеткое линейное интегральное уравнение

$$\varphi(x,A(x))=\int_{A(x)}K(x,s)\mu_{A(x)}(x,s),\varphi(s,A(s))ds\ .$$

Представляет интерес и рассмотрение дискретных аналогов введенных нечетких уравнений (четкие аналоги рассмотрены, например, в [65]). Другой подход к учету нечеткости в интегральных уравнениях представлен в [123].

Предложенный в третьей главе подход к учету нечеткости окрестностей по состоянию дискретно-временных систем позволяет расширить класс нечетких систем до более общего класса систем с изменяющейся структурой.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе анализа состояния проблем, связанных с решением задач идентификации и управления дискретными объектами, можно сделать заключение, что для повышения качества управления такими объектами необходима разработка:

- моделей, обобщающих известные и адекватно представляющих сложные распределенные объекты, учитывающих обилие технологических и субъективных факторов;
- методов смешанного управления данными объектами.

Поэтому в монографии представлены следующие результаты:

1. Разработана методология исследования окрестностных линейных и m-линейных динамических систем, основанная на описании с помощью конечных носителей линейной и нелинейной структуры связей системы по состоянию и входу.
2. Разработана методология тензорной линеаризации m-линейных $(n_1+..+n_m)$-аргументных систем.
3. Разработаны алгоритмы параметрической и адаптивной идентификации окрестностных систем по специально сформулированному критерию идентификации.
4. Разработаны методы формирования блочных матриц коэффициентов и векторов свободных членов в соответствии с принятой структурой составных векторов переменных и их разделением на состояния и входы, реализующие предложенный подход в рамках единого алгоритма для задач идентификации и смешанного управления.
5. Разработан единый алгоритм, реализующий блочное рекуррентное псевдообращение разреженных матриц большой размерности.
6. Поставлены задачи управления и оптимального управления для указанного класса окрестностных систем,
7. Разработаны алгоритмы локального и глобального смешанного управления окрестностными линейными и m-линейными системами; при глобальной постановке в каждом из узлов системы полностью задан либо вектор состояния, либо вектор входа, а при локальной задаются часть компонентов векторов состояний или входов в узлах системы; необходимо определить недостающие компоненты векторов состояний и входов;
8. Разработаны основы методологи анализа нечетко-окрестностных линейных и m-линейных систем;

9. Разработаны координатные формы m-линейных окрестностных и нечетко-окрестностных систем;
10. Разработаны алгоритмы параметрической и адаптивной идентификации нечетко-окрестностных систем.

Разработанные методы позволяют синтезировать адекватные объекту сложной структуры модели и эффективные алгоритмы управления ими. Предлагаемые математические модели и методы допускают реализацию в виде комплекса програмных продуктов, которые могут использоваться в качестве функциональных модулей при решении задач исследования, моделирования и управления промышленными объектами. Результаты расчетов для реальных промышленных объектов высокой сложности подтверждают правомерность принципов, положенных в основу разработанных подходов.

Предлагаемые методы могут быть использованы также при моделировании и управлении сложными промышленными объектами, в частности, при управлении крупными предприятиями или подразделениями, сетями компьютеров, телефонными линиями связи и т.п.

Эффект от использования предложенных моделей и методов тем больше, чем сложнее структура связей моделируемого объекта, и, следовательно, сложнее осуществление моделирования и управления традиционными методами.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК


1. **Арбиб, М.** Основания теории систем: разложимые системы [Текст] / М. Арбиб, Э. Мейнс // Математические методы в теории систем. – М. : Мир, 1979. – С. 7–48.
2. **Басакер, Р.** Конечные графы и сети [Текст] / Р. Басакер, Т. Саати. – М. : Наука, 1974. – 366 с.
3. **Блюмин, С. Л.** Гармонический анализ конечных автоматов [Текст] / С. Л. Блюмин // Автоматика и вычислительная техника. – 1973. – № 4. – С. 22–25.
4. **Блюмин, С. Л.** Соотношения типа Кэли-Гамильтона в теории дискретно-аргументных систем [Текст] / С. Л. Блюмин // АиТ. – 1981. – № 9. – С. 133–142.
5. **Блюмин, С. Л.** Дискретность против непрерывности при системном моделировании во времени и/или пространстве [Текст] / С. Л. Блюмин // Системы управления и информационные технологии. – 2004. – № 1 (13). – С. 4–9.
6. **Блюмин, С. Л.** Двумерные преобразования сигналов и анализ двумерных систем [Текст] / С. Л. Блюмин. – Липецк : ЛГТУ, 1991. – 80 с.
7. **Блюмин, С. Л.** Конечные преобразования Фурье и анализ конечных систем [Текст] / С. Л. Блюмин. – Воронеж : ВПИ, 1991. – 79 с.
8. **Блюмин, С. Л.** Анализ и синтез конечных линейных последовательностноклеточных машин [Текст] / С. Л. Блюмин, Р. Г. Фараджев // Автоматика и телемеханика. –1981. – № 6. – С. 57–66.
9. **Блюмин, С. Л.** Линейные клеточные машины: подход пространства состояний (обзор) [Текст] / С. Л. Блюмин, Р. Г. Фараджев // Автоматика и телемеханика. – 1982. – № 2. – С. 125–162.
10. **Блюмин, С. Л.** Многомерные преобразования сигналов и анализ нелинейных систем [Текст] : учеб. пособие / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин. – Липецк : ЛГТУ, 1992. – 79 с.
11. **Блюмин, С. Л.** Уравнения Ляпунова для систем на орграфах [Текст] / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин // Метод функций Ляпунова и его приложения : сб. 4-й Крымской междунар. матем. шк. – Симферополь : СГУ, 1998. – С. 15.
12. **Блюмин, С. Л.** Адаптивная идентификация нелинейных смешанных систем на графах [Текст] / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин // Современные проблемы механики и прикладной математики : тез. докл. школы. – Воронеж : ВГУ, 1998. – С. 47.
13. **Блюмин, С. Л.** От систем на графах к окрестностным системам [Текст] / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин // Математическое моделирование систем. Методы, приложения и средства : тр. конф. – Воронеж : ВГУ, 1998. – С. 33–41.
14. **Блюмин, С. Л.** Оптимальное управление смешанными окрестностными системами [Текст] / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин // Современные методы теории функций и смежные проблемы : Воронежская зимняя матем. шк. – Воронеж : ВГУ, 1999. – С. 42.

15. **Блюмин, С. Л.** Дискретные математические модели Вольтерра в экологии и других областях [Текст] / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин // Экология ЦЧО РФ. – 2003. – № 2 (11). – Липецк : Липецкий эколого-гуманит. институт. – С. 16–18.
16. **Блюмин, С. Л.** Конечные двойные десверточные нечеткие окрестностные системы [Текст] / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин // Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений : тр. конф. – Воронеж : ВГУ, 2003. – С. 57–58.
17. **Блюмин, С. Л.** Нечеткие окрестностные конечные системы [Текст] / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин // Современные методы теории краевых задач : матер. Воронежской весенней матем. шк. «Понтрягинские чтения XIV». – Воронеж : ВГУ, 2003.– С. 26.
18. **Блюмин, С. Л.** Нечеткие окрестностные системы: модельный пример [Текст] / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин // Современные проблемы информатизации в непромышленной сфере и экономике : сб. тр. ; Вып. 8. – Воронеж : ЦЧКИ, 2003. – С. 93–94.
19. **Блюмин, С. Л.** Нечеткие интегральные уравнения: вариант учета нечеткости [Текст] / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин // Воронеж. зимняя матем. шк. – 2004. – Воронеж : ВГУ, 2004. – С. 22–23.
20. **Блюмин, С. Л.** Нечеткие нелинейные дискретные системы Вольтерра [Текст] / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин // Современные проблемы информатизации в системах моделирования, программирования и телекоммуникациях : сб. тр. – Вып. 9. – Воронеж : Научная книга, 2004. – С. 276.
21. **Блюмин, С. Л.** Симметричные, смешанные и билинейные окрестностные модели [Текст] / С. Л. Блюмин, О. А. Шмырина // Сб. научных трудов ЛЭГИ / Липецк. эколого-гуманитарный ин-т. – Липецк : ЛЭГИ, 2002. – С. 44–48.
22. **Блюмин, С. Л.** Идентификация параметров КМНК строительных объектов [Текст] / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин, Д. А. Шмырин // Научно-технические достижения в области дорожных строительных материалов, строительства, реконструкции, содержания автомобильных дорог и искусственных сооружений : тез. докл. науч.-практ. конф. – Липецк : ЛГТУ, 1995. – С. 69–70.
23. **Блюмин, С. Л.** Задача смешанного управления системами на конечных носителях [Текст] / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин, Д. А. Шмырин // Автоматика–96 : тр. 3–й Укр. конф. по автоматич. Управлению. – Севастополь : СГУ ; Украина. Т. 1, 1996. – С. 57–58.
24. **Блюмин, С. Л.** Компьютерные технологии в изучении и применении моделей на конечных носителях [Текст] / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин, Д. А. Шмырин // Педагогические нововведения: технологии, методики, опыт : тез. докл. Всерос. науч.-методич. конф. – Краснодар : КубГТУ, 1996. – С. 45.
25. **Блюмин, С. Л.** Моделирование конструкций системами на конечных носителях [Текст] / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин, Д. А. Шмырин // Моделирование и исследование устойчивости систем : тез. докл. Украинской конф. – Киев : КГУ, 1996. – С. 18.
26. **Блюмин, С. Л.** Сингулярные билинейные модели экологических зависимостей [Текст] / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин, Д. А. Шмырин // Проблемы экологии и

экологической безопасности Центр. Черноземья : тез. докл. регион. науч.-технич. конф. – Липецк : ЛГТУ, 1996. – С. 52.

27. **Блюмин, С. Л.** Смешанное управление неявными системами [Текст] / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин, Д. А. Шмырин // Современные методы в теории краевых задач (Понтрягинские чтения VII) : тез. докл. II Воронеж. весенней матем. Шк. – Воронеж : ВГУ, 1996 .– С. 35.
28. **Блюмин, С. Л.** Операторные методы в математической теории систем [Текст] / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин, Д. А. Шмырин // Конф. по функциональному анализу и уравнениям математ. физики. – Воронеж : ВГУ, 1997. – С. 17.
29. **Блюмин, С.Л.** Алгоритм управления симметричными системами [Текст] / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин, Д. А. Шмырин // Тез. докл. II Республиканской электронной научн. конф. – Воронеж, 1997. – С. 56.
30. **Блюмин, С. Л.** Задача управления смешанными системами [Текст] / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин, Д. А. Шмырин // Современные методы в теории краевых задач (Понтрягинские чтения VIII) : Воронеж. весен. матем. школа.– Воронеж : ВГУ, 1997. – С. 24.
31. **Блюмин, С. Л.** К управлению смешанными системами [Текст] / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин, Д. А. Шмырин // Моделирование и исследование устойчивости систем VIII : тез. докл. Укр. конф. – Киев : КГУ, 1997. – С. 13.
32. **Блюмин, С. Л.** К интерпретации нормальных решений в прикладных обратных задачах [Текст] / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин, Д. А. Шмырин // Современные проблемы механики и прикладной математики : тез. докл. Воронежской школы. – Воронеж : ВГУ, 1998. – С. 46.
33. **Блюмин, С. Л.** Идентификация и управление симметричными и смешанными экологическими системами [Текст] / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин, Д. А. Шмырин // Проблемы безопасности транспортного пространства. – Липецк : ЛГТУ, 1998. – С. 11.
34. **Блюмин, С. Л.** Смешанное управление смешанными системами [Текст] : учебное пособие / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин, Д. А. Шмырин. – Липецк : ЛГТУ, 1998. – 80 с.
35. **Блюмин, С. Л.** Алгоритм параметрической идентификации и управления симметричными системами [Текст] / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин, Д. А. Шмырин // Современные методы в теории краевых задач (Понтрягинские чтения IX) : тез. докл. Воронеж. весен. матем. шк. – Воронеж, 1998. – С. 28.
36. **Блюмин, С. Л.** Новое направление в моделировании систем: окрестностные модели [Текст] / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин, Д. А. Шмырин // Программное обеспечение автоматизированных систем управления : междунар. науч.-техн. конф. – Липецк : ЛГТУ, 2000. – С. 15–19.
37. **Блюмин, С. Л.** Алгоритмы смешанного управления симметричными системами [Текст] / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин, Д. А. Шмырин // Современные сложные системы управления : междунар. науч.-техн. конф. – Липецк : ЛГТУ, 2002. – С. 23–26.
38. **Блюмин, С. Л.** Алгоритм преобразования билинейных окрестностных систем в линейные двухаргументные [Текст] : в 2 ч. / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин,

О. А. Шмырина // Прогрессивные технологии и оборудование в машиностроении и металлургии : сб. матер. Всерос. науч.-техн. конф., посвящ. 40-летию ЛГТУ. Ч. 2. – Липецк : ЛГТУ, 2002. – С. 17–21.

39. **Блюмин, С. Л.** Алгоритмы преобразования m–линейных окрестностных систем в линейные ($n_1$ + … +$n_m$)-аргументные системы [Текст] / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин, О. А. Шмырина // Электротехнические комплексы и системы управления : сб. науч. тр. – Воронеж : ВГТУ, 2002. – С. 81–86.

40. **Блюмин, С. Л.** Алгоритмы преобразования m–линейных одноаргументных и билинейных двухаргументных окрестностных систем в линейные [Текст] / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин, О. А. Шмырина // Информационные технологии в процессе подготовки современного специалиста : Межвузовский сб. Вып. 5. – Липецк : ЛГПУ, 2002. – С. 5–7.

41. **Блюмин, С. Л.** Многоразмерностные окрестностные системы в экологии [Текст] / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин, О. А. Шмырина // Вестник ЛГТУ–ЛЭГИ. – 2002. – № 1(9). – Липецк : ЛЭГИ. – С. 40–44.

42. **Блюмин, С. Л.** Преобразование билинейных одноаргументных нестационарных систем в линейные двухаргументные неоднородные системы [Текст] / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин, О. А. Шмырина // Современные сложные системы управления : Междунар. науч.-техн. конф. – Липецк : ЛГТУ, 2002. – С. 27–30.

43. **Блюмин, С. Л.** Трехлинейные модели: расширение класса билинейных моделей [Текст] / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин, О. А. Шмырина // Экология ЦЧО РФ. – 2002. – № 2. – Липецк : ЛЭГИ. – С. 104–105.

44. **Блюмин, С. Л.** Матричные симметричные нечеткие окрестностные системы [Текст] / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин, О. А. Шмырина // Сб. науч. тр. преподавателей и сотрудников, посвящ. 30-летию науч.-исслед. сектора Липецкого гос. техн. университета. Ч. 1. – Липецк : ЛГТУ, 2003. – С. 21–23.

45. **Блюмин, С. Л.** О симметричных нечетких окрестностных матричных системах [Текст] / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин, О. А. Шмырина // Вестник Тамбовского университета. – 2003. – Т. 8. – Вып. 3. – С. 348–349.

46. **Блюмин, С. Л.** Связь классов m–линейных $n_i$ аргументных систем с классами линейных неоднородных ($n_1$+…+$n_m$)-аргументных систем [Текст] / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин, О. А. Шмырина // Идентификация систем и задачи управления: междунар. конф. SICPRO–032. – № 20–5. – М. : ИПУ, 2003. – 11 с.

47. **Блюмин, С. Л.** Нелинейные нечетко–окрестностные системы [Текст] / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин, О. А. Шмырина // Идентификация систем и задачи управления : 3-я Междун. конф. SICPRO–04. – № 16–5. – М. : ИПУ, 2004. – 10 с.

48. **Блюмин, С. Л.** Модели и методы принятия решений в условиях неопределенности [Текст] : уч. пособие / С. Л. Блюмин, И. А. Шуйкова. – Липецк : ЛЭГИ, 2001. – 139 с.

49. **Блюмин, С. Л.** Нечеткая логика: алгебраические основы и приложения [Текст] / С. Л. Блюмин, И. А. Шуйкова, П. В. Сараев, И. В. Черпаков. – Липецк : ЛЭГИ, 2002. – 111 с.

50. **Болтянский, В. Г.** Математические методы оптимального управления [Текст] / В. Г. Болтянский. – М. : Наука, 1968. – 408 с.
51. **Борухов, В. Т.** Вложимость нелинейных дискретных уравнений с изменяющейся структурой в линейные системы [Текст] / В. Т. Борухов, И. В. Гайшун // Дифференциальные уравнения. – 1999. – Т. 35. – № 9. – С. 1207–1215.
52. **Бояринцев, Ю. Е.** Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / Ю. Е. Бояринцев. – Новосибирск : Наука, 1980. – 150 с.
53. **Бурбаки, Н.** Алгебра [Текст] / Н. Бурбаки. – М. : Наука, 1966. – 555 с.
54. **Бурбаки, Н.** Теория множеств [Текст] / Н. Бурбаки. – М. : Мир, 1965. – 455 с.
55. **Вайнберг, М. М.** Теория ветвления решений нелинейных уравнений [Текст] / М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. – М. : Наука, 1969. – 528 с.
56. **Ванечек, А.** Модели: эквивалентность, применения, обобщения [Текст] / А. Ванечек // Современные методы идентификации систем. – М. : Мир, 1983. – С. 11–73.
57. **Вольтера, В.** Математическая теория борьбы за существование [Текст] / А. Ванечек. – М. : Наука, 1976. – 345 с.
58. **Гайшун, И. В.** Дискретные уравнения с изменяющейся структурой и устойчивость их решений [Текст] / И. В. Гайшун // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33. – № 12. – С. 1607–1614.
59. **Гантмахер, Ф. Р.** Теория матриц. [Текст] / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1988. – 548 с
60. **Гроп, Д.** Методы идентификации систем [Текст] / Д. Гроп. – М. : Мир, 1979. – 302 с.
61. **Дейч, А. М.** Методы идентификации динамических объектов [Текст] / А.М. Дейч. – М. : Энергия, 1979. – 240 с.
62. **Пайтген, Х.–О.** Дискретная система Вольтерра–Лотки [Текст] / Х.–О. Пайтген, П.Х. Рихтер // В кн. : Красота фракталов. – М. : Мир, 1993. – С. 107–109.
63. **Калман, Р.** Очерки по математической теории систем [Текст] / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб. – М. : Мир, 1971.
64. **Колмановский, В. Б.** О применении второго метода Ляпунова к разностным уравнениям Вольтерра [Текст] / В. Б. Колмановский // АиТ. – 1995. – № 11. – С. 50–64.
65. **Колмановский, В. Б.** Об устойчивости некоторых дискретных процессов Вольтера [Текст] / В. Б. Колмановский, А. М. Родионов // АиТ. – 1995. – № 2. – С. 3–13.
66. **Колмогоров, А. Н.** Комбинаторные основания теории информации [Текст] / А. Н. Колмогоров // Успехи математических наук. – Т. 38. – 1983. – № 4. – С. 2736.
67. **Кон, П.** Универсальная алгебра [Текст] / П. Кон. – М. : Мир, 1968. – 351 с.
68. **Корчагин, В. А.** Симметричные модели транспортных систем [Текст] / В. А. Корчагин, А. М. Шмырин., С. Е. Казьмин // Современные сложные сис-

темы управления : междунар. науч.-техн. конф. – Липецк : ЛГТУ, 2002. – С. 81–83.

69. **Ленг, С.** Алгебра [Текст] / С. Ленг. – М. : Мир, 1968. – 564 с.
70. **Литвинов, Г. Л.** Идемпотентная математика [Текст] / Г. Л. Литвинов, В. П. Маслов //Современный анализ и его приложения : докл. Воронеж. зимн. матем. школы. – Воронеж : ВГУ, 2000. – С. 20–21.
71. **Литвинов, Г. Л.** Идемпотентная математика и интервальный анализ. Препринт. [Текст] / Г. Л. Литвинов, В. П. Маслов, А. Н. Соболевский. – М. : Междунар. центр «Софус Ли», 1999. – 28 с.
72. **Месарович, М.** Общая теория систем: математические основы [Текст] / М. Месарович, Я. Такахара. – М. : Мир, 1978. – 312 с.
73. **Моисеев, Н. Н.** Человек. Среда. Общество [Текст] / Н.Н. Моисеев. – М. : Наука, 1982. – 240 с.
74. **Норри, Д.** Введение в метод конечных элементов [Текст] / Д. Норри, Ж. Фриз. – М. : Мир, 1981. – 304 с.
75. **Пайтген, Х.–О.** Красота фракталов [Текст] / Х.–О. Пайтген, П.Х. Рихтер. – М. : Мир, 1993. – 176 с.
76. **Первозванский, А.А.** Курс теории автоматического управления [Текст] : уч. пособие / А. А. Первозванский. – М. : Наука, 1986. – 616 с.
77. **Престон, К.** Гиббсовские состояния на счетных множествах [Текст] / К. Престон. – М. : Мир, 1977. – 126 с.
78. **Пупков, К. А.** Функциональные ряды в теории нелинейных систем [Текст] / К. А. Пупков, В. И. Капалин, А.С. Ющенко. – М. : Наука, 1976. – 446 с.
79. **Рубан, А. И.** Идентификация одного класса стохастических нелинейных дискретных объектов [Текст] / А. И. Рубан // Автоматика и вычислительная техника. – 1973. – № 3.– С. 64–70.
80. **Эльвик, Рунэ.** Справочник по безопасности дорожного движения [Текст ; пер. с норв.] / Рунэ Эльвик, Аннэ Боргер Мюсен, Трюле Воо ; под ред. проф. В. В. Сильянова. – М : МАДИ(ГТУ), 2001. – 754 с.
81. **Справочник по теории автоматического управления** [Текст] / под ред. А. А. Красовского. – М. : Наука ; Гл. ред. физ.мат. лит., 1987. – 712 с.
82. **Ставская, О. Н.** Достаточные условия единственности случайного поля и оценки для корреляций [Текст] / О. Н. Ставская // Математические заметки. – Т. 18. – 1975. – № 4. – С. 609–620.
83. **Трахтенброт, Б. А.** Конечные автоматы (поведение и синтез) [Текст] / Б. А. Трахтенброт, Я. М. Барздинь. – М. : Наука, 1970. – 400 с.
84. **Царенко, М. С.** Основы теории категорий [Текст] / М. С. Цаленко, Б. Г. Шульгейфер. – М. : Наука, 1974. – 129 с.
85. **Цыпкин, Я. З.** Основы информационной теории идентификации [Текст] / Я. З. Цыпкин. – М. : Наука, 1984. – 320 с.
86. **Шмырин, А. М.** Идентификация стохастического дискретного нечетко-окрестностного объекта [Текст] / А. М. Шмырин // Современные сложные системы

управления : тез. докл. междунар. конф. – Т. 2. – Воронеж : ВГАСУ, 2003. – С. 357–358.

87. **Шмырин, А. М.** Нечетко-окрестностные нелинейные системы в координатной форме [Текст] / А. М. Шмырин // Современные проблемы математики, механики, информатики : тез. докл. междунар. конф. – Тула : Изд-во ТулГУ, 2003. – С. 346–347.
88. **Шмырин, А. М.** Дискретные нечетко–окрестностные системы [Текст] / А. М. Шмырин // Датчики и системы. – 2004. – № 1(56). – С. 18–20.
89. **Шмырин, Д. А.** Дискретное моделирование и смешанное управление системами на конечных носителях [Текст] / Д. А. Шмырин // Тез. докл. Всерос. науч.-техн. конф., посвященной 40-летию Липецкого. гос. тех. университета. – Липецк : ЛГТУ, 1996. – С. 423–424.
90. **Шмырин, Д. А.** Подход к управлению смешанными системами [Текст] / Д. А. Шмырин // Математическое и информационное обеспечение автоматизированных систем : сб. науч. тр. – Липецк : ЛГТУ, 1997. – С. 30–31.
91. **Шмырин, Д. А.** Оптимальное смешанное управление и экологическая безопасность [Текст] / Д.А. Шмырин, С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин, В. А. Пименов // Проблемы экологии и экологической безопасности : сб. науч. статей молодых ученых. – Липецк : ЛГТУ , 1998. – С. 46–50.
92. **Шмырина, О. А.** Смешанное управление с экономическим критерием и экологическая безопасность окружающей среды [Текст] / О. А. Шмырина // Наша общая окружающая среда : сб. тез. докл. II науч.-практ. конф. молодых ученых, аспирантов и студентов / Липецкий эколого-гуманитарный ин-т. – Липецк : ЛЭГИ, 2001. – С. 62–63.
93. **Шмырина, О. А.** Билинейные модели очистки сточных вод [Текст] / О. А. Шмырина // Наша общая окружающая среда : сб. тез. докл. III науч.-практ. конф. молодых учёных, аспирантов и студентов г. Липецка / Липецкий эколого-гуманитарный ин-т. – Липецк : ЛЭГИ, 2002. – С. 10–11.
94. **Шмырина, О. А.** Алгоритм идентификации нелинейных окрестностных дискретных систем [Текст] / О. А. Шмырина // Наша общая окружающая среда : сб. тез. докл. IV науч.-практ. конф. молодых учёных, аспирантов и студентов г. Липецка / Липецкий эколого-гуманитарный ин-т. – Липецк : ЛЭГИ, 2003. – С. 45–46.
95. **Шмырина, О. А.** Координатная форма билинейной окрестностной модели [Текст] / О. А. Шмырина // Экология ЦЧО РФ. – 2003. – № 2(11). – Липецк : ЛЭГИ. – С. 19–25.
96. **Шмырина, О. А.** Идентификация билинейных окрестностных систем [Текст] / О. А. Шмырина // Вестник ЛГТУ–ЛЭГИ. – 2003. – № 1(11). – Липецк : ЛЭГИ. – С. 32–39.
97. **Шмырин, А. М.** Исследование влияния сточных вод на эвтрофирование водоёмов [Текст] / А. М. Шмырин, Е. В. Григорьева, О. А. Шмырина, Е. Ю. Григорьева // Экология Центрально–Чернозёмной области РФ. – 2002. – № 1. – Липецк : ЛЭГИ. – С. 26–28.

98. **Шмырин, А. М.** Модели биологической очистки сточных вод с учётом энергозатрат [Текст] / А. М. Шмырин, Е. В. Григорьева, О. А. Шмырина, Е. Ю. Григорьева // Водохозяйственный комплекс и экология гидросферы в регионах России : сб. матер. V междунар. науч.-практ. конф. – Пенза : Изд-во МНИЦ ПГСХА, 2002. – С. 155–156.
99. **Шмырин, А. М.** Симметричные и билинейные модели цеха очистки сточных вод [Текст] / А. М. Шмырин, Е. В. Григорьева, О. А. Шмырина, Е. Ю. Григорьева // Вопросы практической экологии : сб. матер. Всерос. науч.-практ. конф. – Пенза : Изд–во МНИЦ ПГСХА, 2002. – С. 234–235.
100. **Шмырин, А. М.** Смешанное управление нелинейными системами и экологическая безопасность [Текст] / А. М. Шмырин, О. А. Шмырина // Экология ЦЧО РФ. – 2001. – № 2. – Липецк : ЛЭГИ. – С. 153–154.
101. **Шмырин, А. М.** Компьютерное моделирование как метод изучения нелинейных смешанных систем [Текст] / А. М. Шмырин, О. А. Шмырина // Материалы Всерос. науч.-метод. конф. – Липецк : ЛГТУ, 2002. – С. 139–140.
102. **Шмырин, А. М.** Билинейные окрестностные системы [Текст] / А. М. Шмырин, О. А. Шмырина // Современные проблемы информатизации в технике и технологиях : сб. трудов (по итогам VII междунар. открытой науч. конф.) ; выпуск 7. – Воронеж : Центр.-черноземное кн. издательство, 2002. – С. 71–72.
103. **Шмырин, А. М.** Решение обратных задач для m–линейных окрестностных систем [Текст] / А. М. Шмырин, О. А. Шмырина // Новые технологии в научных исследованиях, проектировании, управлении, производстве : тр. регион. науч.-техн. конф. – Воронеж : ВГТУ, 2002. – С. 11–12.
104. **Aplevich, J. D.** TimeDomain InputOutput Representations of Linear Systems [Текст] / J. D. Aplevich // Automatica. – т. 1981. – Vol. 17. – № 3. – P. 509-522.
105. **Arbib, M.** Machines in a category an expository introduction [Текст] / M. Arbib, E. Manes // SIAM Rev. – 1974. – V.16. – № 2. – P. 163–192.
106. **Bluymin, S. L.** Nonlinear neighborhood models [Текст] / S. L. Bluymin, A. M. Shmyrin // Нелинейное моделирование и управление : матер. междунар. семинара. – Самара, Самарский госуниверситет, 2000. – С. 17–18.
107. **Blyumin, S.** Ceneralized argument–alphabet signal processing [Текст] / S. Blyumin // Proc. 3rd Int. Conf. On Signal Processing. – Beijing, China, 1996. – P. 753–756.
108. **Blyumin, S.** One–sided complements and solutions of the equation aXb=c in semirings [Текст] / S. Blyumin, J. Golan // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. – 2002. – Vol. 29. – № 8. – P. 453–458.
109. **Bondia, J.** Analysis of linear systems with fuzzy parametric uncertainty [Текст] / J. Bondia, J. Pico // Fuzzy Sets and Systems. – 2003. – Vol. 135. – № 1. – P. 81–121.
110. **Calvo, T.** Double aggregation operators [Текст] / T. Calvo, A. Pradera // Fuzzy Sets and Systems. – 2004. – Vol. 142. – № 1. – P. 15–33.
111. Category Theory Applied to Computation and Control [Текст] / Ed. E. Manes. – Berlin : Springer, 1975. – 273 p.
112. **Cignoli, R.** Extending Stone duality to multisets and locally finite MV–algebras [Текст] / R. Cignoli, E. Dubuc, D. Mundici // Journal of Pure and Applied Algebra. – 2004. – Vol. 189. – № 1–3. – P. 37–59.

113. **Fernandez, F.** A Takagi–Sugeno model with fuzzy inputs viewed from multidimensional interval analysis [Текст] / F. Fernandez, J. Gutierrez // Fuzzy Sets and Systems. – 2003. – Vol. 135. – № 1. – P. 39–61.

114. **Grabisch, M.** Fuzzy Measures and Integrals – Theory and Applications. [Текст] / M. Grabisch, M. Murofushi, M. Sugeno // Studies in Fuzziness and Soft Compuing. – Vol. 40. – Heidelberg : Springer–Verlag, 2000. – 543 p.

115. **Hallum, C. R.** Computational aspects of matrix generalized inversion for the computer with applications [Текст] / C. R. Hallum, M. D. Pore // Comp. & Math. With Appls. – 1974. – Vol. 1. – P. 145–150.

116. **Janicke, O.** Konzeption eines reelwertigen sequentiellen Automaten über die Walsh–Transformation [Текст] / O. Janicke // Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden. – 1980. – B. 29. – № 1. – S. 221–226.

117. **Kaczorek, T.** Singular general model of 2–D systems and Its solution [Текст] / T. Kaczorek // Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences. – 1988. – Vol. 36. – № 5–6.

118. **Kamen, E.** On the relationship between bilinear maps and linear 2D maps [Текст] / E. Kamen // Nonlin. Anal., Theor., Meth. & Appl. – 1979. – Vol. 3. – № 4. – P. 467–481.

119. **Klement, E.** Measure–based aggregation operators [Текст] / E. Klement, R. Mesiar, E. Pap // Fuzzy Sets and Systems. – 2004. – Vol. 142. – № 1. – P. 3–14.

120. **Lin, J.Y.** Mathematical Control Theory of Singular Systems [Текст] / J.Y. Lin, Z.H. Yang // IMA Journal of Mathematical Control & Information. – 1989. – № 6. – P. 189–198.

121. **Ovchinnikov, S.** Piecewise linear aggregation functions [Текст] / S. Ovchinnikov // Int. J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge–Based Systems. – 2000. – Vol. 1. – № 1. – P. 11–22.

122. **Seselja, B.** Completion of ordered structures by cuts of fuzzy sets: an overview [Текст] / B. Seselja, A. Tepavcevic // Fuzzy Sets and Systems. – 2003. – No. 136. – P. 1–19.

123. **Wu, C.** On the Basic Solutions to the Generalized Fuzzy Integral Equations [Текст] / C. Wu, S. Song, H. Wang // Fuzzy Set and Systems. – 1998. – V. 95. – № 2. – P. 255–260.

124. **Yager, R.** Criteria aggregations functions using fuzzy measures and the Choquet integral [Текст] / R. Yager // Int. J. of Fuzzy Systems. – 1999. – Vol. 1. – № 2. – P. 96–112.

125. **Zadeh, L.A.** From Circuit Theory to System Theory [Текст] / L.A. Zadeh // Proc IRE, 50. – 1962. – P. 856–865.

# Оглавление

ББК 22.18
УДК 519.854
Б712

**Блюмин, С.Л.** Окрестностные системы [Текст]: монография / С.Л. Блюмин, А.М. Шмырин. – Липецк: Липецкий эколого-гуманитарный институт, 2005. – 132 с.; 21 см. – Библиограф.: с. 121-129. – 150 экз. ISBN 5-900037-45-2.

Компьютерная верстка Ковешниковой И.Ф.
Техническое редактирование Правильниковой Н.С.

Подписано в печать 21.02.2005 г. Формат 60x84x16. Заказ № 854.
Бумага 55-60 г/м. Усл. печ. листов 8,25. Тираж 150 экз. Цена свободная.
Липецкий эколого-гуманитарный институт
398600, г. Липецк, ул. Интернациональная, 5 а

Рис. 2.1.Граф листопрокатного производства