УДК 512.8

ИССЛЕДОВАНИЕ И РЕШЕНИЕ ДВУСТОРОННИХ УРАВНЕНИЙ В БИГРУППОИДАХ БЕЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЗАКОНОВ ОПЕРАЦИЙ

С.Л. Блюмин

Липецкий государственный технический университет

В [1] рассмотрено исследование и решение односторонних уравнений в группоиде $\Gamma=<S,->$ вида $a-x=b$, $x-a=b$ и поставлена задача исследования и решения двусторонних уравнений в бигруппоиде $B\Gamma=<S,-,\mathbf{w}>$ вида $(a-x)\mathbf{w}b=c$, $a-(x\mathbf{w}b)=c$ без использования законов операций (в данной работе используются обозначения операций, отличные от использованных в [1]). Постановка таких задач мотивируется тем, что во многих современных приложениях, например (и особенно), в проблемах искусственного интеллекта, привычные законы операций нарушаются или видоизменяются; поэтому представляет как научный, так и методический интерес рассмотреть возможности исследования и решения простейших уравнений без использования каких бы то ни было законов операций. В данной работе эти возможности исследуются для двусторонних уравнений. Предварительно, для удобства и замкнутости изложения, приводятся некоторые результаты из [1], причем ряд из них – в более подробном представлении, ориентированном на дальнейшее использование в данной работе.

Пусть $\Gamma=\Gamma_{-}=<S,->$ - *основной группоид*, то есть множество S с заданной *основной* бинарной операцией $-$ над его элементами, для которой *не предполагается* выполнение каких-либо *законов* как *общих* свойств, справедливых для всех элементов, – ассоциативности, коммутативности, нейтрального, симметричных элементов.

Простейшее левостороннее «линейное неоднородное» уравнение в Г записывается в виде

$a – x = b,\ a,b,x \in \Gamma$,

где a – *коэффициент*, на который неизвестное x умножается слева, b – *правая часть*. Следует отметить, что название «линейное неоднородное» мотивируется чисто внешним сходством с «обычными» уравнениями, является весьма условным, зависит от характера операции –; кроме того, без предположения о наличии «нуля» в Г неочевидными являются понятия «*однородного*» и «*соответствующего однородного*» уравнения (см. [1]).

Без использования *общих* свойств операции, а также *индивидуальных* свойств коэффициента a, например, его идемпотентности, симметризуемости, регулярности (обобщенной симметризуемости, включающей два предыдущих свойства), для исследования и получения *частного* решения уравнения к коэффициенту a следует предъявить *индивидуально-общее* требование, связывающее его с *сопровождающим относительно операции* – элементом a^- и произвольными элементами $s \in S$ группоида (здесь и далее используются кванторы ∇ «для данного», $\forall$ «для любого», $\exists$ «существует»):

$0^-\ (\nabla a)(\exists a^-)(\forall s)$

$\{a – (a^- – (a – s)) = a – s\}$.

Пусть уравнение разрешимо, $(\exists x_0)\{a – x_0 = b\}$; применение требования 0^- с $s = x_0$ дает

$b = a – x_0 = a – (a^- – (a – x_0)) = a – (a^- – b)$,

что является *необходимым* условием разрешимости уравнения, накладываемым на коэффициент a и правую часть b; это условие и *достаточно*, то есть является *критерием* разрешимости данного уравнения, так как указывает вычисленное по элементам a^- и b его *частное* решение:

$x^* = a^- – b$.

Для получения *общего* решения следует предъявить требование о наличии над элементами множества S *сопровождающей* основную бинарной операции $\check{\mathbf{z}}$, то есть «выйти» в *сопровождающий бигруппоид* $B\Gamma_{–,\check{\mathbf{z}}} = \langle S, –, \check{\mathbf{z}} \rangle$, и *индивидуально-общие* требования, связывающие элементы a, a^{-} с *сопровождающим относительно операции* $\check{\mathbf{z}}$ элементом $a^{\check{z}}$ и произвольными элементами t, s этого бигруппоида:

1^{-} $(\nabla a)(\nabla a^{-})(\exists a^{\check{z}})(\forall s)$

$\{(a^{-}-(a-s))\,\check{\mathbf{z}}\,(a^{\check{z}}-s)=s\}$,

2^{-} $(\nabla a)(\exists a^{\check{z}})(\forall t, s)$

$\{a-(t\,\check{\mathbf{z}}\,(a^{\check{z}}-s))=a-t)\}$;

следует отметить, что применение $a-$ к обеим частям требования 1^{-} и использование требования 2^{-} с $t= =a^{-}-(a-s)$ дает требование 0^{-}.

Общее решение данного уравнения при выполнении этих требований может быть записано в виде:

$x=x(f)=(a^{-}-b)\,\check{\mathbf{z}}\,(a^{\check{z}}-f),\ f\in S$,

где f – произвольный элемент сопровождающего бигруппоида $B\Gamma_{-,\check{z}}$. Действительно:

- это – решение, так как в силу 2^{-} с $t=a^{-}-b$ и s=f, а также в силу критерия

$a-((a^{-}-b)\,\check{\mathbf{z}}\,(a^{\check{z}}-f))=a-(a^{-}-b)=b$;

- любое решение x_{*}, $a-x_{*}=b$, может быть получено из общего выбором, например, $f=x_{*}$, так как в силу 1^{-} с $s=x_{*}$

$x(x_{*})=(a^{-}-(a-x_{*}))\,\check{\mathbf{z}}\,(a^{\check{z}}-x_{*})=x_{*}$.

Простейшее правостороннее «линейное неоднородное» уравнение в Γ записывается в виде

$x-a=b,\ \ a,b,x\in\Gamma$,

где a – коэффициент, на который неизвестное x умножается справа, b – правая часть. Для дальнейшего удобно операцию в этом случае обозначить иначе, например $\circledR$, то есть вести рассмотрение в *основном группоиде* $\Gamma_{\circledR}=\langle S, \circledR\rangle$:

$x\circledR a=b,\ \ a,b,x\in\Gamma_{\circledR}$.

Требование

${}^{\circledR}0$ $(\nabla a)(\exists{}^{\circledR}a)(\forall s)$

$\{((s\circledR a)\circledR{}^{\circledR}a)\circledR a=s\circledR a\}$, аналогично вышеизложенному, приводит к *критерию* разрешимости

$(b®^{®}a)®a=b$

и *частному* решению

$x^{*}=b®^{®}a.$

Требования

$^{®}1\ (\nabla a)(\nabla^{®}a)(\exists^{²}a)(\forall s)$

$\{(s®^{²}a)\ ²\ ((s®a)®^{®}a)=s\},$

$^{®}2\ (\nabla a)(\exists^{²}a)(\forall t,s)$

$\{((s®^{²}a)\ ²\ t)®a=t®a\}$

приводят к возможности записи *общего* решения в виде

$x=x(k)=(k®^{²}a)\ ²\ (b®^{®}a),\ k\in S,$

где k – произвольный элемент *сопровождающего бигруппоида* $ВГ_{®,²}=$ $<S,®,\ ²>$. Действительно:

- это – решение, так как в силу $^{®}2$ с s=k и $t=(b®^{®}a)$, а также критерия

$((k®^{²}a)\ ²\ (b®^{®}a))®a=(b®^{®}a)®a=b;$

- любое решение x_{*}, $x_{*}®a=b$, может быть получено из общего выбором, например, $k=x_{*}$, так как в силу $^{®}1$ с $s=x_{*}$

$x(x_{*})=(x_{*}®^{²}a)\ ²\ ((x_{*}®a)\ ®^{®}a)=x_{*}.$

Двустороннее «линейное неоднородное» уравнение в *основном* бигруппоиде $ВГ=ВГ_{–,®}=<S,\ –,\ ®>$ записывается в виде

$(a–x)®b=c,\quad a,\ b,\ c,\ x\in ВГ.$

Оно расщепляется на два уравнения: правостороннее $y®b=c$ и левостороннее $a–x=y$. В соответствии с вышеизложенным критерий разрешимости первого уравнения $(c®^{®}b)®b=c$, его общее решение $y=y(k)=(k®^{²}b)\ ²\ (c®^{®}b),\ k\in S$; именно при такой правой части должно решаться второе уравнение, записываемое в *сопровождающем тригруппоиде* $ТГ_{–,®,²}=<S,\ –,®,\ ²>$:

$a–x=(k®^{²}b)\ ²\ (c®^{®}b).$

Из критерия его разрешимости

$a–(a^{–}–((k®^{²}b)\ ²\ (c®^{®}b)))=$

=(k®²b) ² (c®®b)

следует

(a–(aˉ–((k®²b) ² (c®®b))))®b=

=((k®²b) ² (c®®b))®b=c,

что, вообще говоря, может выполняться не при всех k ∈ S; пусть K ⊆ S – множество тех k, для которых это соотношение выполняется и является тем самым *критерием* разрешимости уравнения (a–x)®b=c, так как дает *семейство* его *частных* решений x*(k)=aˉ–((k®²b) ² (c®®b)); *общее* же его решение может быть записано в *сопровождающем тетрагруппоиде* ТГ=<S, –, ®, ž, ²> в виде

x=x(k,g)=

=(aˉ–((k®²b) ² (c®®b))) ž (až–g),

k ∈ K, g ∈ S.

Действительно:

- это – решение, так как в силу примененного к квадратным скобкам требования 2ˉ с t= =aˉ–((k®²b) ² (c®®b)) и s=g , а также в силу последнего критерия

(a–x)®b=

=[a–((aˉ–((k®²b) ² (c®®b))) ž

ž (až–g))]®b=

=(a–(aˉ–((k®²b) ² (c®®b))))®b=c;

- любое решение x*, (a–x*)®b=c, может быть получено из общего выбором, например, k=a–x*, g=x*, так как в силу примененного к квадратным скобкам требования ®1 с s=a–x*, а затем требования 1ˉ с s=x*

x(a–x*,x*)=

=(aˉ–[((a–x*)®²b) ² (((a–x*)®b)®

®®b)]) ž (až–x*)=

=(aˉ–(a–x*)) ž (až–x*)=x*.

Аналогичным образом могут быть рассмотрены двустороннее «линейное неоднородное» уравнение a–(x®b)=c, получаемые из него и предыдущего перестановкой операций уравнения a®(x–b)=c, (a®x)–b=c и получаемые при совпадении операций уравнения (a–x)–b=c, a–(x–b)=c.

Для дальнейшего целесообразно привести параллельно результаты для последней пары уравнений

(a–x)–b=c и a–(x–b)=c,

исходно записываемых в основном группоиде Г_, с учетом того, что при совпадении основных операций – и ® сопровождающие операции ž и ² и сопровождающие элементы až и ²a, вообще говоря, могут различаться, что ниже отражено в обозначении **œ** вместо ², так что вместо сопровождающих бигруппоида <S,®, ± >, тригруппоидов <S,–,®, ² > и <S,–, ž ,®>, тетрагруппоида <S, –, ®, ž, ² > используются соответственно сопровождающие бигруппоиды <S, –, œ> , <S, –,œ> и <S, –, ž >, тригруппоид <S, –, ž , œ>.

Критерии разрешимости уравнений данной пары, соответственно:

(a–a⁻–((k–ᶜᵉb)œ(c–⁻b))))–b=c,

k ∈ K,

a–((((a⁻–c) ž (až–f))–⁻b)–b)=c,

f ∈ F.

Общие их решения записываются в двух альтернативных формах, соответственно:

x=x(k,g)=

=(a⁻–((k–ᶜᵉb)œ(c–⁻b))) ž (až–g),

k ∈ K, g ∈ S,

x=x(f,l)=

=(l–ᶜᵉb)œ(((a⁻–c) ž (až–f))–⁻b),

f ∈ F, l ∈ S.

Таким образом, исследование и решение рассмотренных уравнений выполнено полностью в основных и сопровождающих группоидах, бигруппоидах, тригруппоидах и тетрагруппоидах без использования законов операций как общих свойств, выполняющихся для всех элементов.

Пример 1. Пусть основной группоид Г задан таблицей Кэли

–	p	q	r
p	q	p	r
q	p	q	p
r	q	r	r

В нем, вообще говоря, не выполняются законы ассоциативности (например, (p–q)–r=p–r=r≠q=p–p=p–(q–r)), коммутативности (например, p–r=r≠q=r–p), нейтрального элемента (например, p–x≠x для x=p, q–x≠x для x=r, r–x≠x для x=p; в то же время x–q=x для всех x ∈ {p,q,r}).

Рассматривается двустороннее «линейное неоднородное» уравнение

(r–x)–p=q.

Для правостороннего уравнения y–p=q коэффициент p имеет сопровождающий элемент ¯p=p относительно операции –, так как выполнено требование ®0 (с заменой ® на –):

(∀s){((s–p)–p)–p=

=(((p,q,r)–p)–p)–p=

=((q,p,q)–p)–p=(p,q,p)–p=

=(q,p,q)=s–p};

критерий разрешимости (q–p)–p=p–p=q выполняется; частным решением является y^*=q–p=p.

Относительно сопровождающей операции

œ	p	q	r
p	p	q	r
q	p	q	p
r	r	q	p

(которая не дистрибутивна относительно –, p–(q**œ**r)=p–p=q≠r=p**œ**r=(p–q)**œ**(p–r
)) коэффициент p имеет сопровождающий элемент **œ**p=q, так как выполнены требования ®1, ®2 (с соответствующим образом измененными обозначениями):

(∀s){(s–q)**œ**((s–p)–p)=

=((p,q,r) –q) **œ**(p,q,p)=

=(p,q,r)**œ**(p,q,p)=(p,q,r)=s};

(∀s, t=p){((s–q)**œ**p)–p=

=((p,q,r)**œ**p)–p=(p,p,r)–p=

=(q,q,q)==q=p–p};

(∀s, t=q){((s–q)**œ**q)–p=

=((p,q,r)**œ**q)–p=(q,q,q)–p=

=(p,p,p)=p=q–p};

(∀s, t=r){((s–q)**œ**r)–p=

=((p,q,r)**œ**r)–p=(r,p,p)–p=

=(q,q,q)=q=r–p};

общее решение записывается в виде, при любом k ∈{p,q,r},

y=y(k)=(k–q)**œ**(q–p)=

=(p,q,r)**œ**p=(p,p,r)={p,r},

что подтверждается непосредственно таблицей Кэли основной операции **–**.

Для левостороннего уравнения r–x=y коэффициент r имеет сопровождающий элемент r^-=p относительно операции **–**, так как выполнено требование 0^-:

(∀s){r–(p–(r–s))=

=r–(p–(r–(p,q,r)))=

=r–(p–(q,r,r))= r–(p,r,r)=

=(q,r,r)= r–s};

для y=p критерий разрешимости r–(p–p)= r–q=r≠p не выполняется; для y=r критерий r–(p–r)=r–r=r выполняется, так что K={r}; частным решением является x^*(r)=p–r=r. Выполняется и критерий разрешимости двустороннего уравнения

(r–(p–((r–q)**œ**(q–p))))–p=

=(r–(p–(r**œ**p)))–p=(r–(p–r))–p=

=(r–r)–p=r–p=q;

семейство его частных решений сводится к тому же x^*(r)=r.

Хотя основные операции в данном двустороннем уравнении совпадают, в качестве сопровождающей операции для левостороннего уравнения следует выбрать отличную от использованной для правостороннего уравнения, а именно

ž	p	q	r
p	p	p	p
q	q	r	q
r	q	r	r

(она не дистрибутивна относительно **–**, p**–**(r **ž** q)=p**–**r=r≠q=r**œ**p=(p**–**r)**œ**(p**–**q)).
Относительно этой сопровождающей операции коэффициент r имеет сопровождающий элемент $r^{ž}$=p, так как выполнены требования 1^{-}, 2^{-} (проверяются так же, как выше требования $^{®}1$, $^{®}2$).

Общее решение двустороннего уравнения записывается в виде, при k ∈{r} и любом g ∈{p,q,r},

x=x(r,g)=

=(p**–**((r**–**q)**œ**(q**–**p))) **ž** (p**–**(p,q,r))=

=r **ž** (q,p,r)=(r,q,r)={q,r},

что подтверждается непосредственно таблицей Кэли основной операции **–**.

Пример 2. Пусть теперь основной группоид Γ является *полугруппой* SG=<S,·>, то есть выполняется *закон ассоциативности* (знак основной операции умножения · в дальнейшем опускается). Двустороннее «линейное неоднородное» уравнение

axb=c

может быть записано в двух формах

(ax)b=c и a(xb)=c,

соответствующих рассмотренной ранее паре уравнений, если в них **–** понимать как ·. Пусть коэффициенты a, b регулярны, то есть существуют обобщенно обратные к ним a^{-}, b^{-} такие, что $aa^{-}a=a$, $bb^{-}b=b$; в этом случае реализуются требования 0^{-}, $^{®}0$ с $a^{-}=a^{-}$, $^{®}b={}^{-}b=b^{-}$. Пусть коэффициенты a, b регулярно дополняемы, то есть существуют их регулярные дополнения $a^{\sim}$, $b^{\wedge}$ такие, что $aa^{\sim}=0$, $a^{-}a+a^{\sim}=1$, $b^{\wedge}b=0$, $b^{\wedge}+bb^{-}=1$. Это соответствует «выходу» в сопровождающий тригруппоид, реализуемый здесь в виде *полукольца* SR, то есть бигруппоида <S,·,+>, в котором сопровождающие операции также совпадают и реализуются как ассоциативное сложение +, связанное с умножением *законом дистрибутивности*, при дополнительном предположении о наличии *нейтральных элементов* 0 и 1; в этом случае реализуются требования 1^{-}, 2^{-}, ®1, ®2 с až=$a^{\sim}$, ²a=œa=$a^{\wedge}$. Поэтому критерии разрешимости запишутся в виде

$(a(a^{-}((kb^{\wedge})+(cb^{-}))))b=c,$

$a((((a^{-}c)+(a^{\sim}-f))b^{-})-b)=c$

или

$aa^{-}kb^{\wedge}b+aa^{-}cb^{-}b=c,$

$aa^{-}cb^{-}b+aa^{\sim}fb^{-}b=c$

и в силу свойств регулярных дополнений сведутся к единому критерию разрешимости уравнения $axb=c$:

$aa^{-}cb^{-}b=c.$

Общие решения запишутся в двух альтернативных формах

$x=x(k,g)=(a^{-}((kb^{\wedge})+(cb^{-})))+(a^{\sim}g),$

$k, g \in S,$

$x=x(f,l)=(lb^{\wedge})+(((a^{-}c)+(a^{\sim}f))b^{-}),$

$f, l \in S$

или

$x=x(k,g)=a^{-}kb^{\wedge}+a^{-}cb^{-}+a^{\sim}g,$

$k, g \in SR,$

$x=x(f,l)=lb^{\wedge}+a^{-}cb^{-}+a^{\sim}fb^{-},$

$f, l \in SR.$

Таким образом, предложенный выше подход в случае полугрупп и полуколец приводит к результатам, представленным ранее в [2].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Блюмин С.Л. «Линейные» алгебраические уравнения в «бедных» алгебраических структурах [Текст] / С.Л. Блюмин // Вести высших учебных заведений Черноземья. – Липецк: ЛГТУ. – 2006. - № 1. – С. 3-7.

2. Блюмин С.Л. Регулярная по Дж. Фон Нейману математика и адамарова полукольцевая матричная алгебра [Текст] / С.Л. Блюмин // Вести высших учебных заведений Черноземья. – Липецк: ЛГТУ. – 2005. - № 1. – С. 31-34.