УДК 512.05 Блюмин С.Л. (ЛГТУ)

РЕГУЛЯРНАЯ ПО ДЖ. ФОН НЕЙМАНУ МАТЕМАТИКА И АДАМАРОВА ПОЛУКОЛЬЦЕВАЯ МАТРИЧНАЯ АЛГЕБРА

Введение

Современные исследователи, ориентированные на разработку новых математических методов, вплоть до искусственного интеллекта, и компьютерных средств, вплоть до нейрокомпьютеров, и решение с их использованием новых, не поддававшихся решению традиционными методами и средствами, задач математического моделирования, анализа, оптимизации реальных явлений, объектов и процессов, прогнозирования их поведения и принятия решений в условиях неопределенности, часто и/или прежде всего сталкиваются с необходимостью применения, уже на стадии формализации подобных задач, нового, более общего и гибкого, математического аппарата, что приводит в конечном счете к необходимости пересмотра самих основ прикладной математики, прежде всего ее алгебраических основ, существенного отхода от давно сложившихся традиций.

В данной работе, опирающейся на [1-3], сочетаются и развиваются некоторые аспекты регулярной по Дж. фон Нейману математики, охватывающей с единых позиций как традиционную, в том числе оптимизационную, математику, так и активно развиваемые в последнее время идемпотентную и компьютерную математики. Регулярная математика базируется на понятии регулярного элемента алгебраической структуры, обладающего обобщенным противоположным и/или обобщенным обратным и обобщающего как понятие элемента, имеющего (левый, правый, двусторонний) противоположный и/или обратный, так и понятие идемпотентного элемента.

1. Полукольца и их произведения

Естественной областью, на которой следует развивать регулярную математику, являются регулярные полукольца, частными случаями которых являются как числовые поля, тела, регулярные кольца, базовые для классической фундаментальной и прикладной математики, так и булевы алгебры, дистрибутивные решетки, идемпотентные полукольца, базовые для идемпотентной и компьютерной математики.

Реляционные, в том числе нечеткие реляционные, уравнения систематически используются в задачах принятия решений в условиях неопределенности. При формализации оценочной области с помощью полукольца они оказываются матричными уравнениями над полукольцами. Обычно используемое в матричной алгебре умножение матриц отличается от их сложения и умножения на числа тем, что последние выполняются поэлементно. Поэлементно же выполняется адамарово или шурово умножение матриц. Как отмечено в [4], адамарово умножение является особенно простым (и на первый взгляд наивным) способом композиции матриц: оно значительно проще обычного умножения; в частности, подобно сложению числовых матриц, оно коммутативно; обладает и рядом других замечательных свойств; особый интерес к адамарову умножению числовых матриц связан с тем, что оно, в отличие от обычного их умножения, в соответствии с теоремой Шура, оставляет инвариантным конус положительно полуопределенных матриц и дает тем самым один из примеров аналогии между такими матрицами и неотрицательными числами.

Следует отметить, что при адамаровом умножении фактически игнорируется (впрочем, важная для многих приложений) структура матриц как таблиц: из самых общих алгебраических соображений [5] матрицы достаточно рассматривать как семейства элементов гомологичных алгебраических структур и использовать общее определение произведения семейства гомологичных алгебраических структур. При этом произведение структур гомологично перемножаемым структурам, но если все они принадлежат одному роду, то их произведение может и не принадлежать этому роду. Так, произведение числовых полей не является числовым полем, тогда как произведения многих структур более бедных родов относятся к структурам того же рода.

Хотя в [5] отмечено, что наибольшую важность для математики имеют матрицы над кольцами с единицей, тем не менее, в развитие этого замечания можно сказать, что для современной прикладной алгебры наибольшую важность имеют матрицы над полукольцами. Структура полукольца имеет достаточно бедный род для того, чтобы произведение полуколец являлось полукольцом. Этот факт является базовым для изучения адамаровой полукольцевой матричной алгебры: матрицы над полукольцом с поэлементными операциями образуют полукольцо.

Это позволяет многие результаты, установленные в полукольцах, переносить в адамаровы матричные полукольца.

2. Уравнения в полукольцах

Определим полукольцо SR = < A, * ,+ > как две двусторонне дистрибутивно связанные полугруппы <A, *> ,<A, + >, так что каждая из операций * , + ассоциативна. При таком определении полукольцо может быть охарактеризовано, например, как «ассоциативное кольцо без 1, 0 и вычитания», которые при исследовании и решении уравнений часто приходится вводить или заменять другими элементами и операциями, делая при этом дополнительные предположения и об основных операциях.

Непосредственно из определения полукольца следует, что в нем может быть записано двустороннее неоднородное уравнение Сильвестра

$$S(x) + e = T(x) + f ,$$

где $S(x) = a_1 * x * b_1 + \ldots + a_p * x * b_p$, $T(x) = c_1 * x * d_1 + \ldots + c_q * x * d_q$ - отображения Сильвестра (в случае одного слагаемого – элементарные). Его разновидностями являются, например, одностороннее (без b_i , d_i или a_i , c_i), однородное (без e, f) , элементарное (с одним слагаемым в левой и/или правой части) уравнения, а также еще более специальные, например,

$a * x * b = c$ (подробно рассмотренное ниже),

$a * x = b$ («обычное линейное»),

$a * x = b * x$ («простейшее однородное»),

$x = b + a * x$ («дискретное стационарное уравнение Беллмана») и другие. Очевидно, что если * коммутативна, a , b идемпотентны ($a*a= a$, $b* b = b$) , то $a * x = b * x$ имеет решение $x=a * b$; если в SR есть 1, $a^0 =1$, то $x = b + a* x$ имеет решение $x = a^{\$} * b$, где транзитивное замыкание $a^{\$} = a^0 + a^1 + \ldots + a^n + \ldots$ (формальная сумма).

Остановимся подробнее на исследовании и отыскании общего решения уравнения $a * x * b = c$, вводя только непосредственно используемые понятия и предположения и иллюстрируя предлагаемый подход такими «диаметрально противоположными» примерами, как ассоциативные кольца с единицей и булевы алгебры.

Предварительно напомним, что в полугруппе S=<A, * >, если коэффициенты a, b уравнения $a * x * b = c$ регулярны (обобщенно обратимы), то есть существует элемент a^- (обобщенный обратный к a) такой, что $a * a^- * a = a$, то же для b, то

$$\{a * x * b = c \text{ разрешимо}\} <=$$

$$=> \{a * a^{-} c * b^{-} * b = c,\ x = a^{-} * c * b^{-} \text{ - некоторое его решение}\}.$$

Отметим два частных случая:

1) если a - идемпотент ($a * a = a$, а значит и $a * a * a = a$, так что можно положить $a^{-} = a$), то же для b, то

$$\{a * x * b = c \text{ разрешимо}\} <=$$

$$=> \{a * c * b = c,\ x = c \text{ - некоторое его решение}\}.$$

2) если S=<A,*,1> - моноид и а обратим (существует a^{-1}, обратный к а, такой, что $a * a^{-1} = a^{-1} * a = 1$), то же для b, то

$$\{a * x * b = c \text{ разрешимо},\ x=a^{-1} * c * b^{-1} \text{ - его единственное решение}\}.$$

В общем случае возникает вопрос об описании общего решения уравнения. Ответ на него предполагает наличие дополнительных структур в A и дополнительных свойств элементов.

Напомним, например, что если R=<A,*,+ ,0 > - ассоциативное кольцо, то общее решение разрешимого уравнения записывается в виде

$$x = a^{-} * c * b^{-} + y - a^{-} * a * y * b * b^{-}, \text{ где y из A произвольно.}$$

Рассмотрим уравнение $a * x * b = c$ в полукольце SR=<A, *, 1,+ ,0 >, так что <A,* ,1> , <A,+ ,0 > - моноиды, 0=/=1 и 0*c=c* 0=0 для всех с из A.

Регулярные элементы a, b назовем регулярно дополняемыми, если существуют элементы a~, b^ (регулярные дополнения для a, b), такие, что

$$a * a\sim = 0,\ a^{-} * a + a\sim = 1,\ b\wedge * b = 0,\ b * b^{-} + b\wedge = 1.$$

С использованием этих понятий общее решение разрешимого уравнения записывается в виде

$$x = a^{-} * c * b^{-} + a^{-} * a * y * b\wedge + a\sim * y, \text{ где y из A произвольно.}$$

Действительно,

(i) x - решение:

$a * x * b = a * a^- * c * b^- * b + a * a^- * a * y * b^\wedge * b + a * a^\sim * y * b =$
$= c + a * y * (b^\wedge * b) + (a * a^\sim) * y * b = c + a * y * 0 + 0 * y * b = c;$

(ii) любое решение x_0 , $a * x_0 * b = c$, может быть выделено из x выбором, например, $y=x_0$:

$x = a^- * c * b^- + a^- * a * x_0 * b^\wedge + a^\sim * x_0 = (a^- * a * x_0 * b * b^- + a^- * a * x_0 * b^\wedge) + a^\sim * x_0 = a^- * a * x_0 * (b * b^- + b^\wedge) + a^\sim * x_0 = a^- * a * x_0 * 1 + a^\sim * x_0 = (a^- * a + a^\sim) * x_0 = 1 * x_0 = x_0$.

Таким образом, исследование и решение данного уравнения в данном полукольце выполнено полностью. Отметим, что для уравнения $a * x = c$, когда $b = 1 = b^-$ и в качестве $b^\wedge$ может быть взят 0, общее решение имеет вид

$x=a^- * c + a^\sim * y$.

В качестве примера приведем $R=\langle A,* ,1,+ ,0 \rangle$ - ассоциативное кольцо с единицей, тогда регулярными дополнениями являются

$a^\sim = 1 – a^- * a$, $b^\wedge = 1- b * b^-$;

условия на такие элементы выполнены по их определению; общее решение записывается в виде

$$x = a^- * c * b^- + a^- * a * y * (1 – b * b^-) + (1 – a^- * a) * y =$$
$$= a^- * c * b^- + y - a^- * a * y * b * b^-,$$

что совпадает с представленным выше.

Другим примером является $BA=\langle A,* ,1,+ ,0, ' \rangle$ - булева алгебра, то есть операции коммутативны, элементы идемпотентны и потому регулярны, так что можно положить $a^- = a$, $b^- = b$, то можно положить, в свою очередь, $a^\sim = a'$, $b^\wedge=b'$; условия на такие элементы выполнены по определению булевой алгебры: $a* a' = 0$, $a + a' = 1$, то же для b; общее решение записывается в виде

$$x = c + a * y * b' + a' * y = c + (a' + a * b') * y = c + (a*b)' * y$$

и допускает интерпретацию как относительное дополнение к $a * b$ в интервале [c, y].

3. Адамаровы матричные уравнения над полукольцами

Пусть $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$ – некоторые матрицы размера $m\times n$ с элементами из полукольца SR, c – элемент этого полукольца, $cA=c[a_{ij}]=[ca_{ij}]$, $A+B=[a_{ij}]+[b_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}]$, $A*B=[a_{ij}]*[b_{ij}]=[a_{ij}b_{ij}]$ – поэлементные операции над ними. Роль единицы при таком умножении играет адамарова единичная матрица $E=[1]$ того же размера, все элементы которой равны элементу 1 полукольца. Если $f(x)$ – функция, определенная для всех a_{ij} , то адамарова функция от матрицы A определяется как матрица того же размера $f*(A)=[f(a_{ij})]$. В частности, если для числа r определены все степени $a_{ij}{}^{r}$, то адамарова степень матрицы A определяется как $A^{*r}=[a_{ij}{}^{r}]$; при $r=0$ это определение дает $A^{*0}=E$; при $r=-1$ и обратимых a_{ij} определяется адамарова обратная матрица $A^{*-1}=[1/a_{ij}]$, удовлетворяющая условию $A*A^{*-1}=E$. Если же среди элементов матрицы A имеются необратимые, так что адамарова обратная матрица не определена, но все элементы регулярны, то определена адамарова обобщенная обратная матрица $A^{*-}=[a_{ij}^{-}]$; она удовлетворяет стандартному определяющему соотношению $A*A^{*-}*A=A$ и может быть названа обобщенной обратной по Адамару-фон Нейману к матрице A над полукольцом SR. Следует отметить, что адамарово произведение $A*A^{*-}$ не равно адамаровой единичной матрице E.

Простейшее адамарово «линейное» полукольцевое матричное уравнение имеет вид $A*X*B=C$, где все матрицы имеют одинаковые размеры.

В случае числовых матриц, благодаря коммутативности адамарова числового матричного умножения, это уравнение упрощается до $A*X=C$ и является достаточно общим; оно проще, чем, например, «обычное» (с обычным матричным умножением) многочленное двустороннее линейное матричное уравнение $\Sigma^{n}{}_{i=1}A_iXC_i=B$, проблемы исследования и решения которого хорошо известны и не возникают в случае адамарова числового матричного уравнения, исследуемого и решаемого непосредственно: оно имеет решение тогда и только тогда, когда матрицы A и B имеют нули на одних и тех же местах; при этом элементы матрицы-решения X определяются в виде $x_{ij} = b_{ij} / a_{ij}$ при $a_{ij} \neq 0$ и произвольны при $a_{ij} = b_{ij} = 0$. Но даже в числовом случае представляет методический интерес исследование и решение уравнения $A*X=B$ с позиций адамаровой числовой матричной алгебры. Если все элементы матрицы A отличны от нуля, то уравнение имеет единственное решение, записываемое с использованием адамаровой обратной матрицы в виде $X=A^{*-1}*B$. Если же среди элементов матрицы A имеются нулевые, то в соответствии с общей методикой исследования и решения матричных уравнений, использующей обобщенные обратные матрицы, данное уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда выполняется условие $A*A^{*-}*B=B$, то есть когда матрица B имеет нули на местах нулевых элементов матрицы A; при этом общее решение уравнения записывается в виде $X=A^{*-}*B + (E - A*A^{*-})*Y$, где Y – произвольная матрица того же размера, что и матрицы, входящие в уравнение; первое слагаемое этой формулы имеет нули на тех же местах, что и у матриц A, B; в матрице X эти нули заменяются произвольными элементами в силу второго слагаемого. Таким образом, из общих соображений подтверждены приведенные выше результаты непосредственного исследования и решения адамарова числового матричного уравнения.

Возвращаясь к рассмотрению того же уравнения над полукольцом и учитывая сказанное в разделе 1 о произведениях полуколец, заключаем, что изложенная в разделе 2 методика исследования и решения уравнений в полукольцах непосредственно применима к адамаровым полукольцевым матричным уравнениям.

Заключение

Обобщенное обращение и его важнейший частный случай – псевдообращение, в том числе взвешенное, тесно связанные с задачами о наименьших квадратах – используются при исследовании и решении матричных уравнений с приложениями в задачах математического моделирования, математической теории систем, искусственного интеллекта, оптимального управления и адаптивной нелинейной идентификации, принятия решений в условиях неопределенности и обучения искусственных нейронных сетей, мягких и распределенных вычислительных теории множеств и соответствий, алгебры и логики. Более подробно некоторые из этих приложений представлены в [6,7].

Как указывалось ранее, булевы алгебры являются примером полуколец, важным для многих приложений. Если в булевой алгебре принять «обычные» названия нульарных операций «нуль» 0 и «один» 1, бинарных операций «сложение» + и «умножение» · (знак последней обычно опускается), а также учесть специальную унарную операцию «инволюция» $'$, то они интерпретируются соответственно: в алгебре логики – как «тождественно ложное» и «тождественно истинное» высказывания, «дизъюнкция» и «конъюнкция» высказываний, «отрицание» высказывания; в алгебре множеств – как «пустое» и «универсальное» множества, «объединение» и «пересечение» множеств, «дополнение» множества; в алгебре случайных событий – как «невозможное» и «достоверное» события, «объединение» (часто «сумма») и «пересечение» (часто «произведение» или «совмещение») событий, «дополнение» события (часто «противоположное» событие). Эти интерпретации булевой алгебры достаточно популярны.

Менее популярна интерпретация булевой алгебры в проблемах принятия решений при нечеткой исходной информации как оценочной шкалы для нечеткой логики и теории нечетких множеств, альтернативной промежутку [0,1] числовой прямой. А так как булево умножение булевых матриц по определению выполняется поэлементно, то решение булево-матричных уравнений укладывается в рамки методики, изложенной в данной работе.

Список использованных источников

1. Блюмин С.Л. Регулярная (по Дж. фон Нейману) математика / С.Л. Блюмин // Современный анализ и его приложения. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 2000. – С. 48-49.
2. Блюмин С.Л. Уравнения в полукольцах / С.Л. Блюмин // Сб. науч. тр. преп. и сотр., посвящ. 45-летию ЛГТУ. – Ч. 3. – Липецк: Изд-во ЛГТУ, 2001. – С. 8-11.
3. Блюмин С.Л. Математические проблемы искусственного интеллекта: регулярность по Дж. фон Нейману в линейной и «линейной» алгебрах / С.Л. Блюмин // Системы управления и информационные технологии. - № 1-2(12). – Москва-Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2003. – С. 90-94.
4. Хорн Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
5. Бурбаки Н. Алгебра / Н. Бурбаки. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 516 с.
6. Блюмин С.Л. Нечеткая логика: алгебраические основы и приложения / С.Л. Блюмин, И.А. Шуйкова, П.В. Сараев, И.В. Черпаков. – Липецк: Изд-во ЛЭГИ, 2002. – 111 с.
7. Погодаев А.К. Адаптация и оптимизация в системах автоматизации и управления / А.К. Погодаев, С.Л. Блюмин. – Липецк: Изд-во ЛЭГИ, 2003. – 127 с.

Работы 3, 6, 7 представлены на данном сайте http://www.mtas.ru