

УДК 512.05+519.6

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА:
БУЛЕВА «ЛИНЕЙНАЯ» АЛГЕБРА**

С.Л. Блюмин

Представлены особенности «линейной» алгебры векторов и матриц с элементами из булевой алгебры и с поэлементными операциями «сложения», «умножения» и «инволюции». Основное внимание уделено исследованию и решению матричных уравнений в этом контексте. Приведен пример приложения к задаче траекторного управления булево-матричной дискретной динамической системой. Обсуждены интерпретации булевой алгебры, ее образовательные аспекты.

**MATHEMATICAL PROBLEMS
OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE:
BOOLEAN “LINEAR” ALGEBRA**

S. L. Blyumin

Exceptions are presented of “linear” algebra of vectors and matrices with elements from Boolean algebra and with element-wise operations of “addition”, “multiplication” and “involution”. Main opinion is given to investigation and solution of matrix equations in this context. Example is presented of application to trajectory control problem for Boolean-matrix discrete dynamical system. Interpretations and educational aspects of Boolean algebra are discussed.

Введение: место булевой «линейной» алгебры в «линейной» алгебре

В работе [2] представлен краткий обзор роли линейной (над полями и кольцами) и «линейной» (над некоторыми типами полуколец) алгебр, а также регулярности по Дж. фон Нейману (обобщенной обратимости) элементов алгебраических структур, в современных проблемах искусственного интеллекта и других областей. Приведены примеры полуколец, как классические, так и неклассические. Полукольца могут быть образно охарактеризованы как «числовые поля без вычитания и деления»; иначе говоря, элементы полуколец в общем случае не имеют противоположных и обратных элементов; вместо них регулярность по Дж. фон Нейману предполагает использование обобщенных противоположных и обобщенных обратных элементов, если таковые существуют в полукольце.

Булевы алгебры, аксиоматика которых широко известна [1, 9], могут быть отнесены к классическим примерам полуколец, если принять во

внимание глубину их исследования в фундаментальной математике и особенно широту их применения в прикладной математике.

Регулярность по Дж. фон Нейману элементов булевых алгебр следует из их идемпотентности, в силу которой каждый элемент является своим обобщенным противоположным и обобщенным обратным. Булевы алгебры находятся в стоуновской двойственности [1, 9] с булевыми кольцами, в которых каждый элемент является своим противоположным. Булево произведение булевых матриц, понимаемых как матрицы с элементами из булевой алгебры, выполняется поэлементно [1, 11] (в отличие от «обычного», такое умножение в классической матричной алгебре известно как адамарово или шурово [12]). Эти особенности оправдывают использование кавычек в названии и играют существенную роль в исследовании и решении проблем булевой «линейной» алгебры, которой и посвящена данная работа.

Интерпретации булевой алгебры в математической логике / теории множеств / теории вероятностей, нечеткой логике / теории нечетких множеств

Если принять во внимание тот математический аппарат, который в рабочем порядке систематически используется в современной научной литературе самого широкого профиля, то вполне обоснованно можно сделать вывод о том, что его базой служат булевы алгебры логики, множеств, случайных событий.

Если в булевой алгебре B принять «обычные» названия нульварных операций «нуль» 0 и «один» 1 , бинарных операций «сложение» $+$ и «умножение» \cdot (знак последней обычно опускается), а также учесть специальную унарную операцию «инволюция» $'$, то они интерпретируются соответственно: в алгебре логики – как «тождественно ложное» и «тождественно истинное» высказывания, «дизъюнкция» и «конъюнкция» высказываний, «отрицание» высказывания; в алгебре множеств – как «пустое» и «универсальное» множества, «объединение» и «пересечение» множеств, «дополнение» множества; в алгебре случайных событий – как «невозможное» и «достоверное» события, «объединение» (часто «сумма») и «пересечение» (часто «произведение» или «совмещение») событий, «дополнение» события (часто «противоположное» событие). Эти интерпретации булевой алгебры достаточно популярны; их роль в математическом образовании обсуждается в Заключении.

Интерпретация булевой алгебры в проблемах принятия решений при нечеткой исходной информации [10] как оценочной шкалы для нечеткой логики и теории нечетких множеств, альтернативной промежутку $[0,1]$ числовой прямой, кратко охарактеризована в [3] и более подробно в [4]. Она была предложена [13] вскоре после возникновения теории нечетких

множеств [15] и предлагает определение нечеткого подмножества A универсального множества (множества альтернатив) U не как отображения U в $[0,1]$, а как отображения U в булеву алгебру B ; нечеткое отношение соответственно определяется как отображение $U \times U$ в B . Ввиду уже отмечавшейся популярности булевой алгебры такие определения не менее удобны для теоретического исследования и практического применения нечетких множеств, чем опирающиеся на использование шкалы $[0,1]$; более того, они в значительной степени снимают проблему несогласованности обычно используемых решеточных операций [1] взятия максимума и минимума при отыскании объединений и пересечений с арифметической операцией вычитания при отыскании дополнений нечетких множеств; подробнее см. [4]. Напомним, что теория решеток [9] именовалась «теорией структур» [1], пока не распространилась терминология, предложенная в [7, 8].

В случае конечного множества U нечеткие множества и отношения представляются соответственно булевыми векторами и матрицами; они и являются основными объектами булевой «линейной» алгебры.

Булева «линейная» алгебра

Как уже упоминалось, булевы векторы и матрицы понимаются далее как векторы и матрицы с элементами из некоторой булевой алгебры B . Это подчеркивается здесь в связи с тем, что распространено их понимание как векторов и матриц с элементами 0 и 1, являющихся важным частным случаем, в котором B двухэлементна и состоит из 0 и 1.

Упоминалось и то, что булево «умножение» таких векторов и матриц понимается как поэлементное. Поэлементно же выполняются и другие операции над булевыми векторами и матрицами – «сложение» и «инволюция». Это означает, что фактически игнорируется их представление как столбцов (или строк) и таблиц, а образованная ими алгебраическая структура является произведением алгебраических структур [8], из которых черпаются их элементы, в данном случае совпадающих с одной и той же булевой алгеброй B . По терминологии [8] произведение алгебраических структур гомологично структурам, заданным в сомножителях; однако отмечается, что если последние структуры принадлежат все одному роду [7], то нужно в каждом случае еще исследовать, принадлежит ли и их произведение этому роду; указано, что это не так, например, в случае числовых полей; иначе говоря, как хорошо известно, множество числовых векторов и матриц с поэлементными операциями сложения и адамарова (шурова) умножения не является числовым полем; образно можно сказать, что чем богаче [7] род алгебраических структур, тем менее вероятно, что их произведение принадлежит тому же роду.

Следует отметить, что, не смотря на это, адамарово умножение числовых матриц используется в матричном анализе [12, 5] и задачах принятия решений при нечеткой исходной информации [10], хотя и не столь интенсивно, как «обычное». Как указано в [12], адамарово умножение матриц является особенно простым (и на первый взгляд наивным) способом композиции матриц: оно значительно проще обычного умножения; в частности, подобно сложению числовых матриц, оно коммутативно; обладает и рядом других замечательных свойств; особый интерес к адамарову умножению матриц связан с тем, что оно, в отличие от обычного их умножения, в соответствии с теоремой о произведении Шура, оставляет инвариантным конус положительно полуопределенных матриц и дает тем самым один из примеров аналогии между такими матрицами и неотрицательными числами.

Булева алгебра (наряду с полугруппами, произвольными полукольцами, группами, кольцами и др.) является алгебраической структурой достаточно бедного рода, по крайней мере для того, чтобы произведение булевых алгебр являлось булевой алгеброй [1, 9]. Это означает, что совокупность $M_{m \times n}(B)$ булевых матриц размера $m \times n$ над булевой алгеброй B (в частности, совокупность $M_{m \times 1}(B) = M_m(B)$ булевых векторов размерности m) сама является булевой алгеброй со следующими операциями над матрицами $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$: $A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$, $AB = [a_{ij}][b_{ij}] = [a_{ij}b_{ij}]$, $A' = [a_{ij}']$. Роль нуля и единицы при таких операциях играют булевы нулевая и единичная матрицы $0 = [0]$ и $I = [1]$ того же размера, все элементы которых равны соответственно 0 и 1. Уже эти особенности упрощают, по сравнению с обычной линейной алгеброй, булеву «линейную» алгебру, так как позволяют использовать в ней многие результаты, устанавливаемые в более простых условиях ее носителя – булевой алгебры B .

С другой стороны, поэлементно же выполняется и умножение матрицы на элемент булевой алгебры B : $cA = c[a_{ij}] = [ca_{ij}]$; это означает, что с операциями $A + B$ и cA совокупность $M_{m \times n}(B)$ образует полумодуль над булевой алгеброй B , рассматриваемой как полукольцо [14]; исследование полумодулей оказывается более сложным, чем исследование модулей над кольцами, в частности, линейных пространств над числовыми полями.

Если $f(x)$ – функция, определенная для всех a_{ij} , то булева функция от матрицы A определяется как матрица того же размера $f(A) = [f(a_{ij})]$. Это упрощает исследование булево-матричных функций булево-матричного аргумента по сравнению с исследованием подобных функций над числовыми полями. Более того, как показано далее, булево-матричные функции имеют достаточно простой стандартный вид.

Булевы матрицы булево идемпотентны: $AA = A$, а так как, в силу этого, $AAA = A$, то они булево обобщенно обратимы или булево регулярны по Дж. фон Нейману [2]. Однако при исследовании и решении «линейных» и «аффинных» [14] (и, как показано далее, произвольных) булево-матричных

уравнений это свойство, в отличие от обычной линейной алгебры, не столь полезно, как собственно булева идемпотентность.

Прежде, чем перейти непосредственно к уравнениям, охарактеризуем их общий вид, а также упомянутую во Введении стоуновскую двойственность, в контексте булевой «линейной» алгебры.

Общий вид булево-матричных функций и уравнений. Стоуновская двойственность

Отметим прежде всего некоторые существенные отличия функций и уравнений над булевой алгеброй $M_{m \times n}(B)$ от «обычных» функций и уравнений над числовым полем, например, R .

Одно из отличий, трактуемое как преимущество, состоит в том, что может быть указан достаточно простой общий вид функции $Y=f(X_1, \dots, X_k)$, $X_1, \dots, X_k, Y \in M_{m \times n}(B)$. В силу, прежде всего, свойств коммутативности, идемпотентности и инволюции имеем $XX=X$, $XX'=0$, то есть отсутствуют степени и произведения переменных X и X' , а потому указанная функция может быть представлена в общем виде, «полилинейном» относительно своих аргументов. В частности, при $k=2$ она «билинейна»:

$$Y=A_1X_1+A_2X_2+B_1X_1'+B_2X_2'+A_{12}X_1X_2+B_{12}X_1'X_2'+G_{12}X_1X_2'+H_{12}X_1'X_2'+C,$$

а при $k=1$ «линейна» (точнее, «аффинна» [14]) относительно X и X' :

$$Y=AX+BX'+C, \text{ где } A, B, C \in M_{m \times n}(B).$$

Вследствие этого уравнение с одним неизвестным в $M_{m \times n}(B)$ может быть представлено в общем виде

$$AX+BX'+C=DX+EX'+F,$$

где X – неизвестное, $A, B, C, D, E, F \in M_{m \times n}(B)$ – параметры уравнения; исследование уравнения предполагает выяснение условий, которым следует подчинить параметры для того, чтобы уравнение было разрешимо.

Отметим, что «обычным» аналогом такого уравнения над числовым полем R , ввиду отсутствия операции инволюции, является линейное уравнение

$$ax+c=dx+f.$$

С одной стороны, оно является далеко не общим видом уравнения с одним неизвестным над R . С другой стороны, это простейшее уравнение, благодаря наличию операций вычитания и деления (кроме деления на нуль) в числовом поле, элементарно исследуется и решается в два шага: 1) «уединение» неизвестного $(a-d)x=f-c$; 2a) если $a-d=0$, $f-c \neq 0$, то уравнение неразрешимо; 2b) если $a-d=0$, $f-c=0$, то любое число x является решением, то есть уравнение разрешимо и имеет множество решений; 2c) если $a-d \neq 0$, то уравнение разрешимо и имеет единственное решение $x=(f-c)/(a-d)$.

Именно здесь следует указать на другое отличие, трактуемое как источник затруднений: шаги 1) и 2c) не могут быть выполнены ни в

булевой алгебре B , ни тем более в булевой алгебре $M_{m \times n}(B)$ ввиду отсутствия вычитания и деления. Следует отметить, что шаг 2с) не может быть выполнен ни в «обычном», ни в адамаровом кольце $M_{m \times n}(R)$, и тогда на помощь приходит регулярность по Дж. фон Нейману этих колец [2]. Упомянувшееся как более простое свойство идемпотентности булевой алгебры $M_{m \times n}(B)$ придает определенное своеобразие исследованию и решению уравнений в ней.

Следует отметить, что отсутствие вычитания представляется более значительным затруднением при решении рассматриваемой задачи, чем отсутствие деления. Примеры того, как может быть преодолено это препятствие в булевых алгебрах непосредственно, приведены ниже.

В то же время в случае булевых алгебр имеется возможность не преодолевать это препятствие непосредственно, а «обойти» его, переходя из булевой алгебры в тесно связанное с ней кольцо, а именно – булево кольцо, используя стоуновскую двойственность, устанавливаемую следующим образом [1, 9].

Если в булевой алгебре $M_{m \times n}(B)$, используя ее основные операции $+$, \cdot и $'$, ввести новые операции $A \oplus B = A' B + A B'$, $A \otimes B = A B$, то в ней определяется структура булева кольца $N_{m \times n}(B)$, основным преимуществом которого перед исходной булевой алгеброй, в свете ранее сказанного, является наличие вычитания, а дополнительным к этому, специальным для булевых колец, преимуществом – совпадением этого вычитания со сложением, так как в силу определения и свойства инволюции $A \oplus A = A' A + A A' = 0$. Иначе говоря, в булевом кольце каждый элемент является противоположным себе. Как и в исходной булевой алгебре, каждый элемент является и обобщенным обратным себе. Поэтому перевод уравнения из булевой алгебры в булево кольцо облегчает его исследование и решение.

Для возврата из булева кольца в исходную булеву алгебру используется обратное преобразование операций $A + B = A \oplus B \oplus A \otimes B$, $A B = A \otimes B$, $A' = A \oplus 1$. Это позволяет результаты исследования и решения уравнения, полученные в булевом кольце, представить в исходной булевой алгебре. Примеры применения такого «обходного» пути приведены ниже. Сравнение результатов непосредственного и «обходного» исследования и решения уравнения служит эффективной проверкой их правильности.

Примеры исследования и решения уравнений

Ранее отмечалось, что в булевой «линейной» алгебре наследуются многие результаты, более просто устанавливаемые в ее носителе – булевой алгебре B . Это позволяет, в частности, проиллюстрировать основные шаги общей методики исследования и

решения булево-матричных уравнений на примере более простых булевых уравнений.

Одним из простейших и в то же время важнейших для многочисленных приложений является уравнение

$$ax=f, \quad a, x, f \in B.$$

Исследование: данное «неоднородное» уравнение разрешимо не при любых a, f . Пусть оно разрешимо, то есть существует x_0 такое, что $ax_0=f$; так как $aa=a$, то $(aa)x_0=a(ax_0)=af=f$, что является необходимым условием на параметры a, f для разрешимости уравнения; это условие и достаточно: при его выполнении f является некоторым решением уравнения. Таким образом, условие $af=f$ является критерием разрешимости данного уравнения.

Решение: представление общего решения подсказывает общий принцип суперпозиции, широко применяющийся в различных областях фундаментальной и прикладной математики: если правая часть неоднородного уравнения складывается из некоторых составляющих, то решение складывается из решений, соответствующих этим составляющим; в частности, общее решение неоднородного уравнения складывается из его некоторого частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения. Выше указано частное решение f данного «неоднородного» уравнения; непосредственно проверяется, что «соответствующее однородное» уравнение $ax=0$ имеет общее решение $a'u$; поэтому общее решение данного уравнения может быть записано в виде $x=f+a'u$ при произвольном u из BA . Действительно:

- $x=f+a'u$ – решение, так как $a(f+a'u)=af+aa'u=f+0=f$;
- если x_0 – некоторое решение, $ax_0=f$, то оно может быть получено из $f+a'u$ подходящим выбором u , например, при $u=x_0$, так как $x=f+a'x_0=ax_0+a'x_0=(a+a')x_0=1x_0=x_0$.

Таким образом, непосредственное исследование и решение уравнения $ax=f$ выполнено полностью. Переход в булево кольцо приводит к тому же результату. Действительно, для уравнения $a \otimes x = f$ критерием разрешимости будет $a \otimes f = f$, а общее решение запишется в виде $x = f \oplus (a \oplus 1) \otimes u$, который при возвращении в булеву алгебру преобразуется в $x = f \oplus a'u = f'a'u + f(a+y') = f'a'u + af + fy' = a'f'u + f + fy' = f + a'f'u = f + a'u$, так как из $af=f$ следует $a'f' = a'(af)' = a'(a'+f') = a' + a'f' = a'(1+f') = a'1 = a'$ в силу аксиомы поглощения.

Следует отметить, что в этом примере переход в булево кольцо не помогает получению результата, а лишь подтверждает его; отчасти это связано с тем, что не возникает необходимости «уединения» неизвестного; уравнение является «чисто мультипликативным», не используют в своей записи операцию $+$.

Примером «смешанного мультипликативно-аддитивного», или «аффинного» [14], уравнения может служить

$$ax+c=f.$$

Оно по двойственности соответствует уравнению $(a+x)c=f$ или $cx+ac=f$ того же типа, что не помогает его исследованию и решению. То же можно сказать о применении аксиом де Моргана. Переход в булево кольцо дает уравнение $a \otimes x \oplus c \oplus a \otimes x \otimes c = f$ или $a \otimes (1 \oplus c) \otimes x = c \oplus f$, то есть уравнение уже рассмотренного в булевом кольце типа. Критерий его разрешимости запишется в виде $a \otimes (1 \oplus c) \otimes (c \oplus f) = c \oplus f$ или $a \otimes (1 \oplus c) \otimes f = c \oplus f$, общим решением будет $x = (c \oplus f) \oplus [a \otimes (1 \oplus c) \oplus 1] \otimes y$. Возвращение в булеву алгебру дает соответственно: критерий разрешимости $ac'f = c'f + cf'$, общее решение $x = (c'f + cf') + (ac')'y$. Далее целесообразно использовать получаемое непосредственно в булевой алгебре и следующее из аддитивной идемпотентности необходимое условие разрешимости исходного уравнения: пусть оно разрешимо, то есть существует x_0 такое, что $ax_0 + c = f$; тогда $ax_0 + (c+c) = (ax_0+c) + c = f + c = f$, то есть $c+f=f$, $f' = c'f'$; к сожалению, это условие не позволяет указать какое-либо решение данного уравнения (ср. XIII); с учетом этого условия критерий разрешимости принимает вид $ac'f = c'f$, а общее решение – $x = c'f + (ac')'y$. Проверим его непосредственно:

- это – решение: $ac'f + a(a'+c)y + c = c'f + acy + c = c'f + c = (c+c')(c+f) = f$;
- если $f = ax_0 + c$, то при $y = x_0$ получим $x = c'(ax_0+c) + (ac')'x_0 = [ac' + (ac')]'x_0 = x_0$.

Так при решении данного уравнения комбинируются непосредственное исследование в булевой алгебре и переход в булево кольцо.

Рассмотрим пример уравнения, в записи которого участвует инволюция:

$$ax + bx' = f.$$

Переход в булево кольцо приводит к уравнению $(a \oplus b) \otimes x = b \oplus f$ и критерию его разрешимости $(a \oplus b) \otimes (b \oplus f) = b \oplus f$. Возвращение в булеву алгебру приводит к отличному от исходного уравнению $(a'b + ab')x = b'f + bf'$, общее решение которого $x = (b'f + bf') + (ab + a'b')y$, $x' = (bf + b'f')(y' + a'b + ab')$. Для его непосредственной проверки учтем, что критерий разрешимости может быть возвращен в булеву алгебру в виде $ab + f(a'b + ab') = f$, так как в булевом кольце переписывается как $a \otimes b \oplus (a \oplus b) \otimes f = f$, что в булевой алгебре дает $(a' + b')(a'b + ab')f + ab(f' + ab + a'b') = (a'b + ab')f + abf' + ab = ab + f(a'b + ab') = f$ с учетом аксиомы поглощения. Теперь проверка дает:

- $x = (b'f + bf') + (ab + a'b')y$, $x' = (bf + b'f')(y' + a'b + ab')$ – решение:

$$ab'f + abf' + aby + bfy' + a'bf = f(a'b + ab') + b[a(f' + y) + fy'] = f(a'b + ab') + b[a(fy')] + afy' + a'fy'] = fa'b + fab' + ab + a'bfy' = fa'b + fab' + ab = f \text{ с учетом аксиомы поглощения;}$$

- если $f = ax_0 + bx_0'$, $f' = (a' + x_0')(b' + x_0)$, то при $y = x_0$ получаем $x = b'(ax_0 + bx_0') + b(a' + x_0')(b' + x_0) + (ab + a'b')x_0 = ab'x_0 + a'bx_0 + abx_0 + a'b'x_0 = ax_0 + a'x_0 = x_0$.

Следующий пример рассмотрим в контексте прикладной задачи из математической теории систем и управления.

Приложение: траекторное управление булево-матричной дискретной динамической системой

Исследование и решение задачи траекторного управления линейной стационарной матричной, над числовым полем, дискретной динамической системой рассмотрено в [6] на основе систематического использования обобщенного обращения матриц. В данном разделе рассмотрен аналог этой задачи для системы над булевой алгеброй. Следует отметить, что в таком контексте проблема по ряду рассмотренных ранее причин упрощается; напомним некоторые из них: булево умножение булевых матриц коммутативно; булева матричная функция нескольких булевых матричных аргументов общего вида «полилинейна»; в качестве обобщенной обратной к булевой матрице можно использовать саму эту матрицу в силу идемпотентности. Ниже получены некоторые следствия этих особенностей в контексте математической теории систем.

Пусть динамическая система S эволюционирует в дискретном времени $t \in N[t_0] = \{t_0, t_0+1, t_0+2, \dots\}$ под воздействием матричного управления $U[t] \in M_{n \times n}(B)$ с матричным состоянием $X[t] \in M_{n \times n}(B)$; динамика системы описывается уравнением $X[t+1] = F(t, X[t], U[t])$, $X[t_0] = X_0$.

В соответствии с ранее сказанным относительно общего вида булево-матричной функции булево-матричного аргумента уравнение динамики системы представимо в виде

$$X[t+1] = \Phi[t] + A[t] \cdot X[t] + B[t] \cdot U[t] + C[t] \cdot X'[t] + D[t] \cdot U'[t] + M[t] \cdot X[t] \cdot U[t] + N[t] \cdot X'[t] \cdot U[t] + P[t] \cdot X[t] \cdot U'[t] + Q[t] \cdot X'[t] \cdot U'[t],$$

где матрицы параметров системы $\Phi[t], A[t], B[t], C[t], D[t], M[t], N[t], P[t], Q[t]$ также принадлежат $M_{n \times n}(B)$ и умножение матриц понимается как булево. Это – «билинейная» относительно переменных $X[t], X'[t], U[t], U'[t]$ система. Для поставленной ниже задачи существенно то, что она «линейна» относительно переменных $U[t], U'[t]$.

В задаче траекторного управления предполагается, что для всех $t \in N[t_0]$ заданы значения $X^*[t]$ и требуется решить следующее уравнение относительно $U[t]$:

$$(B[t] + M[t] \cdot X^*[t] + N[t] \cdot X'^*[t]) \cdot U[t] + (D[t] + P[t] \cdot X^*[t] + Q[t] \cdot X'^*[t]) \cdot U'[t] + \Phi[t] + A[t] \cdot X^*[t] + C[t] \cdot X'^*[t] = X^*[t+1],$$

в сокращенных обозначениях

$$B \cdot U + D \cdot U' + C = E.$$

Исследование и решение этого уравнения может быть выполнено в соответствии с представленной выше методикой, например, с использованием перехода в булево кольцо R , где оно становится «линейным» только относительно неизвестного $U[t]$, но в кольцевых операциях \oplus, \otimes :

$$(B \oplus D) \otimes (I \oplus C) \otimes U = D \oplus C \oplus D \otimes C \oplus E.$$

Критерий разрешимости этого уравнения приводит к критерию траекторной управляемости

$$(B \oplus D) \otimes (I \oplus C) \otimes (D \oplus C \oplus D \otimes C \oplus E) = D \oplus C \oplus D \otimes C \oplus E.$$

В случае выполнения этого критерия общее решение уравнения позволяет синтезировать алгоритм траекторного управления в виде:

$$U = [D \oplus C \oplus D \otimes C \oplus E] \oplus [I \oplus (B \oplus D) \otimes (I \oplus C)] \otimes V, \text{ где } V \in M_{n \times n}(B) \text{ произвольно.}$$

Возвращение в булеву алгебру B позволяет записать приведенные критерий и алгоритм в исходных обозначениях. Так, для более простой системы, в уравнении которой отсутствует U' , критерий запишется в виде $B \cdot C' \cdot E = C' \cdot E$,

а алгоритм – в виде

$$U = C' \cdot E + (B \cdot C')' \cdot V.$$

Для «линейной» стационарной булево-матричной системы, являющейся частным случаем рассмотренной и описываемой стандартным уравнением $X[t+1] = A \cdot X[t] + B \cdot U[t]$, $X[0] = X_0$, $t \in N = \{0, 1, 2, \dots\}$,

критерий в непосредственных обозначениях имеет вид

$$B \cdot (A \cdot X^*[t])' \cdot X^*[t+1] = (A \cdot X^*[t])' \cdot X^*[t+1],$$

а алгоритм синтезируется в виде

$$U[t] = (A \cdot X^*[t])' \cdot X^*[t+1] + (B \cdot (A \cdot X^*[t])')' \cdot V[t] \text{ с произвольным } V[t] \in M_{n \times n}(B).$$

Отметим, что в последнем частном случае решение задачи терминального управления, когда заданы X_0 и X^* и при некотором t^* требуется достичь $X[t^*] = X^*$, опирается на решение прямой задачи $X[t] = AX[0] + B\{A(U[0] + \dots + U[t-2]) + U[t-1]\}$ и приводится к решению относительно неизвестных $U[0], \dots, U[t^*-1]$ булево-матричного уравнения $B\{A(U[0] + \dots + U[t^*-2]) + U[t^*-1]\} + AX_0 = X^*$, которое при надлежащей трактовке может быть отнесено к рассмотренному выше типу $ax + c = f$.

Заключение: образовательные аспекты булевой алгебры

Методически оправданным и целесообразным представляется уже то обстоятельство, что последовательное изучение, по существу одного и того же, математического аппарата в трех содержательных интерпретациях, указанных в начале данной работы, способствует его более глубокому усвоению и закреплению в течение всего изучения математики и информатики. Но гораздо более существенно то, что указанные разделы закладывают прочный фундамент под практически все без исключения математические методы, актуальные для современной прикладной математики.

Действительно, АЛГЕБРА ЛОГИКИ, будучи основой современного формализованного построения самой математики [7], аксиоматического метода, математических рассуждений и доказательств, является в то же время базой для ФОРМАЛЬНОЙ, ОБЩЕЙ и НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ,

широко применяющихся в теоретических и прикладных задачах искусственного интеллекта. В то же время математическая логика является одним из краеугольных камней ИНФОРМАТИКИ, основой теории кодирования, тесно связанной с криптографией, также имеющей многочисленные приложения.

АЛГЕБРА МНОЖЕСТВ И ОТНОШЕНИЙ, будучи первой теорией собственно математики при ее аксиоматическом построении [7], имеет значительное прикладное значение, особенно в таких важных задачах, как задачи принятия решений. В последнее время значительное развитие получили методы принятия решений в условиях неопределенности, базирующиеся на теории нечетких множеств. Построение теории НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ и НЕЧЕТКИХ ОТНОШЕНИЙ в развитие теории обычных (четких) множеств и отношений представляется вполне заслуживающей того, чтобы занять надлежащее место в математическом образовании. Другое направление развития теории множеств - теория КОМПЛЕКТОВ или МУЛЬТИМНОЖЕСТВ, допускающих наличие (в отличие от обычных множеств) повторяющихся элементов (совпадающих элементов, нескольких экземпляров одного и того же элемента) - также имеет большое прикладное значение, которое с позиций информатики связывается с задачами построения различного рода баз данных, но имеет и самостоятельную интерпретацию. Методически важным является и тот факт, что множества, нечеткие множества и комплекты имеют ярко выраженную математико-статистическую интерпретацию – но это связано уже с третьей булевой алгеброй.

АЛГЕБРА СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ является основой ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ, прикладное значение которых, особенно последней, во всех без исключения областях человеческой деятельности столь велико, что необходимость изучения этой третьей интерпретации булевой алгебры уже давно не вызывает никаких сомнений. Курс теории вероятностей, максимально ориентированный на статистические приложения, может вполне быть «облегчен» ограничением изучения конечных алгебр событий, классического определения вероятности, дискретных (даже конечных) случайных величин и знакомством, на уровне использования, с пакетами прикладных программ. Основное понятие математической статистики - случайная выборка – систематизируется с привлечением как понятия обычного множества, так и понятий комплекта и нечеткого множества, если учесть, что абсолютный и относительный дискретные вариационные ряды имеют много общего соответственно с функциями экзemplарности комплектов и функциями принадлежности нечетких множеств. Тем самым исходные понятия различных направлений развития теории множеств оказываются тесно взаимоувязанными, подкрепляющими и закрепляющими друг друга.

Итак, представляется достаточно обоснованной уже в рамках данного эскизного изложения фундаментальная роль трех булевых и алгебр как актуальных и перспективных разделов математического образования. А так как без преувеличения можно утверждать, что решение любой прикладной задачи сводится к решению уравнений или их систем, то именно решению уравнений над булевыми алгебрами уделено основное внимание в данной работе.

Список использованных источников

1. Биркгоф Г. Теория структур. – М.: ИЛ, 1952. – 407 с.
2. Блюмин С.Л. Математические проблемы искусственного интеллекта: регулярность по Дж. фон Нейману в линейной и «линейной» алгебрах // Системы управления и информационные технологии. – 2003. - № 1-2 (12). – С. 90 – 94.
3. Блюмин С.Л. Дискретность против непрерывности при системном моделировании во времени и/или пространстве // Системы управления и информационные технологии. – 2004. - № 1 (13). – С. 4 – 9.
4. Блюмин С.Л. Реализация непосредственного использования булевой алгебры в нечеткой логике // Образовательные технологии. – Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 7. – Воронеж: Изд-во ВГПУ, 2001. – С. 49 – 53.
5. Блюмин С.Л. Адамарова матричная алгебра // Новые технологии в образовании. Сб. тр. Вып. 8. – Воронеж: ЦЧКИ, 2004. – С. 30 – 31.
6. Блюмин С.Л., Миловидов С.П. Метод назначаемых траекторий и обобщенное обращение в задачах управления линейными матричными системами. – Липецк: Изд-во ЛГТУ, 1994. – 76 с.
7. Бурбаки Н. Основные структуры анализа. Теория множеств. – М.: Мир, 1965. – 455 с.
8. Бурбаки Н. Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 516 с.
9. Общая алгебра / Под общ. ред. Л.А. Скорнякова. Т.2.– М.: Наука, 1991.– 480 с.
10. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. – М.: Наука, 1981. – 208 с.
11. Пандеф Е. Булевы матрицы // Булева алгебра и конечные автоматы. – М.: Мир, 1969.- С. 53 – 61.
12. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
13. Brown J. A Note on Fuzzy Sets // Information and control. – 1971. - № 18. – P. 32 – 39.
14. Golan J. Semirings and Affine Equations over Them: Theory and Applications. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. - 250 p.
15. Zadeh L. Fuzzy Sets // Information and control. – 1965. - № 8. – P. 338 – 353.