*Системы управления и информационные технологии. 2011. № 3. С. 73 – 75.*

# ПОРОГОВАЯ МОДЕЛЬ КОРРУПЦИОННОГО ПОВЕДЕНИЯ

В.В. Бреер, Д.А. Новиков
(Институт проблем управления РАН, Москва)

Рассматривается задача управления уровнем коррупционности в рамках модели, в которой участники, принимая решение о добросовестности своего поведения, пороговым образом учитывают агрегированное прогнозируемое поведение других участников.

## 1. Введение

На сегодняшний день известно немало исследований такого явления как коррупция. Обзор математических моделей коррупции можно найти, например, в [8, 10]. В настоящей работе рассматривается модель, в рамках которой каждый агент, принимая решения о том, вести ему себя добросовестно или недобросовестно (участвовать в коррупционной деятельности), ориентируется на агрегированное поведение других агентов, от которого зависит такой параметр как вероятность аудита.

Подобное пороговое поведение [2, 5] характеризуется определенным равновесием игры агентов. Изменяя параметры системы (вероятность аудита, величину штрафов и др.) управляющий орган может соответственно изменять и равновесные стратегии агентов.

Структура изложения следующая: во втором разделе описана модель коррупционного поведения, в третьем разделе исследуется эта модель (характеризуется равновесие Нэша игры агентов), в четвертом разделе ставится и решается задача управления коррупционным поведением.

## 2. Описание модели

Рассмотрим множество $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ *агентов*, каждый из которых осуществляет выбор одного из двух решений: «0» – вести себя *добросовестно* или «1» – вести себя недобросовестно. Обозначим через $x_i \in \{0; 1\}$ *действие* $i$-го агента, через $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – вектор действий всех агентов. Предположим, что от легальной деятельности $i$-ый агент получает доход $h_i \geq 0$, от нелегальной деятельности – доход $H_i \geq 0$, причем $H_i > h_i$.

Пусть фиксирован *штраф* $\chi_i$, налагаемый по результатам *аудита* в случае установления факта нелегальной деятельности (считаем, что аудит ее в случае наличия устанавливает точно). Обозначим через $p(x)$ вероятность *аудита*. В настоящей работе будем считать, что вероятность аудита каждого агента растет с ростом числа его недобросовестных оппонентов (хотя возможны и другие варианты – см. [8]).

*Целевая функция* $i$-го агента имеет вид:

(1) $F_i(x) = (1 - x_i)\, h_i + x_i\, H_i\, (1 - p(x)) - \chi_i\, x_i\, p(x)$.

«Канонизируем» (в смысле приведения к стандартной модели коллективного порогового поведения [1, 5]) целевую функцию:

$$\begin{aligned}&(1-x_i)h_i + x_i H_i\left(1-p(x)\right) - \chi_i x_i p(x) = \\ &= h_i + x_i\left(H_i - h_i\right) - x_i p(x)\left(H_i + \chi_i\right) = \\ &= h_i + \left(H_i + \chi_i\right)\left(\frac{H_i - h_i}{H_i + \chi_i} - p(x)\right)x_i.\end{aligned}$$

Итак:

$$F_i(x) = h_i + \left(H_i + \chi_i\right)\left(\frac{H_i - h_i}{H_i + \chi_i} - p(x)\right)x_i .$$

Отделим *обстановку игры* $x_{-i} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ от действия $x_i$ агента $i$, считая, что вероятность аудита каждого агента зависит от действий других агентов и явным образом не зависит от его собственных действий:

$$F_i\left(x_i, x_{-i}\right) = h_i + \left(H_i + \chi_i\right)\left(\frac{H_i - h_i}{H_i + \chi_i} - p\left(x_{-i}\right)\right)x_i .$$

Как указывалось в моделях страхования [1, 0], субъективный риск $\left(1+\xi_i\right)p\left(x_{-i}\right)$, где $\xi_i$ – коэффициент несклонности к риску, отражает субъективное восприятие $i$-ым агентом объективного риска

$p\left(x_{-i}\right)$. Поэтому целевую функцию с учетом *несклонности к риску* можно переписать в следующем виде:

$$F_i\left(x_i, x_{-i}\right) = h_i + \left(H_i + \chi_i\right)\left(1+\xi_i\right)\left(\frac{H_i - h_i}{\left(1+\xi_i\right)\left(H_i + \chi_i\right)} - p\left(x_{-i}\right)\right)x_i .$$

Простейший *анонимный случай* (характеризуемый тем, что влияние каждого агента на остальных одинаково [6]) – когда вероятность аудита определяется эмпирической вероятностью $p\left(x_{-i}\right) = \frac{\alpha}{n-1}\sum_{j \neq i} x_i$, где $\alpha \in (0; 1]$. Тогда целевая функция примет вид:

(2) $F_i\left(x_i, x_{-i}\right) = h_i + \alpha\,\frac{\left(H_i + \chi_i\right)\left(1+\xi_i\right)}{n-1}\left(\frac{(n-1)\left(H_i - h_i\right)}{\alpha\left(1+\xi_i\right)\left(H_i + \chi_i\right)} - \sum_{j \neq i} x_i\right)x_i .$

Получили *игру* агентов $\Gamma = (N, \{0; 1\}; F_i(x_i, x_{-i})\}_{i \in N})$ в нормальной форме [9], где каждый агент принимает свое решение однократно, одновременно с другими агентами и независимо от них. Исследуем *равновесие Нэша* этой игры.

## 3. Исследование модели

Обозначим *порог* $i$-го агента через

(3) $m_i = \frac{(n-1)\left(H_i - h_i\right)}{\alpha\left(1+\xi_i\right)\left(H_i + \chi_i\right)}$, $\Sigma_i = \sum_{j \neq i} x_j$, $i \in N$,

тогда наилучший ответ [7, 9] $i$-го агента есть

(4) $BR_i(x_{-i}) = \begin{cases} 1, \Sigma_i \le m_i \\ 0, \Sigma_i > m_i \end{cases}.$

Упорядочим агентов по убыванию порогов: $m_1 \ge m_2 \ge \ldots \ge m_n$. Следующее утверждение является следствием общих результатов исследования пороговых моделей коллективного поведения, приведенных в [4, 6].

Утверждение 1. Единственным равновесием Нэша $x^*$ игры агентов является вектор действий

(5) $x_i^* = \begin{cases} 1, i \le k \\ 0, i > k \end{cases},$

где

(6) $k = \max\ \{j \in N \mid m_i \ge i,\ i = \overline{1, j}\ \}$.

## 4. Задача управления коррупционным поведением

Значение параметра $k$ – число агентов, выбирающих ненулевые действия – может интерпретироваться как *уровень коррупционности*.

Этот уровень коррупционности зависит от вектора $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ порогов агентов (то есть $k = k(m)$), которые, в свою очередь, в соответствии с выражением (3) зависят от соответствующих векторов доходов $h$ и $H$, вектора штрафов $\chi$, вектора коэффициентов несклонности к риску $\xi$ и параметра $\alpha$. Следовательно, целенаправленно изменяя эти параметры, управляющий орган – *центр*, может изменять и уровень коррупционности, то есть осуществлять управление последним.

При этом:

– воздействие на параметры $\chi$ и $\alpha$ может интерпретироваться как *институциональное управление* (изменение ограничений и норм деятельности [11], то есть в рассматриваемой модели – величин штрафов и вероятности аудита);

– воздействие на параметры $h$ и $H$ может интерпретироваться как *мотивационное управление* (изменение предпочтений [11], то есть доходов от различных видов деятельности);

– воздействие на параметры $\xi$ может интерпретироваться как *информационное управление* (изменение информированности [11], то есть субъективного восприятия объективной реальности, в частности – величин потерь).

Обычно *целью управления* является снижение уровня коррупционности. Обозначим цель управления (уровень коррупционности, которого требуется достичь) через $q \le k$.

Пусть снижение порога $j$-го агента с $m_j^0$ до $m_j$ требует затрат $c(m_j^0; m_j)$ (отметим, что функция $c(\cdot, \cdot)$ не зависит от номера агента), которые монотонно возрастают по разности $m_j^0 - m_j$. Следовательно, задача управления уровнем коррупционности может быть формально поставлена следующим образом – найти управляющие воздействия, требующие минимальных суммарных затрат и обеспечивающие заданный уровень коррупционности $q$:

$$(7)\quad \begin{cases} \sum_{j \in N} c(m_j^0, m_j) \to \min_{\{m_j \ge 0\}_{j \in N}} \\ \max\ \{j \in N \mid m_i \ge i, i = \overline{1, j}\} = q \end{cases}.$$

Обозначим $p(q) = \min\ \{i \in N \mid m_i \ge q,\ m_{i+1} < q\}$. Из структуры равновесия Нэша (5) следует справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2. При решении задачи управления уровнем коррупционности (7) достаточно ограничиться воздействием на агентов, имеющих пороги, лежащие в диапазоне $[m_q; q]$ (то есть на агентов.

Следовательно, в силу монотонности затрат получаем следующее решение задачи управления.

Утверждение 3. В квази-оптимальном[1] решении задачи управления уровнем коррупционности, пороги агентов с номерами от $q$ до $p(q)$, должны быть снижены до величины $q$, что потребует следующих затрат на управление:

$$(8)\quad C(q, k) = \sum_{j=q}^{p(q)} c(m_j, q).$$

Следствие. Оптимальное управление не зависит от начального равновесия Нэша.

Отметим, что аналогичные утверждению 3 и следствию из него результаты были получены в [3] для моделей управления толпой. В указанной работе для непрерывного случая получено аналитическое выражение для минимальных затрат на управление.

Имея оценку (8) затрат на управление, можно ставить и другие задачи – например, нахождения допустимого с точки зрения бюджетного ограничения на затраты (8) оптимального (по дополнительным критериям) уровня коррупционности $q$, и т.д. – подобные задачи будут достаточно простыми оптимизационными задачами.

В заключение вернемся к вопросу о выборе вида управления – институционального, мотивационного и/или информационного. Для этого вспомним, что выше мы предположили, что заданы затраты $c(m_j^0; m_j)$ на снижение порога $j$-го агента с $m_j^0$ до $m_j$. Но эти затраты в общем случае могут складываться из затрат на изменение каждого из параметров, входящих в правую часть выражения (3). Обозначая $c_\beta(\beta^0, \beta)$ – затраты на изменение параметра $\beta \in \{h, H, \chi, \xi, \alpha\}$, задачу (8) можно детализировать следующим образом

$$(9)\quad \sum_{j=q}^{p(q)} \sum_{\beta \in \mathrm{B}} c_\beta(\beta^0, q) \to \min_{\{\beta_i \in \mathrm{B}\}_{i=\overline{q, p(q)}},\ (3)}.$$

Качественные свойства решения задачи (9) в существенной степени определяются свойствами зависимости (3) величины порога агента от других параметров. Например, фиксируем произвольного агента (номер будем в дальнейшем опускать). Пусть $\xi \ge 0$, $h = \gamma H$, $\chi = \Delta H$, где $\gamma \in (0; 1]$, $\Delta \ge 1$. Тогда из выражения (3) следует, что

$$(10)\quad m = \frac{n-1}{\alpha} \frac{1-\gamma}{(1+\xi)(1+\Delta)}.$$

Величина порога (10) простым образом зависит от значений трех безразмерных параметров ($\gamma$, $\xi$, $\Delta$), соответствующих различным видам управления. Анализ свойств задачи (9) в каждом конкретном прикладном случае даст возможность выбирать оптимальную комбинацию управлений различных видов и/или качественно судить о сравнительной эффективности институционального, мотивационного и информационного управления для реализации требуемого равновесия.

[1] *О квазиоптимальности речь идет потому, что мы предположили, что при сумме действий других агентов, равном порогу, данный агент выбирает «действовать». Для того чтобы он бездействовал, порог должен быть дополнительно снижен на сколь угодно малую величину.*

**Литература**

1 Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Кулик О.С., Новиков Д.А. Механизмы страхования в социально-экономических системах. – М.: ИПУ РАН, 2002.

2 Бреер В.В. Модели критической массы (обзор) // Управление большими системами. 2011. № 4.

3 Бреер В.В., Новиков Д.А. Модели управления толпой // Проблемы управления. 2012. № 1.

4 Бреер В.В., Новиков Д.А. Пороговые модели взаимного страхования // Математическая теория игр и ее приложения (в печати)

5 Бреер В.В. Теоретико-игровые модели конформного коллективного поведения // Автоматика и телемеханика (в печати).

6 Бреер В.В. Теоретико-игровая модель неанонимного порогового конформного поведения // Управление большими системами. 2010. № 31. С. 162 – 176.

7 Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики. – М.: МАКС пресс, 2005.

8 Выборнов Р.А. Модели и методы управления организационными системами с коррупционным поведением участников. – М.: ИПУ РАН, 2006.

9 Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. – М.: Синтег, 2002.

10 Левин М.И., Цирик М.Л. Коррупция как объект математического моделирования // Экономика и математические методы. 1998. № 5. С. 32 – 34.

11 Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. 2-е изд. – М.: Физматлит, 2007.