РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ

НОВИКОВ Д.А.

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТИМУЛИРОВАНИЯ В АКТИВНЫХ СИСТЕМАХ

Москва - 1998

УДК 519.8 + 658.3

Н - 73

Новиков Д.А. Обобщенные решения задач стимулирования в активных системах. М.: Институт проблем управления РАН, 1998. - 68 с.

В работе рассматриваются задачи анализа устойчивости решений задач стимулирования в активных системах. Доказывается, что в большинстве базовых задач стимулирования оптимальное решение устойчиво по параметрам модели, в то время как эффективность этого решения не устойчива. Возникающая при этом проблема адекватности модели реальной социально-экономической системе решается при помощи построения регуляризирующего принципа оптимальности, позволяющего гарантировать некоторую (зависящую от возможных "возмущений" модели) эффективность управления реальными системами из заданного класса за счет использования ε-оптимальных решений. Предлагаемое понятие обобщенного решения задачи стимулирования позволяет конструктивно согласовывать эффективности решений и их области устойчивости и адекватности.

Рецензент: д.т.н., проф. Э.А.Трахтенгерц

Утверждено к печати редакционным советом Института.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблеме изучения устойчивости – анализу изменений решения при малых вариациях параметров задачи, модели и т.д. – традиционно уделяется значительное внимание, особенно на стыке математики с прикладными науками [10,12,16]. Однако, во многих случаях исследователи, осознавая важность этой проблемы, тем не менее ограничивались лишь нахождением решений. Подобная ситуация имеет на сегодняшний день место и в ряде моделей теории активных систем (пример – задачи стимулирования и др.) – разделе теории управления социально-экономическими системами, изучающем теоретико-игровые модели механизмов их функционирования и свойства последних, обусловленные активностью элементов системы [3-6]. Настоящая работа является, во-первых, попыткой восполнить существующий пробел, а, во-вторых, она может рассматриваться как конструктивный призыв к исследователям операций уделять большее внимание проблемам устойчивости решений и адекватности моделей.

Рассмотрим модель двухуровневой активной системы (АС), состоящей из управляющего органа – центра – на верхнем уровне иерархии и одного или нескольких управляемых объектов – активных элементов (АЭ) на нижнем. В рамках теоретико-игрового описания интересы участников АС отражены их целевыми функциями. Стратегией центра является выбор механизма управления (функции стимулирования, процедуры планирования и т.д.) и сообщение его активным элементам, стратегией АЭ – выбор определенных состояний – действий (плюс быть может – сообщение центру некоторой информации). При этом считается, что исследователь операций находится на позициях оперирующей стороны – центра, отражающего цели и интересы активной системы в целом.

При решении задач синтеза оптимальных механизмов управления активными системами, в том числе – механизмов стимулирования, как в детерминированных активных системах [3,5], так и в АС с неопределенностью [1,2,9,13,14,15], предполагается, что на момент принятия решений центр обладает достоверной информацией о тех параметрах АС, которые не относятся к неопределенным. Так, например, при рассмотрении детерминированных АС считается, что множество допустимых действий АЭ, его функция дохода (затрат), целевая функция самого центра и т.д. точно известны центру и, следовательно, исследователю операций. Однако, следует помнить, что последний имеет дело не с реальной системой, а с некоторой ее моделью, то есть ищет механизм управления, оптимальный (критерием эффективности является значение (максимальное или гарантированное) целевой функции центра на множестве решений игры АЭ) в исследуемой модели реальной социально-экономической системы. Поэтому, так или иначе, особенно на этапе внедрения и практического использования теоретических разработок, возникает вопрос об адекватности модели реальной моделируемой системе и, следовательно, возникает необходимость исследования зависимости решений изучаемых задач от начальных данных - параметров модели.

Действительно, представим себе следующую ситуацию. Пусть решена задача стимулирования в детерминированной АС в предположении, что параметры модели достаточно точно соответствуют или максимально возможно в рамках данного описания близки к параметрам некоторой реальной системы. А что будет, если параметры моделируемой системы "немного" отличаются от параметров реальной АС ? Получается, что задача стимулирования решалась не для "той" активной системы. Отрицать такую возможность, естественно, нельзя. Поэтому необходимо получить ответы на следующие достаточно общие вопросы:

- насколько оптимальное решение чувствительно к ошибкам описания модели, то есть будут ли малые "возмущения" модели приводить к столь же малым изменениям оптимального решения (условно назовем эту задачу задачей анализа устойчивости оптимального решения по параметрам модели, точнее - задачей анализа устойчивости принципа оптимальности);

- будет ли механизм управления, обладающий определенными свойствами в рамках модели (например, оптимальность, эффективность не ниже заданной и т.д.), обладать этими же свойствами и в реальной АС и насколько широк класс реальных АС, в которых данный механизм еще обладает этими свойствами (условно назовем эту задачу задачей анализа адекватности модели).

Иначе говоря, необходимо исследовать, во-первых, корректность решаемых задач, то есть - устойчивость принципов оптимальности в изучаемых моделях и, во-вторых - адекватность моделей реальным системам.

Неадекватность модели, обусловленная неточным знанием параметров моделируемой системы или какими-либо еще факторами, может рассматриваться как одна из разновидностей неопределенности, несколько отличающейся от исследуемых ранее в теории активных систем (ТАС) [3,5] и других разделах теории управления социально-экономическими системами, изучающих теоретико-игровые модели механизмов управления (теория иерархических игр [7,9], теория контрактов (см. обзор [1]), теория реализуемости (см. обзор [2])). Отличие заключается в следующем. Будем различать два случая: в первом случае центр и исследователь операций знают, что имеют неполную информацию о том или ином параметре, то есть знают, что имеет место неопределенность (того или иного типа, вида и т.д. [15]); во втором случае исследователь операций не знает о неадекватности модели.

Первый случай соответствует классу АС (как моделей реальных организационных систем) с неопределенностью в традиционном понимании, а второй случай - неопределенности, обусловленной незнанием. Взаимосвязь этих двух случаев достаточно очевидна и подробно обсуждается в заключении по результатам проведенного анализа. Действительно, если бы исследователь операций (и оперирующая сторона) знал, что модель не является адекватной - например, имел бы информацию о том, что реальная функция затрат отличается от используемой в модели и лежит, например, в определенном диапазоне, то в соответствии с гипотезой рационального поведения в условиях неопределенности он должен был бы учесть эту информацию и скорректировать решаемую задачу.

В случае такой корректировки для решения новой, "правильной" задачи можно использовать полученные ранее результаты изучения АС с неопределенностью [15]. Поэтому, приступая к исследованию эффективности стимулирования с точки зрения неопределенности, обусловленной незнанием (проблема адекватности модели), мы, фактически, пытаемся взглянуть на АС "снаружи", именно как на модель некоторой социально-экономической системы, причем ниже считается, что структура модели АС выбрана правильно, а неадекватность может появляться только из-за незнания точных значений параметров.

Следует признать, что проблемы устойчивости решений и адекватности (точнее - проблема микроадекватности, так как структура модели предполагается правильной) конкретных моделей активных систем, к сожалению, пока не привлекли должного внимания специалистов. Это тем более странно, что на сегодняшний день существует достаточно большое число общих результатов исследования устойчивости принципов оптимальности в задачах исследования операций [7,11,12] и других задачах [16]. Тем не менее, с одной стороны, эти общие результаты почти не используются при разработке частных моделей, а с другой - в упомянутых работах акцент делается именно на устойчивость, а проблема адекватности почти не затрагивается.

Не претендуя на полноту анализа (задача детального исследования устойчивости принципов оптимальности хотя бы для известных моделей ТАС представляется совершенно необозримой), приведем некоторые подходы к решению проблем устойчивости и адекватности для ряда базовых моделей механизмов стимулирования в активных системах.

Качественно, основная идея, реализуемая в настоящей работе, заключается в следующем. Эффективностью стимулирования в известных на сегодняшний день моделях является значение (гарантированное или максимальное) целевой функции центра на множестве решений игры АЭ (множестве реализуемых действий - тех действий, которые АЭ выгодно выбирать при использовании центром данной системы стимулирования).

С таким критерием эффективности задача синтеза оптимальной функции стимулирования заключается в поиске допустимой функции стимулирования, имеющей максимальную эффективность. Использование оптимальных (в определенном выше смысле) решений приводит к тому, что они, как правило, оказываются неоптимальными при малых вариациях параметров модели. Возможным путем преодоления этого недостатка является расширение множества "оптимальных" решений за счет включения в него ε-оптимальных (приближенных решений, почти решений и т.д.). Оказывается, что такое ослабление понятия "оптимальность" (корректно называемое регуляризацией [17] принципа оптимальности [7,11,12]) позволяет, установив взаимосвязь между возможной неточностью описания модели и величиной ε, гарантировать некоторый уровень эффективности множества решений в заданном классе реальных систем, то есть расширить класс гарантированной применимости решений за счет использования менее эффективных из них, нежели, чем оптимальные в классическом понимании. Иными словами, вместо рассмотрения фиксированной модели АС, необходимо исследовать семейство моделей. Для параметрического решения задачи стимулирования на семействе моделей предлагается использовать термин "обобщенное решение задачи стимулирования", которое включает в себя как конкретное решение, оптимальное в заданной модели, так и решения для ряда моделей АС с тем или иным типом и видом неопределенности, в том числе - практически не исследованным на сегодняшний день случем смешанной неопределенности [15].

Изложение материала настоящей работы имеет следующую структуру.

Во втором разделе предлагаются общие (по крайней мере, для всех частных моделей, рассматривемых ниже) формальные определения устойчивости и адекватности, и вводится понятие обобщенного решения задачи управления.

В третьем разделе проводится детальное исследование устойчивости решений задачи стимулирования в простейшей - детерминированной - модели и изучается ее адекватность. Четвертый, пятый и шестой разделы содержат менее глубокое, чем в третьем разделе, исследование проблем устойчивости и адекватности для некоторых частных базовых моделей механизмов стимулирования в активных системах, функционирующих в условиях, соответственно, интервальной, вероятностной и нечеткой неопределенности. Следует отметить, что ниже используются терминология, обозначения, система классификаций, а также результаты исследования задач стимулирования, приведенные в [15], то есть изучаются свойства уже решенных прямых базовых задач стимулирования первого рода.

Заключение, наряду с перечислением основных результатов, содержит качественное обсуждение обоснования достаточно очевидного, но, к сожалению, редко принимаемого в качестве императива на практике основного положения настоящей работы - теоретическое изучение устойчивости решений и адекватности модели, то есть - использование обобщенных решений является обязательным требованием к исследователю операций, использующему математическое (теоретико-игровое) моделирование как метод исследования сложных социально-экономических систем.

НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

(приводятся в "алфавитном" порядке)

A - множество допустимых действий АЭ;

A_0 - множество допустимых результаов деятельности АЭ;

$\beta \ge 0$ - параметр, отражающий неточность информированности об ограничениях механизма стимулирования;

$C(y)$ - функция затрат АЭ;

C - ограничение механизма стимулирования;

$D_1(\delta) = \max\limits_{m \in \mathfrak{M}_\delta(\tilde{m})} | x^* - x^*_\delta(m) |$, $x^* \in \mathfrak{K}(\tilde{m})$, $x^*_\delta(m) \in \mathfrak{K}(m)$ - "критерий" устойчивости скачкообразной системы стимулирования;

$D_2(\delta) = \max\limits_{m \in \mathfrak{M}_\delta(\tilde{m})} \min\limits_{\chi \in \mathfrak{K}(\tilde{m})} | K(\chi,\tilde{m}) - K(\chi,m) |$ - "критерий" адекватности модели $\tilde{m}$ классу реальных АС $\mathfrak{M}_\delta(\tilde{m})$;

$D_\nu(A,B) = \sup\limits_{a \in A} \inf\limits_{b \in B} \nu(a,b)$ - отклонение между множествами A и B по метрике ν;

$\Delta(\mathfrak{K},\tilde{m}) = \max \{ \delta \ge 0 \mid \forall m \in \mathfrak{M}: \mu(\tilde{m},m) \le \delta \;\; \mathfrak{K}(\tilde{m}) \cap \mathfrak{K}(m) \ne \varnothing \}$ - "радиус" области адекватности (2.7);

δ - "расстояние" между реальной АС и ее моделью, параметр, отражающий неточность информированности о предпочтениях АЭ;

$\Phi(\chi,m)$: $M \times \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^1$ - критерий эффективности;

$\Phi(y)$ - целевая функция центра;

$f(y) = h(y) - \chi(y)$, $f(y) = \sigma(y) - C(y)$ - целевая функция АЭ;

$\gamma \ge 0$ - параметр, отражающий неточность информированности о предпочтениях центра;

$H_\nu(A,B) = \max (D_\nu(A,B), D_\nu(B,A))$ - растояние Хаусдорфа между множествами A и B, порожденное метрикой ν;

$H(y)$ - функция дохода центра;

$h(y)$ - функция дохода АЭ;

$K(\chi) = \max\limits_{y \in P(\chi)} \Phi(y)$ - эффективность стимулирования в детерминированной АС;

$K^\Gamma(\chi) = \min\limits_{y \in P(\chi)} \Phi(y)$ - гарантированная эффективность стимулирования в детерминированной АС;

$K_0 = \Phi [h^{-1} [h(r) - C]]$ - эффективность стимулирования в детерминированной АС при условии $y_1 \ge y^+$;

$\xi \ge 0$ - параметр, отражающий неточность информированности о множестве допустимых действий АЭ;

$\mathfrak{M}$ - множество моделей АС;

$\mathfrak{M}(\tilde{m}) = \{ m \in \mathfrak{M} \mid \mathfrak{K}(\tilde{m}) \cap \mathfrak{K}(m) \neq \varnothing \} \subseteq \mathfrak{M}$ - область адекватности модели $\tilde{m} \in \mathfrak{M}$ (2.6);

$\mathfrak{M}_\Delta(\mathfrak{K},\tilde{m}) = \{ m \in \mathfrak{M} \mid \mu(\tilde{m},m) \le \Delta(\mathfrak{K},\tilde{m}) \}$ - область адекватности, определяемая псевдометрикой μ (2.8);

$\mathfrak{M}(\mathfrak{K},\tilde{m},\chi) = \{ m \in \mathfrak{M} \mid \chi \in \mathfrak{K}(m) \}$ - область адекватности (абсолютной устойчивости) решения χ;

$m \in \mathfrak{M}$ - реальная АС, $\tilde{m} \in \mathfrak{M}$ - модель АС;

M - множество допустимых стратегий центра;

$\mu(\cdot,\cdot)$ - псевдометрика на $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$;

$P(\chi,x) = \operatorname{Arg}\max\limits_{y \in A} f(x,y)$ - множество решений игры (реализуемых действий);

$P = [y^-, y^+]$ - максимальное множество реализуемых действий в детерминированной задаче стимулирования;

$\mathfrak{K}: \mathfrak{B} \to 2^M \setminus \{\varnothing\}$, где $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{M}$ - принцип оптимальности;

$\mathfrak{K}_\varepsilon(m)$ - множество ε-оптимальных стратегий центра (2.1);

$\mathfrak{K}_0$ - "классический" принцип оптимальности (множество решений, доставляющих абсолютный максимум критерия эффективности);

$r = y_2 = \arg\max\limits_{y \in A} h(y)$;

SP - класс однопиковых функций;

SP' - класс квазиоднопиковых функций;

$\sigma(x,y)$ - функция стимулирования;

X - множество допустимых планов;

$x \in X$ - план;

$\chi(x,y) \in M$ - функция штрафов (стратегия центра);

$\chi_c(x,y) = \begin{cases} 0, & y \ (\le,\ \ge)\ x \\ C, & y \ (>,\ <)\ x \end{cases}$ - скачкообразная система стимулирования;

$\{ \chi, \mathfrak{M}(\mathfrak{K},\tilde{m},\chi) \}_{\chi \in \mathfrak{K}(\tilde{m})}$ - обобщенное решение задачи стимулирования в модели $\tilde{m}$ с принципом оптимальности $\mathfrak{K}$;

$\{ \chi \in \mathfrak{K}_\varepsilon(\tilde{m}),\ \varepsilon \ge \varepsilon_0^{\cdot}(\delta) \}_{\delta \ge 0}$ - обобщенное решение задачи стимулирования в модели $\tilde{m}$ с критериальным принципом оптимальности $\mathfrak{K}_\varepsilon$;

$y \in A$ - стратегия (действие) АЭ;

$y_1 = \arg\max\limits_{y \in A} H(y)$;

$y^\pm = \max\ (\min)\ \{ y \in A \mid h(y) \ge h(r) - C \}$ - левая (правая) границы множества P.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОНЯТИЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ И АДЕКВАТНОСТИ МОДЕЛИ

Рассмотрим процесс построения математической модели некоторой реальной социально-экономической системы (рисунок 1). Первым шагом является выбор того "языка", на котором формулируется модель, то есть того математического аппарата, который будет использоваться (горизонтальная пунктирная линия на рисунке 1 является условной границей между реальностью и моделями). Как правило, этот этап характеризуется высоким уровнем абстрагирования - выбираемый класс моделей намного шире, чем моделируемый объект. Возможной ошибкой, которую может совершить исследователь операций на этом шаге является выбор неадекватного языка описания, то есть ошибка может иметь место на уровне методологии.

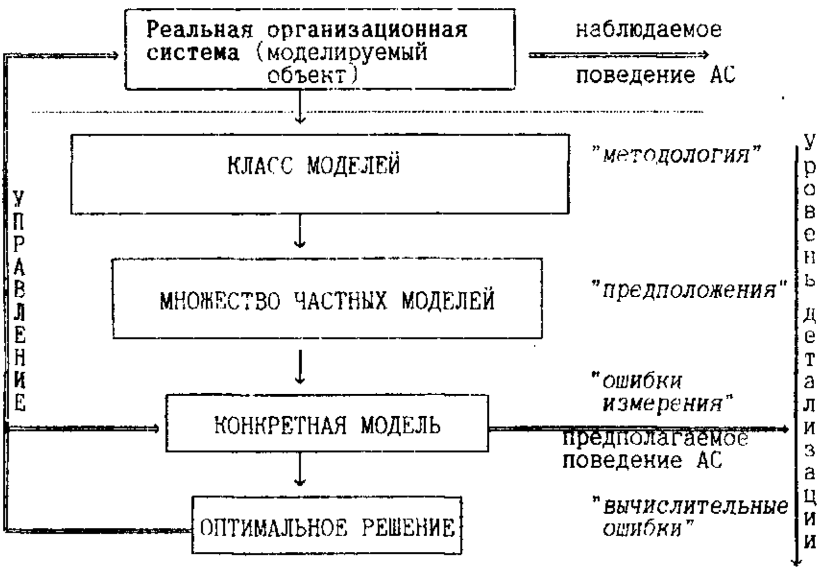

Рис. 1. Процесс математического моделирования и проблемы устойчивости и адекватности

Например, может предполагаться, что взаимодействие и пассивное поведение элементов организационной системы может быть описано системой обыкновенных дифференциальных уравнений, в то время, как элементы являются активными и динамика их коллективного поведения более адекватно может описываться на языке теории активных систем и теории повторяющихся игр.

Следующим этапом по уровню детализации является построение множества частных моделей, при переходе к которым вводятся те или иные предположения относительно свойств параметров модели. Возникающие здесь ошибки описания структуры модели могут быть вызваны неправильными представлениями о свойствах элементов моделируемого объекта и их взаимодействии. Например, при построении теоретико-игровой модели механизма стимулирования в теории активных систем иногда вводятся предположения о независимости элементов, квазиоднопиковости функций дохода активных элементов, монотонности их функций затрат и т.д. В реальной же системе элементы могут быть зависимы, функции дохода могут иметь несколько глобальных максимумов и т.д.

После задания структуры модели посредством выбора определенных значений параметров (в том числе - числовых) происходит переход к некоторой конкретной модели, которая считается аналогом моделируемого объекта. Источник возникающих на этом этапе "ошибок измерения" очевиден, хотя он и имеет достаточно сложную природу и заслуживает отдельного обсуждения.

Когда для конкретной модели решается задача синтеза оптимальных управлений, то, если существует аналитическое решение для множества частных моделей, то, как правило, частные значения параметров, соответствующие конкретной модели, подставляются в это решение. Если аналитического решения не существует, то оптимальное решение ищется с привлечением вычислительной техники. На этом этапе - при численном счете на ЭВМ - возникают вычислительные ошибки.

Изучаемая в большинстве работ по устойчивости решений задач исследования операций [7,11,12,16] проблема связана с "возмущениями", вызванными ошибками в "предположениях", "ошибками измерения" и "вычислительными ошибками" (см. рисунок 1), и в большинстве случаев сводится к исследованию зависимости оптимального решения от параметров модели. Если эта зависимость является непрерывной, то малые ошибки на различных уровнях детализации приведут к малым отклонениям решения, оптимального в возмущенной модели, от "истинного". Тогда, решая задачу управления по приближенным данным, можно обоснованно говорить о нахождении приближенного решения.

Если зависимость оптимального решения от параметров модели не является непрерывной или решение не определено в некоторой окрестности точного решения, то необходимо использование методов регуляризации [12]. Следует отметить, что предложенный Д.А.Молодцовым [11,12] подход к исследованию устойчивости принципов оптимальности, в отличие от теории некорректных задач [17] (в которой семейство приближенных решений совпадает с семейством окрестностей точного решения в некоторой топологии - такой подход достаточно распространен в исследования по устойчивости [10]), использует вместо топологии на множестве решений само семейство приближенных решений, что позволяет достаточно просто согласовать понятия устойчивости и приближенного решения.

Перейдем к определению понятия устойчивости решения задачи стимулирования.

Наиболее близкой к рассматриваемым ниже в настоящей работе задачам стимулирования является игра $Г_2$, для которой известно, что она корректна (устойчива) относительно целевой функции центра и в общем случае неустойчива относительно целевой функции активного элемента (см., например [7]). Регуляризация этой задачи возможна и заключается в искусственном введении неточности вычисления максимума целевой функции АЭ [7,11].

Однако, как отмечалось во введении, помимо проблемы устойчивости существует и проблема адекватности модели, исследованию которой не уделялось должного внимания, в том числе и в упомянутых работах. Обсудим качественно, что мы будем понимать под адекватностью. Для этого вернемся к рисунку 1.

Оптимальное решение, полученное аналитически или численным счетом для конкретной модели, является оптимальным в том смысле, что при использовании данного управления поведение модели доставляет максимум (или обеспечивает некоторое значение) используемому критерию эффективности. Рассмотрим, насколько обоснованным является использование этого решения в реальной системе - моделируемом объекте.

Сделав маленькое отступление, отметим, что здесь и далее мы будем считать, что, несмотря на то, что, зачастую, именно этот аспект является основной проблемой, класс моделей и структура модели выбраны правильно. Кроме того, в большинстве базовых задач стимулирования удается найти именно аналитическое решение, так что условно можно считать, что ошибки в "методологии", "предположениях" и "вычислительные ошибки" отсутствуют. Значит, при правильно выбранном языке описания и структуре модели возможная неустойчивость решения и неадекватность модели (различие конкретной модели и моделируемого объекта) может быть вызвана только лишь "ошибками измерения" – использованием возмущенных значений параметров модели. Иными словами, условно можно считать, что модель и моделируемая система принадлежат одному "пространству".

Наблюдаемое поведение модели является с точки зрения исследователя операций (в силу незнания считающего, что модель адекватна) предполагаемым поведением реальной активной системы, которое в отсутствии возмущений будет оптимально в смысле выбранного критерия эффективности. Понятно, что в общем случае наблюдаемое поведение реальной АС и ее предполагаемое поведение могут различаться достаточно сильно. Следовательно, необходимо исследование адекватности модели, то есть – устойчивости поведения не модели, а реальной системы относительно ошибок моделирования.

Перейдем к формальным определениям.

Пусть $\mathfrak{M}$ – множество моделей активных систем, которому в силу введенных предположений принадлежат и реальная (моделируемая) АС $\mathfrak{m}$ и сама модель $\tilde{\mathfrak{m}}$. Предположим, что любой модели $\tilde{\mathfrak{m}} \in \mathfrak{M}$ соответствует одно и то же множество допустимых стратегий центра M. Для описания близости моделей введем псевдометрику μ – числовую функцию, определенную на $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ и удовлетворяющую следующим условиям: $\forall$ m, n, k $\in \mathfrak{M}$ выполнено: $\mu(m,m) = 0$, $\mu(m,n) = \mu(n,m)$, $\mu(m,n) + \mu(n,k) \geq \mu(m,k)$ [8].

Принципом оптимальности $\mathfrak{R}$, следуя [12], назовем $\mathfrak{R}$: $\mathfrak{B} \to 2^M \setminus \{\emptyset\}$, где $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{M}$, то есть точечно-множественное отображение, ставящее в соответствие каждой модели подмножество множества M.

Принцип оптимальности может быть задан и критерием эффективности $\Phi(\chi,\mathfrak{m})$, где $\chi \in M$, $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}$. Оптимальными ($\varepsilon$-оптимальными) будут стратегии из множества ($\varepsilon \geq 0$):

(2.1) $\mathfrak{R}_\varepsilon(\mathfrak{m}) = \{ \chi \in M \mid \Phi(\chi,\mathfrak{m}) \geq \sup_{t \in M} \Phi(t,\mathfrak{m}) - \varepsilon \}$.

Соответствующий принцип оптимальности называется критериальным.

Выделяют несколько задач выбора оптимальных решений [11].

Первая - задача частного выбора: для фиксированных принципа оптимальности $\mathfrak{K}$ и модели $\tilde{m} \in \mathfrak{M}$ найти множество $M^{*} \subset \mathfrak{K}(\tilde{m})$.

Вторая - задача полного выбора - нахождения всего множества $\mathfrak{K}(\tilde{m})$.

Третья - поиск оптимальной оценки эффективности при использовании критериального принципа опимальности:

$$(2.2)\ K(\tilde{m}) = \sup_{t \in M} \Phi(t,\tilde{m}).$$

Будем считать, что M - метрическое пространство с метрикой или псевдометрикой ν. Для множеств A, $B \subset M$ определим отклонение:

$$(2.3)\ D\nu\ (A,B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \nu(a,b)$$

и метрику Хаусдорфа [8]:

$$(2.4)\ H\nu\ (A,B) = \max\ \{\ D\nu(A,B),\ D\nu(B,A)\ \}.$$

В [11] предложено следующее определение.

Принцип оптимальности $\mathfrak{K}$ называется (слабо) устойчивым на модели $\tilde{m} \in \mathfrak{M}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любой модели $m \in \mathfrak{M}$, такой, что $\mu(\tilde{m},m) < \delta$, выполнено:

$$(2.5)\ (\ D\nu\ (\ \mathfrak{K}(\tilde{m}),\ \mathfrak{K}(m)\ ) < \varepsilon\ ) \quad H\nu\ (\ \mathfrak{K}(\tilde{m}),\ \mathfrak{K}(m)\ ) < \varepsilon.$$

Критериальный принцип оптимальности $\Phi(\chi,m)$ называется устойчивым на модели $\tilde{m} \in \mathfrak{M}$, если функция $K(\tilde{m})$ (2.2) непрерывна на модели $\tilde{m}$ [11].

Отметим, что более общие определения устойчивости принципов оптимальности можно найти, например, в [12] - в том числе и для принципов оптимальности, учитывающих нечувствительность ε. Ниже в основном используется критериальный принцип оптимальности, в котором нечувствительность учитывается, поэтому для нашего изложения достаточно ограничиться введенными определениями. Забегая вперед, подчеркнем, что ниже при определении устойчивости решений задач стимулирования сравниваются не множества оптимальных решений, а их отдельные элементы. Поэтому ниже используется следующая модификация определения (2.5), отражающая устойчивость отдельных решений, а не принципа оптимальности в целом.

Решение $\tilde{\chi} \in M$, оптимальное по $\mathfrak{K}$ в модели $\tilde{m} \in \mathfrak{M}$ $(\chi \in \mathfrak{K}(\tilde{m}))$, устойчиво, если

(2.5') $\forall\ \varepsilon>0\ \ \exists\ \delta>0:\ \forall\ m:\ \ \mu(m,\tilde{m})<\delta\ \exists\ \chi \in \mathfrak{K}(m):\ \nu(\tilde{\chi},\chi) < \varepsilon.$

Решение $\tilde{\chi} \in M$, оптимальное по $\mathfrak{K}$ в модели $\tilde{m} \in \mathfrak{M}$ $(\chi \in \mathfrak{K}(\tilde{m}))$, будем называть абсолютно устойчивым в области $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{M}$, если $\forall\ m \in \mathfrak{B}$ $\chi \in \mathfrak{K}(m)$, то есть $\mathfrak{B}(\chi,m) = \{\ m \in \mathfrak{M} \mid \chi \in \mathfrak{K}(m)\ \} \ni \tilde{m}$.

Устойчивость принципа оптимальности на некоторой модели позволяет брать в качестве приближенного решения задачи полного оптимального выбора множество решений, оптимальных в модели, достаточно близкой к данной. То же относится и к оптимальной оценке эффективности.

Особо следует отметить, что выбор метрик μ и ν должен в каждой конкретной задаче отражать прикладные потребности и соответствовать содержательным интерпретациям (см. более подробно раздел 3.2).

Перейдем к определению адекватности. Фиксируем некоторую модель $\tilde{m} \in \mathfrak{M}$ и принцип оптимальности $\mathfrak{K}$. Интуитивно понятно, что адекватность соответствует, в отличие от устойчивости - когда требуется непрерывность $\sup\limits_{t\in M} \Phi(t,\tilde{m})$ по модели [11], непрерывности по модели m из малой окрестности $\tilde{m}$ следующей функции: $\Phi(\mathfrak{K}(\tilde{m}),m)$ (см. также проблему Б в [16]). Поэтому можно считать, что модель $\tilde{m}$ с принципом оптимальности $\mathfrak{K}$ адекватна (в смысле задачи полного выбора) множеству реальных АС $\mathfrak{M}(\tilde{m})$, определяемому следующим образом:

(2.6) $\mathfrak{M}(\tilde{m}) = \{\ m \in \mathfrak{M} \mid \mathfrak{K}(\tilde{m}) \cap \mathfrak{K}(m) \neq \varnothing\ \} \subseteq \mathfrak{M}$,

то есть тем реальным АС, в которых хотя бы одно из решений, оптимальное в модели, также оптимально. Итак, введем следующее определение.

Модель $\tilde{m} \in \mathfrak{M}$ <u>адекватна</u> реальной активной системе $m \in \mathfrak{M}$, если $m \in \mathfrak{M}(\tilde{m})$, где $\mathfrak{M}(\tilde{m})$ удовлетворяет (2.6). Совокупность решений для семейства моделей, таких, что $\mathfrak{K}(\tilde{m}) \cap \mathfrak{K}(m) \neq \varnothing$ в дальнейшем будет названа обобщенным решением.

"Полнота выбора" подразумевает следующее. Пусть существуют $\chi_1,\ \chi_2 \in \mathfrak{K}(\tilde{m})$. Если $\forall\ m \in \hat{\mathfrak{M}}$ $\chi_1 \in \mathfrak{K}(m)$ или $\chi_2 \in \mathfrak{K}(m)$, то $\hat{\mathfrak{M}} \subseteq \mathfrak{M}(\tilde{m})$. Но, возможно, что $\exists\ m_1,\ m_2 \in \hat{\mathfrak{M}}$ такие, что $\chi_1 \in \mathfrak{K}(m_1)$ и $\chi_2 \in \mathfrak{K}(m_2)$, но $\chi_1 \notin \mathfrak{K}(m_2)$ и $\chi_2 \notin \mathfrak{K}(m_1)$. Иначе говоря, обобщенное решение задачи полного выбора соответствует введенному выше определению устойчивости (2.5), использующему сравнение всех элементов множества $\mathfrak{K}$-оптимальных решений (расстояние Хаусдорфа между множествами оптимальных решений).

Следующий частный случай определения (2.6) использует имеющееся "расстояние" между моделями. Определим следующую величину:

(2.7) $\Delta = \Delta(\mathfrak{K},\mathfrak{m}) = \max \{ \delta \ge 0 \mid \forall\ \mathfrak{m} \in \mathfrak{M}: \mu(\tilde{\mathfrak{m}},\mathfrak{m}) \le \delta \quad \mathfrak{K}(\tilde{\mathfrak{m}}) \cap \mathfrak{K}(\mathfrak{m}) \ne \varnothing \}$

и назовем $\tilde{\mathfrak{m}}$ адекватной классу $\mathfrak{M}_\Delta(\mathfrak{K},\tilde{\mathfrak{m}})$:

(2.8) $\mathfrak{M}_\Delta(\mathfrak{K},\tilde{\mathfrak{m}}) = \{ \mathfrak{m} \in \mathfrak{M} \mid \mu(\tilde{\mathfrak{m}},\mathfrak{m}) \le \Delta \} \subseteq \mathfrak{M}$.

В общем случае принцип адекватности является точечно-множественным отображением, то есть $\mathfrak{K}(\tilde{\mathfrak{m}})$ может содержать более одного элемента, поэтому возникает еще одна проблема - о выборе конкретного $\chi \in \mathfrak{K}(\tilde{\mathfrak{m}})$ (задача частного выбора). Величина $\Delta = \Delta(\mathfrak{K},\tilde{\mathfrak{m}},\chi)$ может быть определена по аналогии с (2.7) для каждого $\chi \in \mathfrak{K}(\tilde{\mathfrak{m}})$:

(2.9) $\Delta = \Delta(\mathfrak{K},\tilde{\mathfrak{m}},\chi) = \max \{ \delta \ge 0 \mid \forall\ \mathfrak{m} \in \mathfrak{M}: \mu(\tilde{\mathfrak{m}},\mathfrak{m}) \le \delta \ \chi \in \mathfrak{K}(\tilde{\mathfrak{m}}) \}$.

Или, в более общем случае для каждого χ следует определять:

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{K},\tilde{\mathfrak{m}},\chi) = \{ \mathfrak{m} \in \mathfrak{M} \mid \chi \in \mathfrak{K}(\tilde{\mathfrak{m}}) \} \subseteq \mathfrak{M}.$$

Область $\mathfrak{M}(\mathfrak{K},\tilde{\mathfrak{m}},\chi)$ будем называть областью абсолютной устойчивости конкретного решения χ. Очевидно,

$$\mathfrak{M}(\tilde{\mathfrak{m}}) = \bigcup_{\chi \in \mathfrak{K}(\tilde{\mathfrak{m}})} \mathfrak{M}(\mathfrak{K}, \tilde{\mathfrak{m}}, \chi).$$

Следовательно, для каждого решения, помимо его эффективности (эффективности управления), существует еще одна характеристика - множество тех АС, в которых оно обладает заданной эффективностью. То есть появляется возможность сравнения оптимальных решений. Естественно считать, что из двух решений, удовлетворяющих принципу оптимальности, решение, эффективное в большей области АС, "лучше". Введем на множестве $\mathfrak{K}(\tilde{\mathfrak{m}})$ следующее отношение "$\triangleright$" (в общем случае не полное):

(2.10) $\forall\ \chi_1,\ \chi_2 \in \mathfrak{K}(\tilde{\mathfrak{m}}) \quad \chi_1 \triangleright \chi_2 \quad \leftrightarrow \quad \mathfrak{M}(\mathfrak{K},\tilde{\mathfrak{m}},\chi_1) \supseteq \mathfrak{M}(\mathfrak{K},\tilde{\mathfrak{m}},\chi_2)$.

Понятно, что с точки зрения практического использования результатов математического моделирования целесообразен выбор из $\mathfrak{K}(\mathfrak{m})$ элемента, максимального по отношению "$\triangleright$" (если таковой существует).

Итак, для фиксированных модели, принципа оптимальности и конкретного решения, удовлетворяющего принципу оптимальности, можно указать множество реальных АС (точнее - множество моделей АС), в которых данное решение оптимально. Это множество заведомо непусто, так как содержит саму модель $\tilde{m}$ при $\Delta = 0$. Отметим, что (2.7) может быть эффективно использовано только при "непрерывном по метрике μ" изменении $m \in \mathfrak{M}$, иначе в общем случае не исключена ситуация, когда $\mathfrak{M}(\tilde{m}) \setminus \{m\} \neq \varnothing$, а $\Delta(\mathfrak{K},\tilde{m}) = 0$.

Если решение, оптимальное в модели, будет оптимально и в реальной системе, то будем считать, что модель адекватна. Таким образом, критерием адекватности является эффективность управления.

Более того, решение задачи синтеза оптимальных управлений для математической модели (которое до сих пор заключалось в указании $\mathfrak{K}(\tilde{m})$) можно считать полным только тогда, когда для каждого из решений, удовлетворяющих принципу оптимальности указаны множества реальных АС, в которых эти решения гарантированно оптимальны. То есть под обобщенным решением задачи управления в модели $\tilde{m} \in \mathfrak{M}$ с принципом оптимальности $\mathfrak{K}$ в общем случае будем понимать набор:

$$\{ \chi, \mathfrak{M}(\mathfrak{K},\tilde{m},\chi) \}_{\chi \in \mathfrak{K}(\tilde{m})}$$

включающий как решения $\chi \in \mathfrak{K}(\tilde{m})$, так и их области абсолютной устойчивости $\{ \mathfrak{M}(\mathfrak{K},\tilde{m},\chi) \}_{\chi \in \mathfrak{K}(\tilde{m})}$ ($\mathfrak{M}(\mathfrak{K},\tilde{m},\chi) \leftrightarrow \mathfrak{E}(\chi,\tilde{m})$); или, более узко:

(2.11) $\{ \chi, \Delta(\mathfrak{K},m,\chi) \}_{\chi\in\mathfrak{K}(\tilde{m})}$.

Знание множества $\mathfrak{M}(\mathfrak{K},\tilde{m})$ позволит на этапе внедрения четко определить "риск" практического использования решения, полученного в результате моделирования и, быть может, при необходимости, пересмотреть модель АС или принцип оптимальности. Ревизия методологии и структуры модели, как отмечалось выше, не входит в нашу компетенцию. Однако, возможны пересмотр как параметров модели, так и принципа оптимальности.

Модификация принципа оптимальности даже при фиксированных параметрах модели представляется достаточно перспективной. Например, снижая требования к эффективности управления, можно для каждого из решений расширить область его устойчивости и, следовательно, расширить множество реальных АС, в которых решения, удовлетворяющие ослабленному принципу оптимальности, будут гарантированно оптимальными.

Приведенные качественные рассуждения свидетельствуют, что существует определенный дуализм между эффективностью решения и областью его гарантированной применимости (областью его абсолютной устойчивости или областью адекватности). Поиск этой зависимости для задач стимулирования в активных системах является одной из целей настоящей работы, реализуемой ниже.

Жертвуя эффективностью управления, можно расширить область реальных объектов, в которых применимы результаты моделирования. Особенно ярко этот эффект проявляется при анализе областей устойчивости решений, удовлетворяющих тем или иным критериальным принципам оптмальности, к описанию которых мы и переходим.

Выражение (2.6) для критериального принципа оптимальности (2.1) примет вид:

$$(2.12)\quad \mathfrak{M}(\tilde{m},\mathfrak{K}_c) = \{ m\in\mathfrak{M} \mid \exists\, \chi = \chi(m) \in M:\ \Phi(\chi,\tilde{m}) \ge \sup_{t\in M} \Phi(t,\tilde{m}) - \varepsilon \ \text{ и } \ \Phi(\chi,m) \ge \sup_{t\in M} \Phi(t,m) - \varepsilon \},$$

то есть множество АС, которым адекватна данная модель должно удовлетворять тому условию, что для каждой из них существует некоторое решение, удовлетворяющее критериальному принципу оптимальности $\mathfrak{K}_c$ в обоих. Величина $\Delta(\mathfrak{K},\tilde{m})$ и множество $\mathfrak{M}_\Delta(\mathfrak{K},\tilde{m})$ определяются по аналогии с (2.7) и (2.8), соответственно.

Величину $\Delta = \Delta(\mathfrak{K}_c,\tilde{m},\chi)$ определим для критериального принципа оптимальности (см. (2.1)) следующим образом: $\forall\, \chi \in \mathfrak{K}_c(\tilde{m})$:

$$(2.13)\quad \Delta = \Delta(\mathfrak{K}_c,\tilde{m},\chi) = \max \{ \delta\ge 0 \mid \forall\, m\in\mathfrak{M}:\ \mu(\tilde{m},m)\le\delta \ \ \chi \in \mathfrak{K}_c(m) \}.$$

В общем случае для каждого χ следует определять:

$$(2.14)\quad \mathfrak{M}(\mathfrak{K}_c,\tilde{m},\chi) = \{ m \in \mathfrak{M} \mid \chi \in \mathfrak{K}_c(m) \} \subseteq \mathfrak{M}.$$

Частное определение, использующее псевдометрику μ в $\mathfrak{M}$, имеет вид: областью абсолютной устойчивости $\mathfrak{M}(\mathfrak{K}_c,m,\chi)$ решения χ, удовлетворяющего критериальному принципу оптимальности, назовем:

$$(2.15)\quad \mathfrak{M}_\Delta(\mathfrak{K}_c,\tilde{m},\chi) = \{ m \in \mathfrak{M} \mid \mu(m,\tilde{m}) \le \Delta(\mathfrak{K}_c,\tilde{m},\chi) \} \subseteq \mathfrak{M}.$$

Величина ε, фигурирующая в определении критериального принципа оптимальности, фактически, характеризует те потери эффективности на которые мы готовы пойти, считая решение еще оптимальным (такое общее определение оптимальности несколько противоречит широко распространенному, когда оптимальным считается решение, имеющее максимально возможную эффективность). Качественно отмеченный выше дуализм между эффективностью и адекватностью (областью устойчивости) для критериальных принципов оптимальности имеет следующий формальный вид.

<u>Утверждение</u> <u>2.1.</u> Для любого критериального принципа оптимальности $\mathfrak{K}_\varepsilon$, для любой модели $\tilde{m} \in \mathfrak{M}$ и для любых ε_1, ε_2, таких, что $0 \le \varepsilon_1 \le \varepsilon_2$, выполнено $\mathfrak{M}(\tilde{m},\varepsilon_1) \subseteq \mathfrak{M}(\tilde{m},\varepsilon_2)$, где $\mathfrak{M}(\tilde{m},\varepsilon)$ определяется (2.12).

<u>Утверждение</u> <u>2.2.</u> Для любого критериального принципа оптимальности $\mathfrak{K}_\varepsilon$, для любой модели $\tilde{m} \in \mathfrak{M}$, для любого решения $\chi \in \mathfrak{K}_\varepsilon(\tilde{m})$ и для любых ε_1, ε_2, таких, что $0 \le \varepsilon_1 \le \varepsilon_2$, выполнено $\mathfrak{M}(\mathfrak{K}_{\varepsilon_1},\tilde{m},\chi) \subseteq \mathfrak{M}(\mathfrak{K}_{\varepsilon_2},\tilde{m},\chi)$, где $\mathfrak{M}(\mathfrak{K}_\varepsilon,\tilde{m},\chi)$ определяется (2.14).

Доказательство очевидно (если $m \in \mathfrak{M}(\tilde{m},\varepsilon_1)$, то, заменяя в (2.12) ε_1 на ε_2, получаем, что $m \in \mathfrak{M}(\tilde{m},\varepsilon_2)$; иными словами, справедливость утверждений следует из вложения $\mathfrak{K}_{\varepsilon_1}(\tilde{m}) \subseteq \mathfrak{K}_{\varepsilon_2}(\tilde{m})$).

Утверждение 2.1 гласит, что множество активных систем, адекватных фиксированной модели с критериальным принципом оптимальности, не уменьшается с ростом ε, а утверждение 2.2 – что область абсолютной устойчивости фиксированного решения, оптимального в модели, не сужается с ростом ε.

Устанавливаемый в утверждениях 2.1 и 2.2 качественный факт (с ослаблением требований к эффективности некоторого решения область его абсолютной устойчивости расширяется и, следовательно, расширяется область адекватности) свидетельствует, что для решения проблем устойчивости и адекватности достаточно указать конкретную зависимость между величинами в (2.14), то есть найти по $\tilde{m}$ и $\mathfrak{M}(\tilde{m})$ $(U_\delta(\tilde{m}))$ минимальное $\varepsilon = \varepsilon\ (\tilde{m},\ \mathfrak{M}(\tilde{m}))$ $(\varepsilon = \varepsilon(\delta))$, обеспечивающее выполнение (2.14).

Обобщенным решением задачи управления в модели $\tilde{m}$ с критериальным принципом оптимальности $\mathfrak{K}_\varepsilon$ $(\varepsilon \ge 0)$ назовем совокупность:

(2.16) $\{ \chi \in \mathfrak{K}_\varepsilon(\tilde{m}),\ \varepsilon \ge \varepsilon_0(\delta) \}_{\delta \ge 0}$,

где

(2.17) $\varepsilon_0(\delta) = \min \{ \varepsilon \ge 0 \mid \forall\ m \in \mathfrak{M}_\delta(\tilde{m})\ \ \mathfrak{K}_\varepsilon(m) \cap \mathfrak{K}_\varepsilon(\tilde{m}) \ne \varnothing \}$, то есть множество ε-оптимальных по критерию $\Phi(\cdot)$ решений с максимальной областью устойчивости и адекватности (2.17).

Несколько забегая вперед, отметим, что во многих случаях, рассматриваемых ниже, области абсолютной устойчивости оптимальных решений задач стимулирования очень узки и иногда состоят из одной точки. Возможность расширения областей устойчивости "неустойчивых" решений, установленная выше, наталкивает на мысль о том, что $\Phi(\chi,m)$, где $\chi \in \mathfrak{K}_\varepsilon$, может являться регуляризирующим в смысле [11] функционалом для критерия оптимальности $\Phi(\chi,m)$ ($\mathfrak{K}_0$).

Таким образом, в настоящем разделе приведены определения устойчивости решений задач управления в математических моделях, определение адекватности модели и определение обобщенного решения. Описанные общие характеристики конкретизируются в последующих разделах для ряда частных моделей механизмов стимулирования в активных системах. Так, для известных базовых моделей механизмов стимулирования [15] решаются задачи: исследования устойчивости известных решений и адекватности моделей, то есть - определяются области устойчивости и абсолютной устойчивости оптимальных и ε-оптимальных решений, а также области адекватности соответствующих моделей активных систем.

3. ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТИМУЛИРОВАНИЯ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ АКТИВНЫХ СИСТЕМАХ

Изложение материала данного раздела имеет следующую структуру: сначала кратко описываются результаты решения прямой задачи стимулирования первого рода [15] для детерминированной одноэлементной статической активной системы со стандартным порядком функционирования, затем исследуется проблема устойчивости и адекватности при вариациях отдельных компонентов модели, синтез результатов исследования которой дает возможность судить об устойчивости решения и адекватности модели в целом.

3.1. Решение детерминированной задачи

Рассмотрим модель детерминированной АС и приведем результаты решения задачи синтеза оптимальной функции стмулирования (полное описание можно найти в [3,5,15]).

Обозначим SP – класс действительнозначных функций $q(x)$, определенных на $\mathbb{R}^1$ и удовлетворяющих следующим свойствам:

1) $q(x)$ – непрерывная функция; 2) существует единственная точка $r \in \mathbb{R}^1$ (возможно $r = -\infty$ или $r = +\infty$) такая, что $q(x)$ строго монотонно возрастает при $x<r$ и строго монотонно убывает при $x>r$; 3) $q(r) < +\infty$. Функции, принадлежащие классу SP называются однопиковыми.

Обозначим SP' – класс действительнозначных функций $q(x)$, определенных на $\mathbb{R}^1$ и удовлетворяющих следующим свойствам:

1) $q(x)$ – полунепрерывна сверху; 2) существуют точки r^-, $r^+ \in \mathbb{R}^1$ (возможно $r^- = r^+ = r$, $r^- = -\infty$ или $r^+ = +\infty$) такие, что $q(x)$ не убывает при $x \le r^-$, постоянна при $x \in [r^-, r^+]$ и не возрастает при $x \ge r^+$; 3) $q(r^{\pm}) < +\infty$. Функции, принадлежащие классу SP' называются квазиоднопиковыми (при рассмотрении квазиоднопиковых функций считается, что $r^{\pm}$ равно либо r^-, либо, r^+; r – произвольная точка отрезка $[r^-, r^+]$).

Рассмотрим двухуровневую иерархическую активную систему веерного типа, состоящую из центра и одного активного элемента [3,5]. Обозначим $y \in A$ – стратегию АЭ – его действие, $h(y)$ – функция дохода АЭ, $C(y)$ – функция затрат АЭ, $x \in X$ – план, назначенный центром, $\chi(x,y) \in M$ – стратегия центра – функция штрафов, $\sigma(x,y) \in M$ – функция стимулирования. Иногда для простоты, когда задача планирования не рассматривается, зависимость штрафов, стимулирования и т.д. от плана будет опускаться.

Введем следующие предположения.

А.3.1. $A = X = \mathbb{R}^1$.

Для большинства рассматриваемых ниже моделей можно считать, что $\exists\ A^-,\ A^+:\ A = X = [\ A^-,\ A^+\ ]$, где $-\infty < A^- \ll r \ll A^+ < +\infty$.

А.3.2. χ – неотрицательная равномерно ограниченная сверху

$$0 \le \chi(x,y) \le C < +\infty, \quad \forall\ y \in A,\ x \in X$$

кусочно-непрерывная функция.

Константа C называется ограничением механизма стимулирования.

А.3.3. $h(\cdot) \in SP'$.

А.3.4. $-C(\cdot) \in SP'$, $C(0) = 0$.

Предположения А.3.1 – А.3.4 будут считаться выполненными, если не оговорено особо, в ходе всего последующего изложения.

Целевая функция АЭ имеет вид "доход минус штрафы":

(3.1) $f(y) = h(y) - \chi(x,y)$,

или "стимулирование минус затраты":

(3.2) $f(y) = \sigma(x,y) - C(y)$.

Большинство рассматриваемых ниже моделей использует представление (3.1) при $y \ge r$, что не снижает общности, так как, если выполнены А.3.3 и А.3.4, то (3.1) и (3.2), а также все результаты для $y \ge y_2 = r$ и $y \le y_2$ совпадают с точностью до линейного преобразования [15].

Так как АЭ независимы, то множество решений игры (множество реализуемых действий – тех действий, которые выбираются АЭ при системе стимулирования χ) имеет вид:

(3.3) $P(\chi,\ x) = \mathrm{Arg}\max\limits_{y \in A}\ \{\ h(y) - \chi(x,y)\ \}$.

Обозначим множество согласованных планов [3]:

(3.4) $Q(\chi) = \{\ x \in X \mid h(x) - \chi(x,x) \ge h(y) - \chi(x,y) \quad \forall\ y \in A\ \}$.

Эффективность механизма стимулирования определяется как:

(3.5) $K(\chi) = \max\limits_{y \in P(\chi)} \Phi(\ y\ )$,

а гарантированная эффективность:

(3.6) $K^{\Gamma}(\chi) = \min\limits_{y \in P(\chi)} \Phi(\ y\ )$, где $\Phi(y)$ – целевая функция центра. В дальнейшем считается, что целевая функция центра $\Phi(y) = H(y)$, то есть определяется его функцией дохода.

Задача стимулирования заключается в выборе механизма стимулирования, имеющего максимальную эффективность:

$$(3.7)\quad K(\chi) \to \max_{\chi \in M} .$$

или максимальную гарантированную эффективность: $K^{\Gamma}(\chi) \to \max_{\chi \in M}$.

Использование максимума по множеству решений игры оправданно, если выполнена гипотеза благожелательности (ГБ): из действий, максимизирующих его целевую функцию, АЭ выбирает действие, наиболее благоприятное для центра.

Согласованной называется система стимулирования, для которой $Q = P(\chi) = \bigcup_{x \in X} P(\chi, x)$ [3]. Согласованные системы стимулирования обладают тем привлекательным свойством, что назначаемые элементам планы выполняются.

В силу полунепрерывности сверху функции дохода АЭ множество связно и замкнуто, а из А.3.3 и ограниченности С следует его ограниченность.

Система стимулирования следующего вида:

$$(3.8)\quad \chi^{c}(x,y) = \begin{cases} 0, & y \ (\begin{smallmatrix}\le\\ \ge\end{smallmatrix}) \ x \\ C, & y \ (\begin{smallmatrix}>\\ <\end{smallmatrix}) \ x \end{cases}$$

называется скачкообразной (С-типа). Множество систем стимулирования С-типа при всевозможных $x \in X$ обозначим $M_x \subseteq M$. Систему стимулирования:

$$(3.9)\quad \chi^{QC}(x,y) = \begin{cases} 0, & y = x \\ C, & y \ne x \end{cases}$$

назовем квазискачкообразной (QC-типа).

Максимальное множество действий АЭ, реализуемых при заданных ограничениях механизма стимулирования определяется следующими двумя утверждениями.

<u>Утверждение 3.1.</u> [15] Если выполнена ГБ и А.3.1 – А.3.3, то согласованная система стимулирования С-типа имеет максимальное множество реализуемых действий: $P = P(\chi_c) = [y^-, y^+]$, $x \in X$, где

$$y^- = \min \{ y \in A \mid h(y) \ge h(r) - C \},$$
$$y^+ = \max \{ y \in A \mid h(y) \ge h(r) - C \}.$$

[redacted]

Если гипотеза благожелательности не выполнена, то, очевидно, максимальное множество действий, реализуемых всевозможными системами стимулирования С-типа, составляет интервал: (y^-, y^+).

<u>Утверждение</u> <u>3.2.</u> [15] Если выполнены А.3.1-А.3.3, то $\forall\ \chi \in M$ $P(\chi) \subseteq P$.

Следствием утверждений 3.1-3.2 является следующее

<u>Утверждение</u> <u>3.3.</u> [3,15] Если выполнены А.3.1-А.3.3, то согласованная система стимулирования С - типа оптимальна.

Отметим, что здесь и далее утверждения об оптимальности определенных классов систем стимулирования (например, С-типа) означают, что в этих классах содержится хотя бы одна оптимальная функция стимулирования: например, для класса M_x это значит, что $\exists\ x \in X$: $\forall\ \chi \in M$ $K(\chi_c(x,\cdot)) \geq K(\chi(\cdot))$.

Следует отметить, что система стимулирования С - типа, как правило, является не единственной оптимальной системой стимулирования. В частности, в рамках введенных предположений существует целое множество оптимальных систем стимулирования, в том числе - QC-типа, компенсаторные (К - типа), имеющие вид:

$$(3.10)\quad \chi_k(y) = \begin{cases} h(y) - [\,h_{max} - C\,],\ y \in [\,y^-, y^+\,] \\ 0,\ y \notin [\,y^-, y^+\,] \end{cases},$$

и квазикомпенсаторные (QК-типа) системы стимулирования, определяемые следующим образом:

$$(3.11)\quad \chi_k^Q(x,y) = \begin{cases} h(y) - [\,h_{max} - C\,],\ y = x \\ C,\ y \neq x \end{cases}.$$

Из утверждения 3.3 следует, что в рамках введенных предположений эффективность стимулирования в прямой задаче стимулирования первого рода равна эффективности механизма оптимального согласованного планирования [5]:

$$(3.12)\quad K^* = \max_{x \in P} \Phi(x).$$

Рассмотрим соотношение между эффективностью стимулирования (3.12) и гарантированной эффективностью

$$(3.13)\quad K^{\Gamma*} = \max_{\chi \in M} \min_{y \in P(\chi)} \Phi(y).$$

Очевидно, что если $\arg\max\limits_{y \in A} \Phi(y) \in (y^-, y^+)$, то $K^* = K^{\Gamma*}$. Если же максимум целевой функции центра достигается на границе множества P, то эффективность, определенная с помощью (3.6), сколь угодно мало отличается от (3.12), то есть соответствующая система стимулирования является ε-оптимальной.

Пример.[1]

Пусть функция дохода активного элемента: $h(y) = y - y^2/20$, *то есть* $r = 10$, *а целевая функция центра* $\Phi(y) = H(y) = y$. *Если ограничение мехнизма стимулирования* $C = 1.25$, *то максимальное множество реализуемых действий* $P = [5, 15]$. *Графики функций дохода АЭ, его целевой функции и функции штрафов приведены на рисунке 2. Оптимальными (реализующими действие* $y^* = 15$) *является система стимулирования С-типа* $\chi_c(y^+, y)$, *а также все системы стимлирования, лежащие на рисунке 2 в "треугольнике" ABC (в том числе: QC, K и QK- типа).*

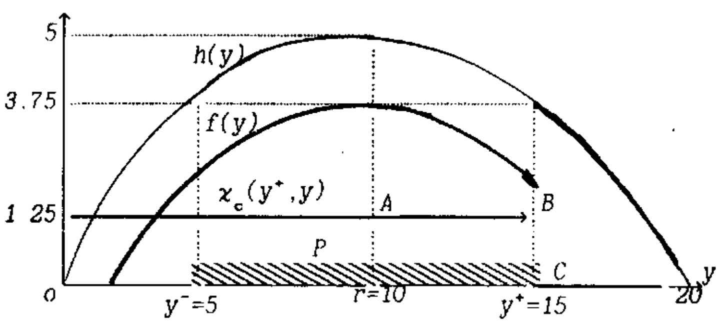

Рис.2.
Функция дохода АЭ, целевая функция АЭ
и оптимальная система стимулирования С-типа

Перейдем теперь к анализу устойчивости решений и адекватности модели.

---

1 На протяжении настоящего раздела мы будем рассматривать один пример (выделяя его курсивом), модифицируя лишь некоторые числовые значения и параметры.

3.2. Устойчивость по предпочтениям активного элемента

Для полного описания конкретной детерминированной АС при известной информированности и порядке функционирования необходимо задать допустимые множества (действий и функций стимулирования) и функции дохода (или затрат) центра и АЭ. Обозначим $\mathfrak{m}$ – реальную АС: $\mathfrak{m} = \{ A, M, H(\cdot), h(\cdot) \}$, $\tilde{\mathfrak{m}}$ – исследуемую модель АС: $\tilde{\mathfrak{m}} = \{ \tilde{A}, \tilde{M}, \tilde{H}(\cdot), \tilde{h}(\cdot) \}$.

Обозначим $\mathfrak{M}$ – класс всех детерминированных АС, удовлетворяющих предположениям А.3.1–А.3.4, предположим, что $\mathfrak{m}\in\mathfrak{M}$, $\tilde{\mathfrak{m}} \in \mathfrak{M}$, и рассмотрим отображение $\mathfrak{K}: \mathfrak{M} \to 2^M$, ставящее в соответствие каждой допустимой АС $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}$ множество оптимальных функций стимулирования $\mathfrak{K}(\mathfrak{m})$ (множество $\mathfrak{K}(\mathfrak{m})$ может содержать более одного элемента), то есть $\mathfrak{K}$ является принципом оптимальности для рассматриваемой задачи стимулирования (см. раздел 2 и [11]). Тогда решение задачи синтеза оптимальной функции стимулирования – функция штрафов χ^* определяется как $\chi^* \in \mathfrak{K}(\tilde{\mathfrak{m}})$ и характеризуется эффективностью $K(\chi^*)$ *(см. выше множество оптимальных систем стимулирования для рассматриваемого примера)*.

Критериальный принцип оптимальности, соответствующий детерминированной задаче стимулирования, в рамках гипотезы благожелательности имеет вид (см. (2.1)):

$$(3.14)\quad \mathfrak{K}_\varepsilon(\tilde{\mathfrak{m}}) = \{\chi\in M(\tilde{\mathfrak{m}}) \mid \max_{y\in P(\chi,\tilde{\mathfrak{m}})} \Phi(y,\tilde{\mathfrak{m}}) \ge \sup_{t\in M(\tilde{\mathfrak{m}})} \max_{y\in P(t,\tilde{\mathfrak{m}})} \Phi(y,\tilde{\mathfrak{m}}) - \varepsilon \},$$

где в общем случае от модели зависят как множества допустимых стратегий, так и множество решений игры и целевая функция центра. При $\varepsilon = 0$ принцип оптимальности (3.14) переходит в "классический" $\mathfrak{K}_0$, определяемый (3.5)–(3.7). Если отказаться от гипотезы благожелательности, то в критериальном принципе оптимальности будет фигурировать минимум по множеству решений игры (см. (3.6)).

Лобовое использование выражения (3.14) для исследования устойчивости и адекватности (построения областей устойчивости) чрезвычайно трудоемко в силу его громоздкости, поэтому воспользуемся приведенными выше результатами решения детерминированной задачи.

Ограничимся в настоящем подразделе рассмотрением тех случаев, в которых допустимые множества и целевая функция центра известны и центру, и АЭ достоверно (в дальнейшем будут рассмотрены случаи, в которых центр и/или исследователь операций имеют "неправильные" представления о допустимом множестве A, своих возможностях по стимулированию и т.д.). Пусть $\tilde{m} = \{ A, M, H(\cdot), \tilde{h}(\cdot) \}$, то есть в рамках введенных предположений модель может оказаться неадекватной реальной АС в смысле различия предпочтений АЭ в отсутствии стимулирования (несовпадения функций дохода $h(\cdot)$ и $\tilde{h}(\cdot)$).

Множество различных АС $\mathfrak{M}(\tilde{m})$ можно задавать различными способами. Мы будем, например, считать, что

$$(3.15)\quad \mathfrak{M}_\delta(\tilde{m}) = \{ m \in \mathfrak{M} \mid h\in SP' \text{ и } \forall\, y\in A \;\; h(y)\in[\tilde{h}(y)-\delta,\ \tilde{h}(y)+\delta] \},$$

то есть в реальной АС функция дохода АЭ может отличаться от функции дохода в исследуемой модели (которую мы в силу незнания считаем истинной) не более, чем на $\delta \geq 0$. При $\delta = 0$ $\mathfrak{M}_\delta(\tilde{m}) \equiv \tilde{m}$ и $m \equiv \tilde{m}$, то есть модель полностью адекватна (*см. рис.3. для рассматриваемого примера при $\delta = 0.5$*).

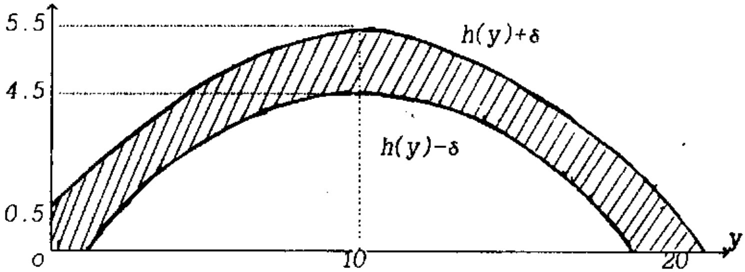

Рис.3.
Множество возможных функций дохода АЭ

Введем характеристики "устойчивости" оптимального решения задачи синтеза. Пусть $\chi^*_\delta \in \mathfrak{K}(m)$, $m \in \mathfrak{M}_\delta(\tilde{m})$ – решение задачи синтеза оптимальной функции стимулирования при фиксированной модели АС $\tilde{m}$. Возьмем $\chi^* = \chi_c$, то есть систему стимулирования C-типа, $\chi^* \in \mathfrak{K}(\tilde{m})$, а $\nu(\cdot,\cdot)$ – некоторое "расстояние" между элементами множества M (свойства этого расстояния пока не конкретизируются, за исключением: $\forall\, \chi \in M \;\; \nu(\chi,\chi) = 0$). Тогда функция

$$(3.16)\quad D_1(\delta) = \max_{m\in\mathfrak{M}_\delta(\tilde{m})} \nu(\chi^*,\ \chi^*_\delta(m))$$

может интерпретироваться как зависимость расстояния между оптимальным решением задачи стимулирования для модели АС $\tilde{m}$ и для самой АС m от параметра δ, характеризующего степень незнания истинных предпочтений АЭ. В идеале хотелось бы, чтобы (3.16) была непрерывной (и достаточно медленно изменяющейся) функцией. При этом так как $D_1(0) = 0$, то малая ошибка в описании системы приводила бы к малому (в смысле расстояния ν) отличию оптимальной системы стимулирования в модели от "истинной" оптимальной системы стимулирования. Поэтому в рассматриваемой задаче будем считать решение (оптимальную систему стимулирования С-типа) устойчивым (точнее - устойчивым в некоторой окрестности модели) по параметрам модели, если $D_1(\delta)$ - непрерывная функция (хотя-бы в некоторой окрестности нуля). Отметим, что определение устойчивости существенно использует "расстояние" в пространстве М - как будет видно в дальнейшем решения, устойчивые, например, по (3.18), не будут ни слабо устойчивы по отклонению, ни устойчивы по метрике Хаусдорфа, порождаемым равномерной, квадратичной и др. метриками (см. (2.5)).

Так как основной характеристикой системы стимулирования является ее эффективность, то логично считать, что потери в эффективности, вызванные неадекватностью модели, то есть использованием системы стимулирования χ^*, определенной по модели, вместо "истинной" оптимальной системы стимулирования χ^*_δ, также существенны. Поэтому введем в рассмотрение следующую зависимость:

$$(3.17)\quad D_2(\delta) = \max_{m\in\mathfrak{M}_\delta(\tilde{m})}\ \min_{\chi\in\mathfrak{X}(\tilde{m})} |\, K(\chi, \tilde{m}) - K(\chi, m)\, | .$$

Так как $D_2(0) = 0$, то хотелось бы, чтобы (3.17) была непрерывной функцией. Тогда, опять-же, малая погрешность в описании системы приводила бы, соответственно, к небольшому снижению эффективности стимулирования. По аналогии с устойчивостью решения будем считать эффективность управления устойчивой (точнее - устойчивой в некоторой окрестности модели), а модель - адекватной, если $D_2(\delta)$ - непрерывная функция, причем области $\mathfrak{M}_\delta(\tilde{m})$ (2.8), соответствующие тем δ, при которых (3.16) и (3.17) непрерывны, будут областями квазиустойчивости и квазиадекватности (см. определения областей устойчивости и адекватности в разделе 2).

Пусть точка y_1 максимума функции дохода центра расположена правее точки y_2 максимума функции дохода АЭ (обратный случай – $y_1 < y_2$ – рассматривается полностью аналогично). Предположим, что центр использует скачкообразные штрафы, то есть $\chi^* \in M_x \leq M$ [15]. Исследуем устойчивость оптимальной системы стимулирования С-типа.

Обозначим y^- и y^+, соответственно, левую и правую границу максимального множества реализуемых действий в модели $\tilde{m}$ (при функции дохода АЭ $\tilde{h}(\cdot)$). В качестве "расстояния" в (3.16) будем использовать модуль разности между оптимальными планами, то есть положим

$$(3.18)\quad \mathfrak{D}_1(\delta) = \max_{m \in \mathfrak{M}_\delta(\tilde{m})} |\ x^* - x^*_\delta(m)\ |.$$

Справедливо следующее

Утверждение 3.4. Пусть $\tilde{h} \in SP'$ и $y_1 \in (\ y^-,\ y^+\ )$. Тогда существует $\delta_0 > 0$, равное

$$\delta_0 = 1 / 2\ (\ \tilde{h}\ (\ y_1\ ) + C - \tilde{h}\ (\ y_2\ )\ ),$$

такое, что $\forall\ \delta \in [0, \delta_0)$, $\forall\ m \in \mathfrak{M}_\delta(\tilde{m})$ выполнено: а) $\exists\ x^*_\delta(m) = y_1$ такое, что $\chi_c(x^*_\delta(m), y) \in \mathfrak{K}_0(\tilde{m})$; $\mathfrak{D}_2(\delta) = 0$.

□ (Значок "□" здесь и далее означает начало доказательства, "○" – окончание). В силу предположения утверждения план, оптимальный в модели, равен $x^* = y_1$. Запишем условия реализуемости действия y_1 оптимальной скачкообразной системой стимулирования: $\forall\ y \in A$

$$(3.19)\quad \tilde{h}\ (\ y_1\ ) - \chi^*_c\ (\ x^*,\ y_1\ ) \geq \tilde{h}\ (\ y\ ) - \chi^*_c\ (\ x^*,\ y\ ).$$

Заменим функцию дохода АЭ на некоторую функцию из $\mathfrak{M}(\delta)$. Наихудшему (в смысле (3.17)-(3.18)), из сохраняющих квазиоднопиковость функции дохода АЭ, случаю соответствует выполнение: $h(y) = \tilde{h}(y) - \delta$ при $y > y_1 - \alpha$ и $h(y) = \tilde{h}(y) + \delta$ при $y \leq y_1 - \alpha$, $\alpha \geq 0$. Тогда (3.19) примет вид: $\forall\ y < y_1 - \alpha$

$$(3.20)\quad \tilde{h}(y_1) - \delta - \chi^*_c\ (\ x^*,\ y_1\ ) \geq \tilde{h}\ (\ y\ ) + \delta - \chi^*_c\ (\ x^*,\ y\ ).$$

Отметим, что α – искусственно вводимая константа, которая обеспечивает квазиоднопиковость функции $h(\cdot)$. *График функции $h(y)$ для рассматриваемого примера приведен на рисунке 4.*

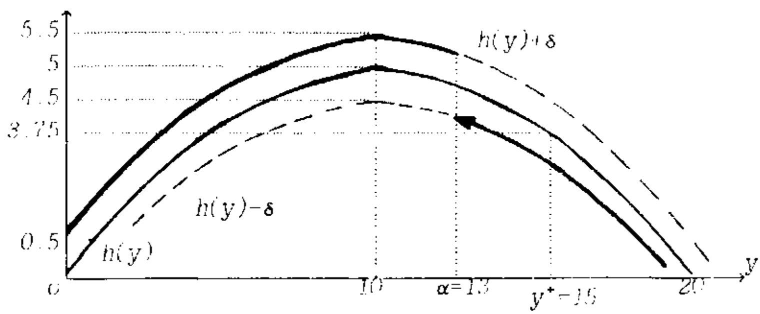

Рис.4.
"Наихудшая" функций дохода АЭ

Условие (3.20) будет гарантировать реализацию действия y_1 (никакая функция штрафов не может иметь эффективность большую, чем $H(y_1)$), если δ удовлетворяет следующей системе неравенств: $\forall\ y < y_1 - \alpha$

$$2\delta \le \bar{h}(y_1) - \chi_c^*(x^*, y_1) - \bar{h}(y) + \chi_c^*(x^*, y).$$

Воспользуемся теперь тем, что $x^* = y_1$ и условием утверждения. Получаем $\chi_c^*(x^*, y_1) = 0$, $\chi_c^*(x^*, y) = C$ $\forall\ y < y_1 - \alpha$. Значит δ должно удовлетворять условию:

$$(3.21)\quad \delta \le \delta_0 = 1/2 \min_{y<y_1} \{ \bar{h}(y_1) - \bar{h}(y) + C \}.$$

В силу определения y_2 правая часть неравенства достигает минимума при $y = y_2$. Значит в рамках полученных ограничений система стимулирования χ^* реализует действие y_1, то есть имеет максимальную эффективность. Следовательно, $\forall\ \delta\in[0,\delta_0)$ $Э_2(\delta) = 0$. Более того, существует система стимулирования χ_δ^*, реализующая это же действие, план x_δ^* в которой в точности совпадет с x^*. Отметим, что, если в условии утверждения 3.4 потребовать h, $\bar{h} \in SP$, то условия а) и б) будут иметь место и при $\delta = \delta_0$. ◦

Для рассматриваемого примера, если $y_1 = 12 \in P = [5,15]$, то из (3.21) следует, что $\delta = 0.525$.

Проанализируем результат утверждения 3.4. Условие $y_1\in(y^-,y^+)$ означает, что интересы центра и АЭ рассогласованы не столь сильно – точно зная модель, центр может побудить АЭ выбрать абсолютно оптимальное для себя действие. Отметим конструктивный характер доказательства – полученная оценка δ_0 – (3.21) позволяет гарантировать реализуемость действия y_1 в следующем классе моделей активных систем: $\{ \mathfrak{M}_\delta(\tilde{m}) \subseteq \mathfrak{M} \mid \delta < \delta_0 \}$. Кроме того, указана конкретная оптимальная система стимулирования (С-типа). Отметим, что до сих пор мы пользовались "классическим" принципом оптимальности $\mathfrak{K}_0(m)$, задаваемым (3.5) и соответствующим (3.14) при $\varepsilon = 0$. Воспользовавшись (2.9), результат утверждения 3.4 можно сформулировать следующим образом:

$$\Delta\ (\ \mathfrak{K},\ \tilde{m},\ \chi_c^*(y_1, y)\ ) = \delta_0,$$

где $\mathfrak{K}$ определяется (3.14), δ_0 – (3.21), а μ – равномерная метрика [8] (см. (2.9) и (3.15)), то есть оптимальное решение устойчиво по предпочтениям активного элемента в области $\mathfrak{M}_\Delta(\tilde{m})$.

Покажем, что для фиксированного $\delta \geq 0$ можно определить множество действий, реализуемых скачкообразными системами стимулирования для любых моделей АС из класса $\mathfrak{M}_\delta(\tilde{m})$. Решение этой, в некотором смысле обратной, задачи дает следующее утверждение.

<u>Утверждение 3.5.</u> Пусть $\tilde{h} \in SP'$, $y_1 \in (y^-, y^+)$. Тогда для любого $0 \leq \delta_0 \leq C/2$ существует план $\tilde{x}(\delta_0)$, определяемый следующим выражением:

$$(3.22)\quad \tilde{x}\ (\ \delta_0\ ) = \max\ \{\ y \geq y_2 \mid \tilde{h}(y) \geq h\ (\ \tilde{y}_2\ ) - C + 2\ \delta_0\ \},$$

такой, что $\forall\ \delta \in [\ 0,\ \delta_0\ )$ и для любого $x \in [\ y_2,\ \tilde{x}\ (\ \delta_0\ )\ ]$ система стимулирования С-типа с планом x согласована в классе моделей $\mathfrak{M}_\delta(\tilde{m})$, то есть эта система стимулирования абсолютно устойчива и адеватна в $\mathfrak{M}_\delta(\tilde{m})$:

$$\forall\ m \in \mathfrak{M}_\delta(\tilde{m})\ \exists\ x \in X:\ \chi_c(x,y) \in \mathfrak{K}_0(m) \cap \mathfrak{K}_0(\tilde{m}),$$

причем, если $y_1 = x$, то $\mathfrak{D}_1(\delta) = \mathfrak{D}_2(\delta) = 0$.

Доказательство утверждения 3.5 практически повторяет доказательство утверждения 3.4, с тем лишь отличием, что по известному значению δ_0 определяется ограничение на $\tilde{x}$ (см. (3.21)).

В предельном случае, то есть при полной адекватности модели, $\delta_0 = 0$ и план $\tilde{x}(\delta_0)$, определяемый (3.22), совпадает с правой границей максимального множества реализуемых действий y^+, что вполне согласуется с результатами детерминированной теории. В то же время, с ростом δ_0 план $\tilde{x}(\delta_0)$ приближается к точке максимума функции дохода АЭ y_2 и при $\delta_0 > C / 2$ стимулирование в классе $\mathfrak{M}_{\delta_0}(\tilde{m})$ не имеет смысла, то есть его использование не изеняет эффективности.

Использование в проводимом анализе специфического конкретного вида (3.18) "расстояния" (3.16) обусловлено свойствами систем стимулирования С-типа. Если выбрать в качестве (3.18) какую либо "классическую" метрику, например - равномерную, и определять устойчивость, как это делалось во втором разделе, по метрике Хаусдорфа, то приведенные выше результаты могут не иметь места. Более того, малейшая неадекватность модели будет приводить к тому, что решения, оптимальные по равномерной метрике, будут отличаться на максимально возможную величину - С. Хотя, в соответствии с предположениями относительно функций штрафов, введенными выше, M - класс равномерно ограниченных кусочно-непрерывных функций, для которых, конечно, казалось бы естественно использовать в качестве "метрики", например, максимум модуля разности или квадратичную метрику т.д. Сказанное, конечно, не означает, что (3.18) - единственно возможная конструкция. Для каждого конкретного класса активных систем целесообразно подбирать наиболее "удобную", учитывающую всю содержательную специфику задачи, характеристику устойчивости оптимального решения.

Таким образом, можно сделать качественный вывод, что в случае не очень сильного рассогласования интересов центра и АЭ существует диапазон (зависящий от степени рассогласования интересов) возможных значений параметра, характеризующего возможную неадекватность модели, то есть невырожденный класс реальных активных систем, в котором оптимальным остается решение задачи синтеза для модели АС.

Выше мы исследовали устойчивость оптимальной скачкообразной функции стимулирования. Возникает закономерный вопрос: а почему были выбраны именно системы стимулирования С-типа, а не какие-либо другие, тоже оптимальные, например - QC, K, QK-типа и др.? Оказывается, что <u>скачкообразные системы стимулирования наиболее устойчивы в детерминированных задачах</u>.

Поясним последнее утверждение. Введем критерий сравнения устойчивостей различных систем стимулирования Понятно, что сравниваться должны только оптимальные системы стимулирования, хотя нетрудно привести пример, когда неоптимальное для модели АС решение оказывается оптимальным в реальной АС (что свидетельствует о неадекватности модели).

Из приведенных выше результатов детерминированной ТАС следует, что максимальное множество реализуемых действий может быть достигнуто при использовании различных систем стимулирования (решение задачи синтеза не единственно) – от скачкообразных до компенсаторных. Величины δ_0 и $\tilde{x}(\delta_0)$, определяемые в утверждениях 3.4 и 3.5, естественно, зависят от используемой функции штрафов. Если бы выше использовались не скачкообразные, а какие-либо другие функции штрафов, то получались бы и соответствующие оценки. Для их нахождения достаточно воспользоваться техникой, использованной при доказательстве утверждения 3.4. Поэтому будем считать, что одна оптимальная система стимулирования более устойчива, чем другая (тоже оптимальная система стимулирования), если при прочих равных первая приводит к бо́льшим значениям δ_0 и $\tilde{x}(\delta_0)$ (см. также (2.10)).

Из детерминированной теории известно, что на множестве согласованных функций штрафов оптимальна функция штрафов с максимальной степенью централизации (то есть $\chi_1 \succ \chi_2$ если $\forall\ x \in X$, $y \in A$ $\chi_1(x,y) \geq \chi_2(x,y)$, $\chi_1(x,x) = \chi_2(x,x)$). Оказывается, что степень централизации существенна и для устойчивости оптимального решения. Обозначим δ_0^1 и δ_0^2 – оценки, получаемые в соответствии с (2.10), (3.21), в первой и второй АС, отличающихся только функциями штрафов.

<u>Утверждение</u> <u>3.6.</u> Пусть $\tilde{\Pi} \in SP'$ и $y_t \in (y^-, y^+)$. Если функции штрафов $\chi_1, \chi_2 \in \mathfrak{X}(\tilde{m})$ и $\chi_1 \succ \chi_2$, то $\delta_0^1 \geq \delta_0^2$.

□ Пусть система стимулирования χ_2 реализует действие y_t. Из определения степени централизации следует, что если δ_0^2 удовлетворяет (3.21) для второй системы стимулирования, то она удовлетворяет (3.21) и для первой системы стимулирования. Значит система стимулирования χ_1 реализует то же действие, имеет бо́льшую степень централизации и характеризуется не меньшим значением δ_0.

Отметим, что так как обе функции штрафов χ_1 и χ_2 являются оптимальными (принадлежат $\mathfrak{X}(\tilde{m})$), то они характеризуются одной и той же эффективностью, поэтому сравнение характеристик (3.17) не целесообразно. ○

Утверждение 3.6 гласит, что с увеличением степени централизации устойчивость оптимального решения (в оговоренном выше смысле) не уменьшается. Значит максимальную устойчивость относительно возможных возмущений предпочтений АЭ в классе M имеет система стимулирования, характеризующаяся максимальной степенью централизации (использующая все резервы стимулирования).

Следствие 3.7. Пусть $\hbar \in SP'$ и $y_1 \in (y^-, y^+)$. Тогда скачкообразная система стимулирования максимально устойчива.

Незнание или неточное знание параметров моделируемой системы приводит к потере эффективности в следующем смысле, существенном для задач стимулирования второго рода [15]. Пусть, как и предполагалось выше, $\hbar \in SP'$ и $y_1 \in (y^-, y^+)$. Минимальные затраты на стимулирование по реализации действия y_1 равны

$$\mathfrak{C}_{FB}(y_1) = \hbar(y_2) - \hbar(y_1).$$

Разность $(C - \mathfrak{C}_{FB}(y_1))$ при использовании системы стимулирования C-типа с планом $x = y_1$, фактически, тратится впустую. Однако, в случае незнания истинной функции дохода (пусть центр знает, что $m \in \mathfrak{M}_\delta$, где δ не превосходит δ_0) использование всего "размаха" C функции штрафов необходимо. Действительно, соответствующее минимальной функции штрафов значение параметра δ_0 тождественно равно нулю и при сколь угодно малой погрешности описания модели мы не можем гарантировать реализации оптимального действия y_1 в реальной АС. Таким образом, величина $q = C - \mathfrak{C}_{FB}(y_1)$ (*см. рис.5 для рассматриваемого примера*) может интерпретироваться как плата за незнание или как плата за информацию [15].

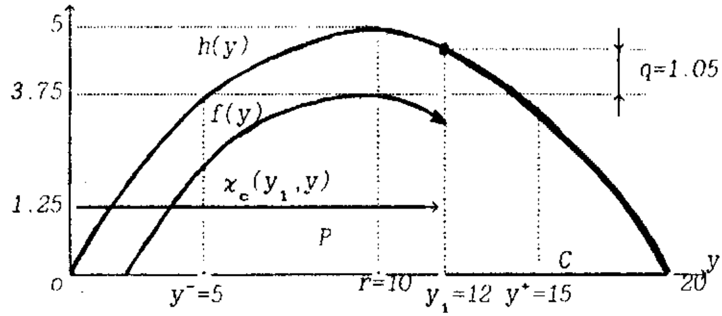

Рис.5.
"Плата за устойчивость" q в детерминированной задаче

В рамках условий утверждения 3.5 величина этой платы равна 2δ. При полностью адекватной модели за информацию платить не следует (δ=0), с ростом незнания (с увеличением δ) величина потерь (платы за информацию) увеличивается вплоть до всего фонда стимулирования C (см. условие $2\ \delta_0 \le C$ в утверждении 3.5). С использованием результата утверждения 3.5 по заданным y_1 и δ находятся минимальные затраты на стимулирование, обеспечивающие гарантированную реализацию действия y_1.

Перейдем к рассмотрению случая, когда интересы центра и активного элемента рассогласованы значительно, то есть когда точка максимума функции дохода центра лежит правее правой границы максимального множества реализуемых действий: $y_1 > y^+$ (случай $y_1 < y^-$ рассматривается полностью аналогично). При этом, если целевая функция центра квазиоднопиковая, то, очевидно, в случае полной информированности оптимальным является план $x^* = y^+$.

<u>Утверждение</u> <u>3.8.</u> Пусть $\bar{h}$, $H \in SP$ и $y_1 > y^+$. Тогда $\forall\ \delta \in (0, \delta_0]$, где δ_0 удовлетворяет (3.21), выполнено: а) $\mathfrak{D}_1(\delta)$, определяемая (3.18) - непрерывная функция; б) $\mathfrak{D}_2(\delta) > 0$.

□ Запишем условие реализуемости действия y^+ некоторой (например, скачкообразной) системой стимулирования из класса M, учитывая, что $x^* = y^+$: $\forall\ y \in A$

$$(3.23)\quad \bar{h}\ (\ y^+\ ) \ge \bar{h}\ (\ y\ ) - \chi^*\ (\ x^*,\ y\ ).$$

Видно, что при переходе к классу АС $\mathfrak{M}_\delta(\tilde{m})$ для любого $\delta > 0$ найдется АС $m \in \mathfrak{M}_\delta(\tilde{m})$, для которой используемая функция штрафов не будет реализовывать действие y^+, а "побудит" АЭ выбрать, например, действие y_2 (что содержательно обусловлено использованием всего размаха функции штрафов - см. также утверждение 3.5 и качественные рассуждения, приведенные выше). Значит $\forall\ \delta > 0$ имеет место: $\mathfrak{D}_2(\delta) = |\ H\ (y_2) - H\ (y_1)\ | > 0$. В силу определения точки y_1 получаем, что $\forall\ \delta > 0\ K\ (\chi^*_\delta) < K\ (\chi^*)$. Пункт б) утверждения доказан.

При фиксированном $\delta \ge 0$ максимум (3.18) по множеству $\mathfrak{M}_\delta(\tilde{m})$ достигается при плане

$$(3.24)\quad x^*_\delta = \bar{h}^{-1}\ [\ \bar{h}(y_2) - C + 2\ \delta\ ],$$

где $\bar{h}^{-1}\ (\ \cdot\ )$ - функция, обратная функции $\bar{h}(\cdot)$ (при $y \ge y_2$). При $\delta < \delta_0 = C\ /\ 2$ функция $x^*_\delta\ (\delta)$ в силу однопиковости функции дохода

АЭ является непрерывной и однозначно определенной. Из определения (3.18) и постоянства χ^* следует, что $\forall\ \delta$: $0 \le \delta < \delta_0$ $\mathfrak{D}_1(\delta)$ – непрерывная функция. ◦

Отметим, во-первых, что при $\delta = 0$ x^*_δ совпадает с y^*. Во-вторых, предположение об однопиковости функции дохода АЭ существенно, так как даже в случае квазиоднопиковых функций непрерывность $\mathfrak{D}_1(\delta)$ может нарушаться из-за возможной неоднозначности отображения $\mathrm{h}^{-1}(\cdot)$ (в точках плато функции $\mathrm{h}(\cdot)$). Возможно доопределение обратного отображения (h^{-1}) и обобщение приводимых результатов на случай ограниченных сверху функций дохода АЭ. Детальный анализ этого случая технически трудоемок и выходит за рамки настоящей работы.

Результат утверждения 3.8 малоутешителен. Содержательно, в случае существенного рассогласования интересов центра и АЭ, несмотря на непрерывное (в определенных пределах) изменение точки оптимального плана, эффективность стимулирования разрывна: сколь угодно малая неточность описания АС (неадекватность модели) приводит к катастрофическому снижению эффективности – активный элемент начинает выбирать действия, максимизирующие его функцию дохода, не обращая внимание на стимулирование. Отметим, что этот эффект имеет место не из-за антагонистичности (противоположности) интересов центра и АЭ, а из-за их рассогласования (несовпадения). При этом стимулирование все равно целесообразно, так как корректировка предпочтений АЭ в пределах, определяемых ограничениями механизма, имеет место.

Можно предложить несколько возможных путей выхода из сложившейся ситуации. Пусть известен класс АС $\mathfrak{M}_\delta(\tilde{m})$, которому заведомо принадлежит моделируемая активная система. Если исследователь операции хочет на основании анализа модели $\tilde{m}$ АС выработать рекомендации по оптимальному или удовлетворительному с точки зрения эффективности стимулированию в реальной АС, то, во-первых, он может максимизировать гарантированный результат по множеству $\mathfrak{M}_\delta(\tilde{m})$, то есть решать задачу стимулирования в активной системе с интервальной (или какой-либо другой) внешней неопределенностью [15].

Во-вторых, возможно увеличить устойчивость оптимального решения за счет увеличения затрат на стимулирование. Например, если имеется возможность увеличить верхнее ограничение механизма стимулирования, то можно реализовывать то же действие y^*, что и ранее, но с бо́льшим размахом функции штрафов, попав в условия утверждений 3.4 и 3.5. В соответствии с полученными выше результатами, это позволит увеличить устойчивость решения (диапазон значений δ, в котором используемая система стимулирования будет оставаться оптимальной).

В-третьих, можно поступиться эффективностью, уменьшив ее за счет реализации, например, меньшего действия. В силу утверждений 3.4 и 3.5 менее эффективное решение окажется более устойчивым (см., также общие утверждения во втором разделе). И наоборот, чем выше эффективность функции стимулирования, тем менее оно устойчиво. Поясним это утверждение следующим примером. Пусть $y_1 \gg y^*$. Тогда, используя, например, скачкообразные штрафы с планом $x = y^* + \delta$, где $\delta > 0$, центр может попытаться "реализовать" действие $(y^* + \delta)$. Кавычки использованы потому, что это действие не реализуемо в рамках используемой модели. В то же время можно показать, что в случае однопиковых функций дохода АЭ для любого $\delta > 0$ можно подобрать $\alpha_0 = \alpha_0(\delta) > 0$, такое, что для любого $\alpha \in [0,\alpha_0]$ найдется такая активная система $m \in \mathfrak{M}_\delta(\tilde{m})$, что АЭ выберет именнно действие $(y^* + \alpha)$, что вполне согласуется с результатами [15] для случая использования центром оптимистичной оценки неизвестного параметра.

В более общем случае этот подход может реализовываться следующим образом: приведенные выше результаты позволяют найти диапазон δ, при котором неадекватность модели не приводит к снижению эффективности, а также множество действий, которые гарантированно реализуемы при фиксированном значении парметра δ, отражающего незнание. Каждому значению $\delta \geq 0$ и каждому действию из множества $[y^-,y^+]$ (или из всего множества допустимых действий) соответствует некоторое оптимальное решение (система стимулирования). На основании имеющейся информации о возможной неадекватности модели, центр может решать задачу принятия решения об используемом управлении, применяя ту или иную стратегию поведения (устранения неопределенности, определения эффективности и т.д.), быть может, отличную от рассмотренных выше.

Реализуем идею об увеличении области устойчивости решения за счет снижения его эффективности. В условиях утверждения 3.8 использовался классический принцип оптимальности π_0. Пусть центр использует критериальный принцип оптимальности $\mathfrak{K}_\varepsilon$ (3.14) с $\varepsilon \geq 0$. Вопрос заключается в следующем: каково должно быть минимальное ε, чтобы решение $\chi^* \in \mathfrak{K}_\varepsilon(\tilde{m})$ было гарантированно оптимально (в смысле $\mathfrak{K}_\varepsilon$) на заданном множестве моделей $\mathfrak{M}_\delta(\tilde{m})$, то есть чтобы имело место: $\forall\ m \in \mathfrak{M}_\delta(\tilde{m})\quad \chi^* \in \mathfrak{K}_\varepsilon(m)$. Воспользуемся утверждениями 2.1 и 2.2.

<u>Утверждение</u> <u>3.9.</u> Пусть центр использует принцип оптимальности $\mathfrak{K}_\varepsilon(m)$ и модель $\tilde{m} \in \mathfrak{M}$ АС такова, что $\tilde{h}$, $H \in SP$, $y_1 > y^+$. Тогда для любого $\delta \in [0, C/2]$ существует ε_0:

$$(3.25)\quad \varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta) = \Phi\ [\ h^{-1}\{h(y_2)-C\}\ ] - \Phi\ [\ h^{-1}\{h(y_2)-C+2\delta\ \}\ ],$$

такое, что для любого $\varepsilon \geq \varepsilon_0$ существует решение $\chi_c^* \in M_x$, такое, что $\forall\ m \in \mathfrak{M}_\delta(\tilde{m})$ выполнено $\chi_c^* \in \mathfrak{K}_\varepsilon(m) \cap \mathfrak{K}_\varepsilon(\tilde{m})$. Более того, план в системе стимулирования χ_c^* определяется (3.24).

□ Из (3.24) следует, что определяемый в этом выражении план x_δ^* является максимальным планом, гарантированно реализуемым в множестве $\mathfrak{M}_\delta(\tilde{m})$. Следовательно, положив $\varepsilon \geq \varepsilon_0 = \Phi(y^+) - \Phi(x_\delta^*)$, получим, во-первых (3.25), а во-вторых, что система стимулирования С-типа $\chi_c(x_\delta^*, y)$ удовлетворяет принципу оптимальности $\mathfrak{K}_\varepsilon(m)$ для любой АС $m \in \mathfrak{M}_\delta(\tilde{m})$, в том числе, естественно, и для самой модели $\tilde{m}$. ○

Первое слагаемое в (3.25) есть ни что иное, как эффективность стимулирования в АС с полной (точной) информированностью. Следовательно, введя следующие обозначения: $K_0 = \Phi\ [\ h^{-1}\{h(y_2)-C\}\ ]$, $K_\delta = \Phi\ [\ h^{-1}\{h(y_2)-C+2\delta\ \}\ ] \leq K_0$, (3.25) можно записать в виде:

$$\varepsilon \geq \varepsilon_0(\delta) = K_0 - K_\delta .$$

Такая запись в явном виде подчеркивает то, что ε характеризует потери в эффективности, обусловленные незнанием. Поэтому в дальнейшем мы будем использовать последнее представление.

Отметим конструктивность утверждения 3.9 - оно дает конкретную зависимость $\varepsilon_0(\delta)$ (3.25). Например, для АС в которой $\Phi(y) = y$, $h(y) = A - ky$, $A > 0$, $k > 0$, применяя (3.25), получаем: $\varepsilon_0(\delta) = 2\delta/k$. Строгая однопиковость в условиях утверждения 3.9 нужна, как и ранее, для существования $\tilde{h}^{-1}$.

В рассматриваемом примере зависимость $\varepsilon_0(\delta)$ имеет вид:

$$\varepsilon_0(\delta) = 5\ (\ 1- \sqrt{1-1.6\delta}\ ),$$

где $\delta \in [\ 0,\ 0625\ ]$.

Содержательно (3.25) дает зависимость между потерями в эффективности управления и неточностью описания модели. Если центру известна величина δ, определяющая окрестность модели, которой заведомо принадлежит моделируемая АС, то используя принцип оптимальности $\mathfrak{K}_{\varepsilon}$, в котором $\varepsilon \ge \varepsilon_0(\delta)$, он может найти множество решений, гарантированно применимых во всем множестве $\mathfrak{M}_{\delta}(\tilde{m})$ реальных АС. Понятно, что с точки зрения эффективности управления выбирать ε, строго большие ε_0, не имеет смысла.

Из (3.25) также следует вполне соответствующий здравому смыслу факт: с ростом δ величина $\varepsilon_0(\delta)$ не уменьшается, а при $\delta > C/2$ стимулирование теряет смысл – неопределенность (потенциальная неадекватность модели) настолько велика, что никакое управление не возможно: при любых управлениях не исключено, что АЭ выберет действие, максимизирующее его полезность в отсутствии управления.

Отметим, что во всех приведенных выше утверждениях (3.4-3.9) фигурирует характерная величина – 2δ, где $\delta = \max\limits_{m \in \mathfrak{M}(\tilde{m})} \mu(m,\tilde{m})$ (см. также (3.15)). Анализ изменения подобных характерных величин составляет по-существу основную часть оставшегося материала настоящего раздела.

Итак, (3.25) позволяет "ослабив" принцип оптимальности (допустив использование решений, которые не оптимальны с классической точки зрения) добиться того, что и оптимальное решение, и его эффективность устойчивы по параметрам заданного класса моделей. Возникает вопрос – а стоит ли вводить дополнительные принципы оптимальности ? Положительный ответ следует из просто устанавливаемого факта: в рамках введенных предположений максимальное гарантированное в $\mathfrak{M}_{\delta}(\tilde{m})$ значение целевой функции центра при использовании принципа оптимальности $\mathfrak{K}_{\varepsilon_0(\delta)}$ не ниже, чем при использовании $\mathfrak{K}_0$.

Следует напомнить, что выражение (3.25) было получено для системы стимулирования С-типа. Более того, напомним также, что во втором разделе устойчивость принципов оптимальности определялась с помощью метрики Хаусдорфа, сравнивающей <u>все</u> множества решений для различных моделей. Мы же решали до сих пор задачу частного выбора – указывали одну оптимальную систему стимулирования и исследовали ее устойчивость и эффективность (в [11,12] для задачи частного выбора предлагается использовать слабую устойчивость, определяемую по отклонению (2.3)). Противоречия здесь никакого нет - в каждом конкретном случае на практике требуется принять решение об управлении - выбрать и использовать некоторую (единственную!) систему стимулирования (ср. (2.5) и (2.5)'). Сравнение же всех элементов образа принципа оптимальности приведет к сильном изменению всех оценок в "худшую" сторону (например, в (3.25) ε_0 увеличится и т.д.).

Можно показать, что большинство оптимальных для модели систем стимулирования, например - K,QK и QC-типа, очень неустойчиво по сравнению со скачкообразными. Поэтому, вычисляя в (2.4) минимум по всему множеству $\mathfrak{K}(m)$, мы учли бы и "плохие" решения (эффективность которых максимальна, а область устойчивости совпадает с моделью), не используемые на практике.

Замечание о неустойчивости компенсаторных и квазикомпенсаторных систем стимулирования достаточно огорчительно, так как они являются оптимальными решениями большинства задач стимулирования второго рода [15].

Для полноты картины остается сказать, что использование техники доказательств, примененной в [15], позволяет доказать, что оценка (3.25) не улучшаема в классе M. Последнее утверждение, совместно со следствием 3.7 позволяет констатировать, что <u>в детерминированных АС системы стимулирования С-типа обладают одновременно максимальной устойчивостью и максимальной эффективностью.</u>

В конце второго раздела было отмечено, что принцип оптимальности (2.12) может рассматриваться как регуляризирующий для проблемы адекватности. Сформулируем этот факт корректно для рассматриваемой задачи стимулирования.

Напомним, что принцип оптимальности $\mathfrak{K}_\varepsilon$ называется регуляризующим принцип оптимальности $\mathfrak{K}_0$ на модели $\tilde{m} \in \mathfrak{M}$ [11], если выполнены условия:

1) Существует $\delta_0 > 0$, такое, что принцип оптимальности определен для любых $\varepsilon > 0$ и $m \in \mathfrak{M}$, таких, что $\mu(m,\tilde{m}) \le \delta_0$.

2) Существует отображение $A(\delta)$, такое, что $A(\delta) \subset E^k_+$ и

$$(3.26)\quad \lim_{\substack{\mu(m,\tilde{m}) \to 0 \\ \varepsilon \to 0 \\ \varepsilon \in A(\mu(m,\tilde{m}))}} H\nu\left(\mathfrak{K}_\varepsilon(m),\ \mathfrak{K}_0(\tilde{m}) \right) = 0.$$

Для рассматриваемой задачи стимулирования в (3.26) заменим $H\nu$ на (3.18), а в качестве π_ε возьмем (3.14) ($\pi_0 = \pi_{\varepsilon=0}$). Из утверждений 3.4 и 3.5 следует, что при $y_1 \in (y^-, y^+)$ и $\delta \in [0, C/2]$:

$$(3.27)\ A(\delta) = \begin{cases} \{ 0 \}, \text{ при } \delta \le 1/2\ [\ \tilde{h}(y_1) - \tilde{h}(y_2) + C\ ] \\ \{ \varepsilon \ge \varepsilon_1(\delta) \}, \text{ при } C/2 \ge \delta \ge 1/2\ [h(y_1) - \tilde{h}(y_2) + C] \end{cases},$$

где $\varepsilon_1(\delta) = \Phi(y_1) - \Phi\ [\ \tilde{h}^{-1}\{\ \tilde{h}(y_2) - C + 2\delta\ \}\ ]$; а из утверждения 3.9 следует, что при $y_1 \notin (\ y^-, y^+\ )$ и $\delta \in [0, C/2]$:

$$(3.28)\ A(\delta) = \{\ \varepsilon \ge \varepsilon\ (\delta)_0 \},$$

где $\varepsilon_0(\delta)$ определяется (3.25); а при $\delta > C/2$ стимулирование не имеет смысла.

Выполнение (3.26) при этих условиях очевидно. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Утверждение 3.10. Критериальный принцип оптимальности π_ε (3.14) является регуляризующим критериальный принцип оптимальности π_0 в детерминированной модели АС с неточным описанием предпочтений АЭ (3.15), причем параметр регуляризации удовлетворяет (3.27)-(3.28).

Отметим, что в [7,11,12] регуляризация принципа оптимальности в игре Γ_2 при возможных возмущениях модели осуществлялась за счет введения предположения о выборе активным элементом ε-оптимальных стратегий (см. понятие β-рационального выбора в [14]), где ε специальным образом зависело от расстояния δ между моделями и предполагалось, что центр использует γ-оптимальные стратегии, причем параметр γ не зависел от δ. В этих работах использование регуляризации давало возможность говорить о корректности задачи Γ_2 по целевой функции второго игрока - активного элемента. Предположение о том, что в условиях возможной неадекватности модели АЭ будет выбирать ε-оптимальные стратегии, на практике оказывается необоснованным - задача управления решается центром и именно центр должен решать проблему адекватности, не перекладывая ее на подчиненного.

В рамках нашего исследования регуляризация, позволяющая решить проблему адекватности модели, осуществляется за счет использования центром ε-оптимальных стратегий, в которых параметр регуляризации ε зависит от множества реальных АС и самой модели.

Перейдем к исследованию устойчивости решения задач стимулирования в детерминированных активных системах и адекватности моделей в условиях возможной неточности описания предпочтений центра - его целевой функции.

3.3. Устойчивость по предпочтениям центра

Предположим, что исследователю операций достоверно известны все параметры модели, за исключением предпочтений центра, то есть:

$$m = \{ A, M, H, h \},\ \tilde{m} = \{ A, M, \tilde{H}, h \},$$

причем имеет место:

(3.29) $\mathfrak{M}_\gamma(\tilde{m}) = \{ m \in \mathfrak{M} \mid \forall y \in A \ \ \tilde{H}(y) - \gamma \le H(y) \le \tilde{H}(y) + \gamma \}$.

Ранее мы подчеркивали, исследователь операций стоит на позициях оперирующей стороны - центра, что, однако, не исключает возможности неточной его информированности о предпочтениях последнего.

Если известно, что целевая функция центра не убывает по действиям АЭ, то, очевидно, оптимальным решением является скачкообразная система стимулирования с планом y^+ (отметим, что, знание целевой функции центра несущественно для достоверного определения максимального множества решений игры) - $\chi_c^* = \chi_c(y^+,y)$. При этом для любого $\gamma \ge 0$ и для любых моделей $\tilde{m} \in \mathfrak{M}$; $m \in \mathfrak{M}_\gamma(\tilde{m})$ выполнено: $\chi_c^* \in \mathfrak{K}_0(m)$. Использовании регуляризации в этом случае возможно, но нецелесообразно - требуемая устойчивость решения и адекватность и так имеют место.

Больший интерес представляет случай когда существует конечное действие АЭ, наиболее предпочтительное для центра. Поэтому предположим, что H, $\tilde{H} \in SP'$. Определим следующие величины:

(3.30) $y^\pm(\gamma) = \max\ (\min)\ \{ y \in A \mid \tilde{H}(y) + \gamma \ge \tilde{H}(y_1) - \gamma \}$,

где, как и ранее, y_1 - точка максимума целевой функции центра в модели $\tilde{m}$. Если класс реальных АС $\mathfrak{M}_\gamma(\tilde{m})$ таков, что $y^-(\gamma) > y^+$, то получаем рассмотренный выше случай монотонной целевой функции центра.

Обозначим $\mathfrak{K}_\gamma$ - принцип оптимальности (3.14), в котором $\varepsilon=\gamma$. Если множество решений игры $P = [y^-,y^+]$ и множество возможных максимумов (ограничиваемых (3.29) и требованием $H \in SP'$) целевой функции центра, $P_1(\gamma) = [y^-(\gamma), y^+(\gamma)]$ пересекаются для заданного γ, то, очевидно оптимальным будет, например, множество скачкообразных систем стимулирования с точками планов из множества $P \cap P_1(\gamma)$. То есть, имеет место:

$$(3.31)\ \forall\ \gamma \geq 0:\ P \cap P_1(\gamma) \neq \varnothing\quad \mathfrak{K}_\gamma(\tilde{m}) = \{\ \chi(x,y) \in M \mid x \in P \cap P_1(\gamma)\ \}.$$

Напомним (см. подраздел 3.1 и [3,15]), что в детерминированной модели полностью адекватной реальной АС оптимальной являлась следующая стратегия центра: использовать скачкообрзную систему стимулирования с планом $x^*(y_1) = \mathrm{Proj}_P(y_1)$, то есть назначать план, совпадающей с проекцией на множество реализуемых действий точки максимума целевой функции центра:

$$(3.32)\ x^*(y_1) = \begin{cases} y^-, & \text{если } y_1 \leq y^- \\ y_1, & \text{если } y_1 \in [y^-, y^+]. \\ y^+, & \text{если } y_1 \geq y^+ \end{cases}$$

Из (3.32) следует, что для рассматриваемой задачи имеет место:

- если $y_1 > y^+$, то $\bigcap\limits_{0 \leq \gamma \leq \gamma_0} \mathfrak{K}_\gamma(\tilde{m}) \ni \chi_c(y^+, y)$;
- если $y_1 < y^-$, то $\bigcap\limits_{0 \leq \gamma \leq \gamma_0} \mathfrak{K}_\gamma(\tilde{m}) \ni \chi_c(y^-, y)$;
- если $y_1 \in [y^-, y^+]$, то $\bigcap\limits_{0 \leq \gamma \leq \gamma_0} \mathfrak{K}_\gamma(\tilde{m}) \ni \chi_c(y_1, y)$,

где $\gamma_0 \geq 0$ – некоторая константа, характеризующая заданный класс реальных АС.

Таким образом, мы доказали справедливость следующего утверждения.

<u>Утверждение</u> <u>3.11.</u> Если h, $H \in SP'$ и выполнено (3.29), то оптимальной и максимально устойчивой является система стимулирования С-типа, определяемая (3.32). Это решение и его эффективность устойчивы в классе $\mathfrak{M}_\gamma(\tilde{m})$ при любых $\gamma \geq 0$.

Из (3.31) и (3.32) вытекает следующий факт: система стимулирования С-типа с планом (3.32) является γ-оптимальной при любых $\gamma \geq 0$, то есть при использовании центром принципа оптимальности $\mathfrak{K}_\gamma$ (в том числе – и "классического" $\mathfrak{K}_0$) решение (3.32) ему удовлетворяет.

Пусть в рассматриваемом примере $H(y) = y - y^2/40$, *то есть* $y_1=20$, $\gamma = 4.425$. *Тогда* $y^-(\gamma) = 14$, $y^+(\gamma) = 26$ *(см. рис.6, на котором диапазон возможных значений целевой функции центра заштрихован). При этом* $[y^-(\gamma), \; y^+(\gamma)\;] \cap P = [\;14, \; 15\;]$. *Следовательно, оптимальными в смысле* $\mathfrak{K}_\gamma$ *являются системы стимулирования с планами из отрезка* P.

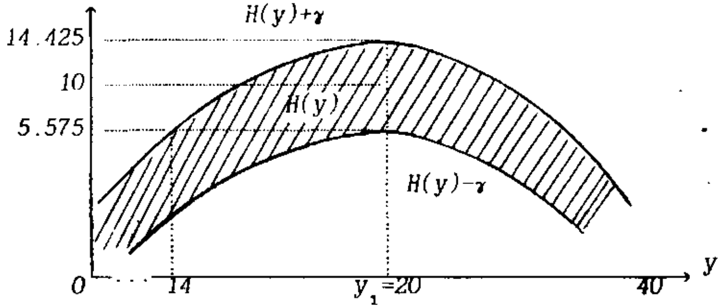

Рис.6.
Множество целевых функций центра

Полученные в настоящем подразделе результаты свидетельствуют, что решение задачи стимулирования в детерминированной АС нечувствительно к неточности описания предпочтений центра – и само решение, и, что более удивительно (см. для сравнения подраздел 3.2), его эффективность устойчивы, поэтому использование принципов оптимальности $\mathfrak{K}_\gamma$ с $\gamma > 0$ (регуляризации) не имеет смысла, так как оно не расширяет $\mathfrak{M}(\tilde{m})$.

Соответствующий формальный результат о регуляризации – аналог утверждения 3.10 – примет следующий тавтологический (использовать регуляризацию в случае, когда $\forall \gamma \geq 0 \;\; A(\gamma) = \mathbb{R}^+_1$, не имеет смысла) вид.

<u>Утверждение</u> <u>3.12.</u> Критериальный принцип оптимальности $\mathfrak{K}_c$ (3.14) является регуляризующим критериальный принцип оптимальности $\mathfrak{K}_0$ в детерминированной модели АС с неточным описанием предпочтений центра (3.29), причем параметр регуляризации может принимать любые неотрицательные значения.

3.4. Устойчивость по ограничениям механизма стимулирования

Предположим, что исследователю операций достоверно известны все параметры модели, за исключением ограничений механизма стимулирования, то есть величины C (в модели C = C). Таким образом:

$$m = \{ A, M, H, h \},\ \tilde{m} = \{ A, M, H, h \},$$

причем имеет место:

$$(3.33)\quad \mathfrak{M}_\beta(\tilde{m}) = \{ m \in \mathfrak{M} \mid C - \beta \le C \le C + \beta \},\quad \beta \ge 0.$$

В рассматриваемом случае границы максимального множества решений игры зависят от $\beta \ge 0$. Обозначим максимальные множества решений игры, соответствующие $(C - \beta)$ и $(C + \beta)$, $P^-(\beta) = [y^-(-\beta), y^+(-\beta)]$ и $P^+(\beta) = [y^-(+\beta), y^+(+\beta)]$, где:

$$(3.34)\quad y^\pm(-\beta) = \max\ (\min)\ \{ y \in A \mid h(y) \ge h(y_2) - C + \beta \},$$

$$y^\pm(+\beta) = \max\ (\min)\ \{ y \in A \mid h(y) \ge h(y_2) - C - \beta \}.$$

Очевидно, $\forall\ \beta \ge 0\ P^-(\beta) \subseteq P \subseteq P^+(\beta)$.

По аналогии с доказательством утверждения 3.4 доказывается следующее

<u>Утверждение 3.13.</u> Пусть $\tilde{H}$, $H \in SP'$ и $y_1 \in (y^-, y^+)$. Тогда существует $\beta_0 > 0$, равное

$$\beta_0 = \tilde{H}(y_1) + C - \tilde{H}(y_2),$$

такое, что $\forall\ \beta \in [0, \beta_0)$, $\forall\ m \in \mathfrak{M}_\beta(\tilde{m})$ выполнено: а) $\exists\ x^*_\beta(m) = y_1$ такое, что $\chi_c(x^*_\beta(m), y) \in \mathfrak{K}_0(\tilde{m})$; $\mathfrak{D}_2(\beta) = 0$.

Следовательно, если интересы центра и АЭ рассогласованы не слишком сильно $(y_1 \in (y^-, y^+))$, то оптимальное решение невозмущенной задачи остается оптимальным (в классическом смысле) в ненулевой окрестности модели при возможной неточности описания ограничений механизма стимулирования – в β_0-окрестности модели устойчивы и само решение и его эффективность, причем по аналогии с разделом 3.2 обосновывается максимальная устойчивость скачкообразных систем стимулирования.

Пусть в рассматриваемом примере $\beta = 0.25$. *Тогда* $y^+(+\beta) = 10+2\sqrt{5}$, $y^-(+\beta) = 10-2\sqrt{5}$, $y^+(-\beta) = 10+\sqrt{30}$, $y^-(-\beta) = 10+\sqrt{30}$ *(см. рис.7).*

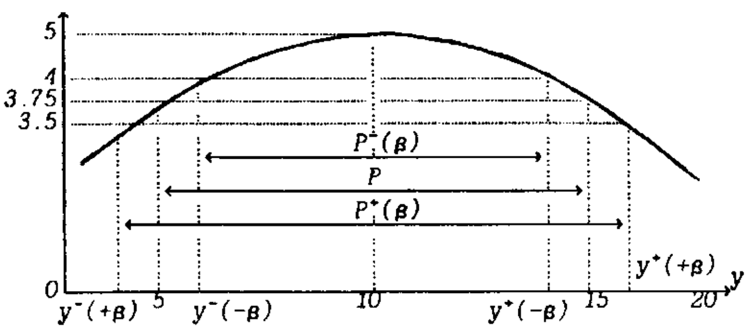

Рис.7.

Максимальные множества реализуемых действий

При $y_1 > y^+$ эффективность оптимального решения оказывается неустойчивой, то есть справедлив следующий аналог утверждения 3.8.

<u>Утверждение 3.14.</u> Пусть центр использует принцип оптимальности $\mathfrak{K}_\varepsilon(m)$ и модель $\tilde{m} \in \mathfrak{M}$ АС такова, что $\tilde{h}$, $H \in SP$, $y_1 > y^+$. Тогда для любого $\beta \in [0,C]$ существует ε_0:

$$(3.35)\quad \varepsilon_0 = \varepsilon_0(\beta) = K_0 - \Phi\ [\ h^{-1}\{h(y_2)-C+\beta\ \}\ \ ],$$

такое, что для любого $\varepsilon \ge \varepsilon_0$ существует решение $\chi_c^* \in M_\kappa$, такое, что $\forall\ m \in \mathfrak{M}_\delta(\tilde{m})$ выполнено $\chi_c^* \in \mathfrak{K}_\varepsilon(m) \cap \mathfrak{K}_\varepsilon(\tilde{m})$. Более того, план в системе стимулирования χ_c^* равен $y^+(-\beta)$, то есть:

$$K_\beta = \Phi\ [\ h^{-1}\{\ h(y_2)\ -\ C\ +\ \beta\ \}\ ].$$

Перейдем к корректировке принципа оптимальности – построению регуляризующего принципа оптимальности. Для этого определим отображение $A(\beta)$ следующим образом $\forall\ \beta \in [0,C]$: при $y_1 \in (y^-,y^+)$,

$$(3.36)\quad A(\delta)=\begin{cases} \{\ 0\ \},\ \text{при}\ \beta \le\ \ [\ \tilde{h}(y_1)\ -\ \tilde{h}(y_2)\ +\ C\ ] \\ \{\ \varepsilon\ge 0\ |\ \varepsilon\ge\varepsilon_1(\delta)\ \},\ C/2 \ge C \ge\ \ [\tilde{h}(y_1)-\tilde{h}(y_2)+C] \end{cases},$$

где $\varepsilon_1(\delta) = \tilde{\Phi}(y_1) - \Phi\ [\ \tilde{h}^{-1}\{\ \tilde{h}(y_2)\ -\ C\ +\ \beta\ \}\ ]$; при $y_1 \notin (y^-,y^+)$,

$$(3.37)\quad A(\beta)\ =\ \{\ \varepsilon \ge 0\ |\ \varepsilon \ge \varepsilon_0(\beta)\ \},$$

где $\varepsilon_0(\beta)$ определяется (3.35); при $\beta > C$ стимулирование бессмысленно.

Утверждение 3.15. Критериальный принцип оптимальности $\mathfrak{K}_c$ (3.14) является регуляризующим критериальный принцип оптимальности $\mathfrak{K}_0$ в детерминированной модели АС с неточным описанием ограничений механизма стимулирования (3.33), причем параметр регуляризации удовлетворяет (3.36)-(3.37).

Таким образом, в модели с неточно известными ограничениями механизма стимулирования характерной величиной является β (ср. (3.25) и (3.35)). Перейдем к анализу случая, когда неточно известно множество допустимых действий АЭ.

3.5. Устойчивость по множеству допустимых действий активного элемента

Предположим, что исследователю операций достоверно известны все параметры модели, за исключением множества реализуемых действий активного элемента, то есть:

$$\mathfrak{m} = \{ A, M, H, h \},\ \tilde{\mathfrak{m}} = \{ \tilde{A}, M, H, h \}.$$

В соответствии с предположением А.3.1 $A = \mathbb{R}^1$ или $\exists\ A^-,\ A^+$ такие, что $A = [A^-, A^+]$ и $-\infty < A^- \le y_2 \le A^+ < +\infty$. Предположим, что существует $w \in \mathbb{R}^1$ и $\xi \ge 0$, такие, что $U_\xi(w)$ является множеством запрещенных действий, где $\xi \ge 0$ – некоторый параметр, то есть имеет место:

$$(3.38)\ A_\xi(w) = \{ y \in \tilde{A} \mid y \notin U_\xi(w) \} = \tilde{A} \setminus U_\xi(w).$$

Если пара (ξ, w) такова, что $P \subset A_\xi(w)$, то получаем рассмотренный выше случай АС с точным описанием параметров модели. Поэтому рассмотрим случай, когда существуют $a(\xi,w) = w-\xi$ и $b(\xi,w) = w+\xi$, такие, что $P \cap [a,b] \ne \emptyset$.

Пусть целевая функция центра – квазиоднопиковая. Обозначим $P(\xi,w) = P \setminus [a(\xi,w), b(\xi,w)]$. Тогда оптимальное по $\mathfrak{K}_0$ действие АЭ определяется следующим выражением:

$$(3.39)\ x^*(\xi,w) = \arg\max_{y \in P(\xi,w)} H(y).$$

Действие (3.39) реализует скачкообразная система стимулирования $\chi_c(x^*(\xi,w), y)$, а также система стимулирования К-типа, причем последняя не зависит от неточности (ξ,w)!

Введем более сильные предположения относительно возможного множества допустимых действий АЭ, а именно пусть $w = A^+ \ge y^+$.

Тогда, очевидно, скачкообразная система стимулирования оптимальна, то есть $\chi_c(x(\xi,y_1)) \in \mathfrak{K}(m)\ \forall\ m \in \mathfrak{M}_\xi(\tilde{m})$, где $x(\xi,y_1)$ удовлетворяет:

$$(3.40)\ x(\xi,y_1) = \min \{ y_1,\ y^+,\ (A^+ - \xi) \},$$

и максимально устойчива.

Пусть в рассматриваемом примере $A^+ = 20$, $\xi = 6$. *Тогда* $P(\xi,w) = [\ 5,\ 14\ ]$ *(см. рис.8).*

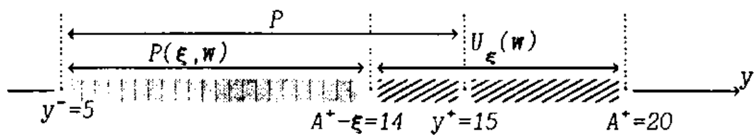

Рис.8.

Множество допустимых действий АЭ с учетом запрещенных состояний

Утверждение 3.16. Пусть центр использует принцип оптимальности $\mathfrak{K}_c(m)$ и модель $\tilde{m} \in \mathfrak{M}$ АС такова, что h, $H \in SP'$. Тогда для любого $\xi \in [0,A^+-y_2]$ существует ε_0:

$$(3.41)\ \varepsilon_0 = \varepsilon_0(\xi) = \begin{cases} 0, \text{ если } y_1 \le A^+ - \xi \\ \Phi(y_1) - \Phi(A^+-\xi), \text{ если } A^+ - \xi \le y_1 \le y^+, \\ \Phi(y^+) - \Phi(A^+-\xi), \text{ если } A^+ - \xi \le y^+ \le y^1 \end{cases}$$

такое, что для любого $\varepsilon \ge \varepsilon_0(\xi)$ существует решение $\chi_c^* \in M_x$, такое, что $\forall\ m \in \mathfrak{M}_\xi(\tilde{m})$ выполнено $\chi_c^* \in \mathfrak{K}_c(m) \cap \mathfrak{K}_\varepsilon(\tilde{m})$. Более того, план в системе стимулирования χ_c^* удовлетворяет (3.40).

Определим отображение $A(\xi)$:

$$(3.42)\ A(\xi) = \{ \varepsilon \ge 0 \mid \varepsilon \ge \varepsilon_0(\xi) \},$$

где $\varepsilon_0(\xi)$ определяется (3.41), а ξ принадлежит $[0,A^+-y_2]$.

Утверждение 3.17. Критериальный принцип оптимальности $\mathfrak{K}_\varepsilon$ (3.14) является регуляризующим критериальный принцип оптимальности в детерминированной модели АС с неточным описанием множества допустимых действий активного элемента, причем параметр регуляризации удовлетворяет (3.42).

Таким образом, в модели с неточно известным множеством допустимых действий АЭ характерной величиной является β (ср. (3.25), (3.35) и (3.41)). Отметим, что при исследовании устойчивости по предпочтениям АЭ и ограничениям механизма стимулирования зависимость ε_0 от неточности имела два "режима", соответствующие $y_1 \in [y^-, y^+]$ и $y_1 > y^+$. В (3.41) имеются уже три "режима", соответствующие различным соотношениям между y_1, y^+ и $a(\xi, w)$ (если отказаться от фиксированности w, то число различных "режимов" станет ее больше). Перейдем к анализу устойчивости по модели в целом.

3.6. Обобщенные решения и устойчивость по модели в целом

В подразделах 3.2 - 3.5 было проведено исследование устойчивости решений задачи стимулирования и адекватности модели детерминированной активной системы при вариациях отдельных компонентов модели: предпочтений АЭ и центра, ограничений механизма и множества допустимых действий АЭ. Синтезируем полученные результаты для случая когда реальная активная система может отличаться от модели по всем упомянутым составляющим.

Итак, пусть $m = \{ A, M, H, h \}$, $\tilde{m} = \{ \tilde{A}, \tilde{M}, \tilde{H}, \tilde{h} \}$, причем $h(\cdot)$ удовлетворяет (3.15), $H(\cdot)$ - (3.29), M - (3.33), A - (3.38). Напомним, что неточности описания предпочтений АЭ отвечала переменная δ, предпочтений центра - γ, ограничений механизма - β, множества допустимых действий - ξ. Регуляризирующие принципы оптимальности определяются, соответственно, утверждениями: 3.10 ((3.25), (3.27), (3.28)); 3.12 ($A(\gamma)$ - любое); 3.15 ((3.35)-(3.37)) и 3.17 ((3.41), (3.42)).

Напомним, что так как во всех рассматриваемых досих пор моделях максимально устойчивыми оказывались скачкообразные системы стимулирования, то достаточно ограничиться их изучением и для общей модели настоящего подраздела.

Положим $\gamma = 0$, так как из результатов подраздела 3.3. следует устойчивость решения и его эффективности по предпочтениям центра (см. (3.32)).

Пусть заданы $\{ \bar{\delta} \ge 0, \bar{\beta} \ge 0, \bar{\xi} \ge 0 \}$ - класс реальных АС, определяемый возможными отклонениями от фиксированной модели $\tilde{m}$, для которой известны $\tilde{h}$, $\tilde{H}$, $\tilde{A}$, $\tilde{M}$, по которым, в свою очередь, вычисляются величины y_1, y_2, A^+ и др.

Предположим, что h, H $\in$ SP (напомним, что при h, H $\in$ SP' может не существовать функции, обратной функции дохода АЭ даже при $y \geq y_2$, $y_1 \geq y_2$) и рассмотрим следующие случаи.

Случай 1. Пусть выполнено

(3.43) $y_1 \leq y^+ \leq A^+ - \bar{\xi}$.

Вычислим следующую величину:

(3.44) $\alpha_1 = \bar{h}(y_1) - \bar{h}(y_2) + C$.

Если имеет место:

(3.45) $2\bar{\delta} + \bar{\beta} \leq \alpha_1$,

то положим $A(\alpha,\delta,\xi) = 0$. Оптимальной в смысле $\mathfrak{K}_0$ является система стимулирования C-типа с планом:

(3.46) $x_1^* = y_1$.

Если $2\bar{\delta} + \bar{\beta} > \alpha_1$, то не существует $\mathfrak{K}_0$-оптимальной в $\mathfrak{M}(\tilde{m})$ системы стимулирования, поэтому построим для этого случая регуляризующий принцип оптимальности. Это возможно, если

(3.47) $2\bar{\delta} + \bar{\beta} \leq C$.

Тогда, положив

(3.48) $x_1^* = \bar{h}^{-1}(\bar{h}(y_2) + 2\bar{\delta} + \bar{\beta} - C) \leq y_1$,

получаем, что $\mathfrak{K}_c$ является регуляризующим $\mathfrak{K}_0$ принципом оптимальности в $\mathfrak{M}(\tilde{m})$, если ε удовлетворяет:

(3.49) $\varepsilon \geq \varepsilon_1 = K_0 - \Phi\ [\ \bar{h}^{-1}\{\ \bar{h}(y_2) + 2\bar{\delta} + \bar{\beta} - C\ \}\ ]$,

где $K_0 = \Phi(y_2)$.

Если $2\bar{\delta} + \bar{\beta} > C$, то стимулирование бессмыслено – соответствующая величина ε_1 будет такова, что эффективность регуляризующего принципа оптимальности будет не выше, чем в отсутствии стимулирования вообще, то есть не существует принципа оптимальности, которому хотя бы одно решение удовлетворяло для всего класса возможных реальных АС.

Случай 2. Пусть выполнено

(3.50) $y^+ \leq y_1 \leq A^+ - \bar{\xi}$.

Как и в случае 1, если нарушено (3.47), то стимулирование бессмысленно. Если (3.47) выполнено, то регуляризующим является принцип оптимальности $\mathfrak{K}_\varepsilon$, где ε удовлетворяет:

(3.51) $\varepsilon \ge \varepsilon_2 = K_0 - \Phi\ [\ \hbar^{-1}\{\hbar(y_2)+2\bar{\delta}+\bar{\beta}-C\}\ ]$,

где $K_0 = \Phi\ [\ \hbar^{-1}\{\hbar(y_2)-C\}\ ]$.

План оптимальной системы стимулирования С-типа удовлетворяет (3.48):

(3.52) $x_2^* = \hbar^{-1}(\ \hbar(y_2) + 2\bar{\delta} + \bar{\beta} - C\ ) = x_1^*$.

<u>Случай</u> <u>3.</u> Пусть выполнено:

(3.53) $y_1 \le A^+ - \bar{\xi} \le y^+$.

Данный случай совпадает со случаем 1.

<u>Случай</u> <u>4.</u> Пусть выполнено:

(3.54) $y^+ \le A^+ - \bar{\xi} \le y_1$.

Данный случай совпадает со случаем 2.

<u>Случай</u> <u>5.</u> Пусть выполнено:

(3.55) $A^+ - \bar{\xi} \le y_1 \le y^+$.

Вычислим следующую величину:

(3.56) $\alpha_5 = \hbar(A^+-\xi) - \hbar(y_2) + C$.

Если имеет место:

(3.57) $2\bar{\delta} + \bar{\beta} \le \alpha_5$,

то положим $A(\alpha,\delta,\xi) = 0$ и используем систему стимулирования С-типа с планом:

(3.58) $x_5^* = A^+- \xi$,

которая $\mathfrak{K}_0$-оптимальна.

Если $2\bar{\delta} + \bar{\beta} > \alpha_5$, то не существует $\mathfrak{K}_0$-оптимальной в $\mathfrak{M}(\tilde{m})$ системы стимулирования, поэтому построим для этого случая регуляризующий принцип оптимальности. Это возможно, если выполнено (3.47). Тогда, положив

(3.59) $x_5^* = \hbar^{-1}(\ \hbar(y_2) + 2\bar{\delta} + \bar{\beta} - C\ ) = x_1^*$, получаем, что $\mathfrak{K}_\varepsilon$ является регуляризующим $\mathfrak{K}_0$ принципом оптимальности в $\mathfrak{M}(\tilde{m})$, если ε удовлетворяет:

(3.60) $\varepsilon \geq \varepsilon_5 = \Phi\ (\ A^+ - \xi\ ) - \Phi\ [\ \bar{h}^{-1}\{\ \bar{h}(y_2) + 2\bar{\delta} + \bar{\beta} - C\ \}\ ]$.

Отметим, что в отличие от (3.49) и (3.51) в (3.60) первое слагаемое не равно соответствующему K_0, то есть нарушение (3.57) - "наихудший" случай.

Если $2\bar{\delta} + \bar{\beta} > C$, то стимулирование бессмыслено.

Случай 6. Пусть выполнено:

(3.61) $A^+ - \bar{\xi} \leq y^+ \leq y_1$.

Данный случай совпадает со случаем 5.

Таким образом, объединяя рассмотренные выше шесть случаев, охватывающих все возможные комбинации параметров, и результаты утверждений 3.4 - 3.17, получаем следующий результат:

Теорема 3.18. Пусть задана модель $\tilde{m} \in \mathfrak{M}$ и класс реальных АС $\mathfrak{M}_{\bar{\delta},\beta,\xi}(\tilde{m})$, таких, что h, $H \in SP'$, $y_1 \geq y_2$, $w = A^+ \geq y_2$. Тогда:

а) Если $2\bar{\delta} + \bar{\beta} > C$ или $\bar{\xi} > A^+ - y_2$, то стимулирование бессмысленно.

б) Если $2\bar{\delta} + \bar{\beta} \leq C$, то $\forall\ m \in \mathfrak{M}_{\bar{\delta},\beta,\xi}(\tilde{m})$:

1) Если $y_1 \leq y^+$ и $y_1 \leq A^+ - \bar{\xi}$, то:

если $2\bar{\delta} + \bar{\beta} \leq \bar{h}(y_1) - \bar{h}(y_2) + C$, то $\chi_c(y_1,y) \in \mathfrak{K}_0(m)$;

если $2\bar{\delta} + \bar{\beta} \geq \bar{h}(y_1) - \bar{h}(y_2) + C$, то $\chi_c(x_1^*,y) \in \mathfrak{K}_\varepsilon(m)$,

где x_1^* удовлетворяет (3.48), а ε - (3.49);

2) Если $y^+ \leq y_1$ и $y^+ \leq A^+ - \bar{\xi}$, то:

$\chi_c(x_2^*,y) \in \mathfrak{K}_\varepsilon(m)$, где x_2^* удовлетворяет (3.52), а ε-(3.51).

3) Если $A^+ - \bar{\xi} \leq y_1$ и $A^+ - \bar{\xi} \leq y^+$, то:

если $2\bar{\delta} + \bar{\beta} \leq \bar{h}(A^+-\bar{\xi}) - \bar{h}(y_2) + C$, то $\chi_c(A^+-\bar{\xi},y) \in \mathfrak{K}_0(m)$;

если $2\bar{\delta} + \bar{\beta} \geq \bar{h}(A^+-\bar{\xi}) - \bar{h}(y_2) + C$, то $\chi_c(x_5^*,y) \in \mathfrak{K}_\varepsilon(m)$, где x_5^* удовлетворяет (3.59), а ε - (3.60).

Теорема 3.18 дает полное решение проблем анализа устойчивости решений детерминированных задач стимулирования и адекватности модели: в ней определяется обобщенное решение детерминированной задачи стимулирования - зависимость между семейством АС из окрестности модели и решениями, имеющими максимальную гарантированную эффективность и устойчивость в этой окрестности (см. второй раздел).

Еще раз отметим, что построенные регуляризующие принципы оптимальности отличаются от приведенных в [11,12] предположением об использовании именно центром, а не АЭ, ε-оптимальных стратегий. Отличие от результатов исследования базовых задач стимулирования, приведенных в [15], заключается в поиске единственной системы стимулирования, имеющей максимальную гарантированную по заданному классу АС эффективность в условиях возмущений всех параметров модели (в [15] неточность описания могла иметь место только относительно предпочтений АЭ).

Особо следует отметить следующий факт: возможность применения результата утверждения 3.18 не требует от исследователя операций точного знания всех параметров модели - функций предпочтения, ограничений и т.д. Достаточной оказывается информация о нескольких характерных точках, фигурирующих в выражениях (3.43) - (3.61).

Так не требуется точного знания функций $\bar{H}(y)$ и $\bar{h}(y)$, а достаточным оказывается информация о следующих величинах:

$$(3.62)\ \{\ \bar{\xi},\ \bar{\beta},\ \bar{\delta},\ C,\ A^{+},\ y_1,\ y_2,\ y^{+},\ \bar{h}(y_1),\ \bar{h}(y_2),\ \bar{H}(y^{+}),\ x_1^{*},\ \bar{H}(x_1^{*}),\ \bar{h}(A^{+}-\bar{\xi}),\ \bar{H}(A^{+}-\bar{\xi})\ \}.$$

Итак, для решения непрерывной задачи стимулирования в АС со смешанной неопределенностью (с возможными порешностями измерения параметров) достаточно знания значений всего пятнадцати параметров (характерных величин - (3.62)), причем от "неточности" $\bar{\xi}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\delta}$ в рамках введенных предположений зависят только последние четыре величины, которые мы условно назовем возмущенными.

При построении обобщенного решения по этим пятнадцати числам, получаемым, например, в результате экспертного или непосредственного выявления предпочтений экономического агента, возникает следующий вопрос - а как обобщенное решение зависит от ошибок используемой процедуры "измерения" (агент может исказить информацию сознательно или быть не в состоянии объективно сформулировать свое субъективное мнение). Рефлексия по отношению к задаче, решаемой в настоящей работе лишь кажущаяся - используя предложенную технику анализа устойчивости и адекватности возможно "заложить" погрешности измерения в класс исследуемых АС, то есть свести задачу к уже решенной (все пятнадцать характерных параметров (3.62) являются либо действиями АЭ, либо множествами возможных значений, либо значениями функций предпочтения, то есть теми объектами, относительно возмущений которых и исследовались устойчивость решений и адекватность модели).

Последнее утверждение означает, что обобщенные решения могут быть эффективно использованы при обработке неточной информации следующего типа. Пусть имеются невозмущенные данные о предпочтениях агента - модель АС. Далее вопрос о точности (объективности и т.д.) этих данных решается либо исследователем операции самостоятельно, либо совместно с агентом, то есть определение области возможных возмущений и, следовательно, определение одного из компонентов обобщенного решения, производится путем целенаправленного введения некоторых отличных от нуля величин $\bar{\xi}$, $\bar{\beta}$ и $\bar{\delta}$ (нахождение значений возмущаемых переменных). Тем самым задача сводится к уже решенной.

Пусть в рассматриваемом примере: $\bar{\xi} = 6$, $\bar{\beta} = 0.25$, $\bar{\delta} = 0.5$, $C = 1.25$, $A^+ = 20$, $y_1 = 20$, $y_2 = 10$, $y^+ = 15$, $\hbar(y_1) = 0$, $\hbar(y_2)=5$, $\hbar(A_1^+-\bar{\xi}) = 4.2$, $x_1^* = 10$, $H(y^+) = 15$, $H(x_1^*) = 10$, $H(A_1^+-\bar{\xi}) = 14$.

При данных числовых значениях мы попадаем в пункт а) теоремы 3.18. Действительно, $2\bar{\delta} + \bar{\beta} = C$ *и стимулирование бессмысленно, так как потенциальная неопределенность слишком велика.*

Пусть удалось получить дополнительную информацию о предпочтениях АЭ и величина $\bar{\delta}$ *уменьшилась до* 0.25. *Тогда:* $x_1^* \approx 13.2$ *(точное значение -* $(10 + \sqrt{10})$*),* $H(x_1^*) \approx 13.2$.

В соответствии с теоремой 3.18 имеем третий пункт случая б), причем: $2\bar{\delta} + \bar{\beta} = 0.75 > \hbar(A^+-\bar{\xi}) - \hbar(y_2) + C = 0.45$.

Значит оптимальный план определяется (3.60), то есть оптимальна скачкообразная система стимулирования с планом $x_1^* = 10 + \sqrt{10}$, *а минимальная величина* ε *определяется (3.59), то есть* $\varepsilon_0 = H(A_1^+-\bar{\xi}) - H(x_1^*) \approx 0.8$, *причем* $H(A_1^+-\bar{\xi}) = 14 < K_0 = 15$.

Итак, в "модифицированном" примере оптимальна система стимулирования С-типа с планом x_1^*, а гарантированная эффективность этой системы стимулирования максимальна и равна $(10+\sqrt{10})$ во всем классе реальных АС, соответствующие параметры которых отличаются от модели не более, чем на $\bar{\xi}$, $\bar{\beta}$ и $\bar{\delta}$.

Таким образом, полученные выше результаты свидетельствуют, что для $\mathfrak{K}_0$-оптимальных решений детерминированных задач стимулирования в рамках вводимых предположений существует невырожденная окрестность модели, в которой это решение устойчиво. Эффективность же этого решения в общем случае не устойчива. В то же время, теорема 3.18 определяет соотношения между эффективностью управления $(K_0-\varepsilon)$ и окрестностью модели, в которой $\mathfrak{K}_\varepsilon$-оптимальные решения и их эффективности абсолютно устойчивы.

Итак, в настоящем разделе мы исследовали устойчивость решений детерминированной задачи стимулирования по параметрам модели и проблему адекватности детерминированных моделей. В последующих трех разделах исследуется устойчивость решения для ряда базовых задач стимулирования, функционирующих в условиях интервальной, вероятностной и нечеткой неопределенности. Так как результат теоремы 3.18 был получен при помощи достаточно простой процедуры синтезирования результатов предыдущих утверждений настоящего раздела, то при исследовании устойчивости решений и адекватности базовых моделей АС с неопределенностью мы будем акцентировать внимание на их специфике, считая, что в них устойчивость по таким параметрам модели как: предпочтения АЭ, ограничения механизма стимулирования и множество допустимых действий АЭ, а также адекватность модели анализируются по аналогии с детерминированным случаем.

4. ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ СТИМУЛИРОВАНИЯ В АКТИВНЫХ СИСТЕМАХ С ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

Рассмотрим модель активной системы с внешней интервальной неопределенностью:

(4.1) $\tilde{m} = \{ \tilde{A}, \tilde{A}_0, \tilde{h}(z), \tilde{H}(y), \tilde{\Omega}, \tilde{M}, Q(\cdot,\cdot) \}$,

в которой действие АЭ $y \in A$ может отличаться от результата его деятельности $z \in A_0 = A$ (который наблюдает центр и за который АЭ поощряется или наказывается), определяемого действием и внешним неопределенным параметром - состоянием природы: $z = Q(y,\theta)$, $\theta \in \tilde{\Omega}$. Будем считать, что в модели множество $\tilde{\Omega} = \{ \tilde{\theta} \}$ состоит из одного элемента $\tilde{\theta}$ такого, что $\forall\ y \in A$ $Q(y,\tilde{\theta}) = y$.

Предположим, что реальная активная система

(4.2) $m = \{ \tilde{A}, \tilde{A}_0, \tilde{h}, \tilde{H}, \Omega, \tilde{M}, Q(\cdot,\cdot) \}$

может отличаться от модели только множеством возможных значений неопределенного параметра, причем $\Omega = [\tilde{\theta} - \delta, \tilde{\theta} + \delta]$, $\delta \ge 0$, то есть $\mathfrak{M}_\delta(\tilde{m}) = \{ m \in \mathfrak{M} \mid \mu(m,\tilde{m}) = \max\limits_{\theta\in\Omega} |\tilde{\theta} - \theta| \le \delta \}$. Понятно, что система стимулирования С-типа, опимальная в модели, устойчива, а ее эффективность не устойчива. Исследуем для рассматриваемой модели области устойчивости и адекватности при различных решениях задачи стимулирования.

Если центр использует систему стимулирования $\chi \in M$, то при фиксированном $\theta \in \Omega$ множество точек максимума функции дохода АЭ: $f(\chi,y,\theta) = h(y) - \chi(z)$ равно:

(4.3) $Z(y,\chi,\theta) = \operatorname{Arg}\max\limits_{z\in A_0} \{ h(Q(y,\theta)) - \chi(z) \}$.

Множество реализуемых действий при этом равно:

(4.4) $P(\chi,\theta) = \{ y \in A \mid Q(y,\theta) \in Z(y,\chi,\theta) \}$.

Следовательно, для того, чтобы рамках гипотезы благожелательности побудить АЭ в выбрать наиболее благоприятное для центра действие следует использовать систему стимулирования $\chi^* \in M$, обеспечивающей достижение максимума по $z \in A_0$ целевой функции центра на множестве:

(4.5) $Z(\chi^*) = \bigcup\limits_{\theta\in\Omega} Q (\operatorname{Proj}_P (y_1), \theta)$.

Легко видеть, что оптимальная стратегия центра имеет следующий вид.

Утверждение 4.1. Если $y_1 \leq z^+ - \delta$, то оптимальна квазикомпенсаторная система стимулирования, обеспечивающая максимум целевой функции АЭ на отрезке

$$P_1(\delta) = [y_1-\delta,\ y_1+\delta];$$

гарантированная эффективность стимулирования при этом равна $K_1(\delta) = \min_{y \in P_1(\delta)} H(y)$.

Если $y_1 > z^+ - \delta$, то при $\delta > 1/2\ (z^+-z_2)$ стимулирование бессмысленно, а при $\delta \leq 1/2\ (z^+-z_2)$ оптимальна квазикомпенсаторная система стимулирования, обеспечивающая максимум целевой функции АЭ на отрезке

$$P_2(\delta) = [z^+-2\delta,\ z^+];$$

гарантированная эффективность стимулирования при этом равна $K_2(\delta) = H\ (\ z^+ - 2\delta\ )$.

Отметим, что гарантированная эффективность оптимальных решений, приведенных в утверждении 4.1 и сами эти решения устойчивы относительно "возмущений" множества возможных значений состояния природы, причем регуляризирующий принцип оптимальности (зависимость $\varepsilon_0(\delta)$) определяется $H(y_1) - K_1(\delta)$ и $H(z^+) - K_2(\delta)$.

Напомним, что выше мы предполагали, что реальная активная система может отличаться от модели только множеством возможных значений внешнего неопределенного параметра. Если возможны отклонения других параметров, то при синтезе результатов утверждений 3.18 и 4.1 следует обратить внимание на следующий факт. В детерминированных АС максимальной устойчивостью обладают системы стимулирования С-типа. В рассмотренной в настоящем разделе АС с внешней интервальной неопределенностью оптимальными и максимально устойчивыми оказываются квазикомпенсаторные системы стимулирования (см. утверждение 4.1), которые, в свою очередь, чрезвычайно неустойчивы относительно вариаций предпочтений АЭ, ограничений механизма стимулирования и т.д. Поэтому при допущении о возможности одновременного "возмущения" нескольких параметров непосредственное объединение результатов двух разделов необоснованно - необходимо исследовать максимальные гарантированные области устойчивости систем стимулирования QC-типа с использованием техники доказательств утверждений третьего раздела. В общем случае этот вопрос отстается открытым и является предметом будущих исследований.

5. ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТИМУЛИРОВАНИЯ В АКТИВНЫХ СИСТЕМАХ С ВЕРОЯТНОСТНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

Модель вероятностной активной системы с внешней неопределенностью представляет собой кортеж:

(5.1) $\tilde{m} = \{ \tilde{A}, \tilde{A}_0, M, \tilde{H}(\cdot), \tilde{p}(\cdot,\cdot), \tilde{h}(\cdot) \}$,

где $p(z,y)$ - плотность распределения вероятности реализации результата деятельности АЭ $z \in A_0$ при действии $y \in A$, известная на момент принятия решений и центру, и активному элементу.

Предположим, что модель может отличаться от реальной (моделируемой) АС либо функцией дохода АЭ: $\tilde{h}(\cdot) \neq h(\cdot)$, либо распределением вероятностей результатов деятельности АЭ: $\tilde{p}(\cdot,\cdot) \neq p(\cdot,\cdot)$.

Рассмотрим модель вероятностной активной системы, удовлетворяющей предположениям, вводимым в [15], в которой распределение $p(z,y) = \hat{p}(z-y)$. Если возможная неадекватность обусловлена неточным знанием функции дохода АЭ, то справедлив результат, аналогичный утверждениям 3.4 - 3.5, причем легко видеть, что скачкообразная функция стимулирования оказывается в вероятностной активной системе менее устойчивой, чем в соответствующей детерминированной АС (то есть имеет при фиксированном y_1 меньшее значение ограничения δ_0 (аналог (3.21)) и меньшее множество гарантированно реализуемых действий при фиксированном значении δ_0).

Предположим, что истинная функция дохода АЭ достоверно известна центру и возможная неадекватность модели обусловлена незнанием функции распределения. Множество моделей $\mathfrak{M}_\delta(\tilde{m})$, $\delta \geq 0$, определим следующим образом:

$$(5.2)\ \mathfrak{M}_\delta(\tilde{m}) = \{ F(\cdot,\cdot) \mid \forall x \in A_0,\ y \in A$$
$$F(x,y) \in [\ \max \{ 0, \mathbf{F}(x,y) - \delta\}, \min \{ 1, \mathbf{F}(x,y) + \delta \} \ ] \},$$

где $F(\cdot,\cdot)$ - интегральная функция распределения, соответствующая плотности $p(\cdot,\cdot)$, $\mathbf{F}$ - распределение, используемое в модели (отметим, что множество $\mathfrak{M}_\delta(\tilde{m})$, задаваемое (5.2), должно содержать только неубывающие по x и невозрастающие по y функции).

Рассмотрим частный случай, когда $y_1 \in [\ y_2, y^* \ ]$, где y^* - максимальное реализуемое системами стимулирования С-типа действие, распределение $\hat{p}$ финитно (имеет носитель $[\ -\Delta,\ \Delta\ ]$) и

$y_1 \geq y_2 + 2\,\Delta$. Запишем условие реализации действия y_1 в модели $m \in \mathfrak{M}_\delta(\tilde{m})$ [15]: $\forall\ y \in A$

(5.3) $h(y_1) - C\ F(x_1, y_1) \geq h(y) - C\ F(x_1, y)$,

где x_1 – план (точка скачка). Воспользовавшись результатами анализа вероятностных АС, приведенными в [15], и принципом максимального гарантированного результата, получаем

(5.4) $h(y_1) - C\ (\ \min\ \{\ 1,\ F(x_1, y_1) + \delta\ \}\ ) \geq h(y_2) - C$.

Максимальное $\delta \geq 0$, при котором (5.4) еще имеет место, есть не что иное, как ограничение Δ класса АС, в которых действие y_1 гарантированно реализуемо. Записывая условия, аналогичные (5.3)-(5.4), можно для фиксированного класса моделей (для заданного δ) получить максимальное множество гарантированно реализуемых действий. Если распределение не финитно, или если при финитном распределении имеет место $y_1 < y_2 + 2\,\Delta$, или если нарушается условие $y_1 \in [y_2, y^*]$, то анализ несколько усложнится: при переходе от (5.3) к (5.4) придется рассматривать наихудшее соотношение функций распределения в точках y_1, y^* и y_5 (см. детали в [15]).

Рассмотрим устойчивость оптимального решения в модели вероятностной активной системы с одним простым активным элементом. В соответствии с результатами [15] при фиксированной модели АС центру следует использовать компенсаторную систему стимулирования. Учитывая свойства вероятностного распределения результатов деятельности простого АЭ, для анализа ожидаемой полезности достаточно исследовать поведение просто функции полезности при использовании центром той или иной функции штрафов.

Однако, из анализа устойчивости оптимальных решений в детерминированных АС, проведенного в разделе 3, следует, что система стимулирования К-типа "не очень" устойчива. Содержательно это объясняется тем, что штрафы К-типа имеют достаточно низкую степень централизации. Можно строго показать, что если центр использует в системе с простым АЭ компенсаторную функцию штрафов, то для любого значения параметра δ, отражающего неинформированность о предпочтениях АЭ в отсутствии стимулирования, и для любого реализуемого в модели действия найдется такая АС из класса $\mathfrak{M}_\delta(\tilde{m})$, что в ней это действие не будет реализовываться.

Несколько обнадеживающим является тот факт, что оптимальное решение задачи синтеза в АС с простым АЭ чрезвычайно устойчиво по неточности информации о функции распределения. Из результатов [15] следует, что какова бы ни была функция распределения (лишь бы она удовлетворяла наложенным ограничениям, иначе говоря, лишь бы мы оставались в рамках модели простого АЭ) система стимулирования К-типа оптимальна. Значит при моделировании АС с простыми АЭ, если точно известно, что реальная АС описывается одной из функций распределения, соответствующих модели простого АЭ, то не стоит уточнять информацию о функции распределения, а целесообразно все силы направить на получение максимально полной информации о других параметрах моделируемой системы.

Приведенные рассуждения свидетельствуют, что результаты анализа устойчивости оптимального решения для детерминированной АС могут быть успешно обобщены на случай АС с вероятностной неопределенностью.

6. ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТИМУЛИРОВАНИЯ В АКТИВНЫХ СИСТЕМАХ С НЕЧЕТКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

Рассмотрим модель активной системы с внешней нечеткой неопределенностью:

$$(6.1)\ \tilde{\mathbf{m}} = \{\ \mathbf{A},\ \mathbf{A}_0,\ \bar{h}(z),\ \mathbf{H}(y),\ \mathbf{M},\ \tilde{P}(z,y)\ \},$$

в которой, в отличие от модели, рассмотренной в разделах 4 и 5, центр и АЭ имеют нечеткую информацию $\tilde{P}(z,y)$ о состоянии природы. Решение соответствующей "классической" задачи стимулирования приведено в [14,15].

Предположим, что в модели $\tilde{\mathbf{m}}$ результат деятельности совпадает с действием АЭ, а класс реальных исследуемых АС отличается от модели только возможностью несовпадения результата деятельности АЭ и его действия, причем нечеткая информационная функция имеет вид: $\tilde{P}(z,y) = \begin{cases} 1, z\in U_\delta(y) \\ 0, z\notin U_\delta(y) \end{cases}$, а состояние природы не наблюдается ни центром, ни активным элементом на момент выбора стратегий, т.е.:

$$(6.2)\ \mathbf{m} = \{\ \mathbf{A},\ \mathbf{A}_0,\ \bar{h}(z),\ \mathbf{H}(y),\ \mathbf{M},\ \tilde{P}(z,y)\ \}.$$

Получили задачу стимулирования в АС с внешней нечеткой неопределенностью и симметричной информированностью. Из результатов ее анализа, приведенных в [15], следует справедливость следующего утверждения.

<u>Утверждение</u> <u>6.1</u> Если $y_1 > y^+$, то оптимальна система стимулирования С-типа, $x^*_\delta = y^+$, $K(\sigma_c) = H(y^+-\delta)$ и

$$(6.3)\ \varepsilon \ge \varepsilon_0(\delta) = H(y^+) - H(y^+-\delta);$$

Если $y_2 \le y_1 \le y^+$, то, если $\delta > y_1 - y_2$, то стимулирование бессмысленно; если $\delta \le y_1 - y_2$, то $x^*_\delta = y_1$, $K(\sigma_c) = H(y_1-\delta)$ и

$$(6.4)\ \varepsilon \ge \varepsilon_0(\delta) = H(y_1) - H(y_1-\delta).$$

Итак, утверждение 6.1 определяет обобщенное решение задачи стимулирования для рассматриваемой нечеткой АС.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ процесса построения математических моделей активных систем, приведенного на рисунке 1, свидетельствует о существовании в рамках используемого представления двух проблем - проблемы устойчивости решений и проблемы адекватности моделей. Для задач стимулирования решения, оптимальные в смысле максимальной эффективности, как правило, устойчивы по параметрам модели, а эффективность этих решений в общем случае не устойчива.

Возможность гарантированного обеспечения максимально возможной эффективности управления в заданном классе реальных активных систем появляется при реализации следующего подхода. Как было показано выше, зачастую, область адекватности модели АС совпадает с самой моделью. Поэтому целесообразно поступиться эффективностью управления ради расширения соответствующих областей устойчивости и адекватности. Если класс реальных АС задан как окрестность некоторой модели, то оказывается возможным определить зависимость эффективности управления от этой окрестности, такую, что фиксированное ε-оптимальное решение будет иметь максимальную гарантированную эффективность во всем исследуемом классе реальных АС. При этом критериальный принцип ε-оптимальности оказывается регуляризующим для классического принципа оптимальности (семейство принципов оптимальности задается критерием эффективности управления, причем, в отличие от [7,11], регуляризация обусловлена предположением о выборе ε-оптимальных стратегий именно центром, а не активным элементом), то есть при стремлении модели к реальной АС имеет место как непрерывное по специальным образом выбранной метрике стремление самого ε-оптимального решения к "классически" оптимальному в модели решению, так и стремление эффективности управления, оптимального в модели к эффективности управления, оптимального в реальной АС.

В соответствии с приведенными выше рассуждениями в настоящей работе обобщенным решением задачи стимулирования предложено называть совокупность (2.16), включающую семейство решений (множество ε-оптимальных решений), зависящих от возможной неточности описания моделируемой системы. Конкретные зависимости для частных задач, рассмотренных в настоящей работе приведены выше (см., например, теорему 3.18, дающую полное решение детерминированной задачи стимулирования, и т.д.).

На практике нередко решается обратная задача: имеется множество "потенциальных объектов управления" и требуется найти управление, обладающее максимальной гарантированной эффективностью в этом множестве. Эта задача может рассматриваться как задача стимулирования в активной системе с неопределенностью, а может и как проблема адекватности. С другой стороны, обобщенное решение охватывает все возможные случаи, в том числе и упомянутый выше. Если же априори допустимое множество не известно, то построение обобщенного решения необходимо. Такой подход вполне согласован с методологией, развиваемой до настоящего времени в теории активных систем, в которой при определении эффективности стимулирования в каждом конкретном случае используется гарантированный результат по множеству неизвестных или неопределенных параметров [3]. Параметрические же зависимости от неопределенных параметров до сих пор практически не исследовались.

Сделанное выше замечание о возможности эффективного использования обобщенных решений только при наличии аналитических зависимостей "классического" решения от параметров модели является существенным. Действительно, если аналитическое решение отсутствует, как это имеет место, например, для общего случая задачи теории контрактов [1] или проблемы манипулирования информацией [2], то возможность применения численных методов для построения обобщенных решений вызывает определенные сомнения, хотя-бы из-за огромной вычислительной сложности соответствующих задач. Некоторым оправданием может служить следующее рассуждение. Для подавляющего большинства "решенных" задач управления в активных системах найдены именно достаточные (а не необходимые!) условия оптимальности (согласованности, неманипулируемости и т.д.). Предположения, фигурирующие в этих достаточных условиях, естественно, ограничивают круг их применимости. Наличие методологии построения и исследования обобщенных решений расширяет возможности исследователя операций в следующем смысле. Пусть имеется модель реальной АС, не удовлетворяющая ни одному из известных достаточных условий, например, оптимальности, то есть решение задачи синтеза оптимальных управлений для этой модели не известно. Если некоторые "близкие" модели удовлетворяют известным достаточным условиям, то, применяя обобщенные решения, можно оценить потери в эффективности управления, вызываемые заменой исследуемой модели другой моделью, для которой аналитическое решение хорошо известно. Образно говоря, в пространстве моделей существует "базис" - набор точек (моделей), решения задач управления для которых известны. Обобщенное решение, построенное "вокруг" одной из точек "базиса" дает возможность определить эффективность использования "базисных" решениях. При этом, естественно, чем "дальше" находится реальная АС от ближайшей "базисной" точки, тем ниже эффективность "базисного" управления в ней. Такое представление "по аналогии" наверное позволяет не только приближенно решать практические задачи, используя накопленный опыт и применяя его в новых ситуациях, но и найти в пространстве моделей "белые пятна" - области, содержащие модели, в которых применение известных методов и механизмов управления не эффективно.

Полученные результаты позволяют надеяться, что используемый подход (описание, технология и техника исследования) окажется применимым в широком классе моделей управления активными системами.

В частности, задачи устойчивости и адекватности механизмов стимулирования в АС с неопределенностью, рассмотренные в разделах 4 - 6, практически совпадают с соответствующими базовыми задачами стимулирования, детально описанными в [15]. Различие заключается в том, что в последних центр и исследователь операций знают о существовании неопределенности и учитывают ее при решении базовой задачи, причем с ростом неопределенности уменьшается гарантированная эффективность стимулирования. Те же эффекты наблюдаются при построении регуляризирующих принципов оптимальности в обобщенных решениях, в которых потенциальная неопределенность возникает в результате необходимости анализа семейства моделей. Наличие такой двойственности позволяет переносить результаты анализа базовых моделей механизмов стимулирования в АС с неопределенностью на обобщенные решения и наоборот. Более того, эффективное использование обобщенных решений возможно при наличии именно аналитических решений частных базовых задач, что является еще одним аргументом в пользу их дальнейшего совместного исследования.

Отметим, что "расстояние" между моделью и моделируемой системой определяется различиями их параметров. Поэтому с одной стороны обобщенное решение может рассматриваться как включающее в себя базовые модели АС с неопределенностью того или иного типа или вида, а с другой стороны - как решение задачи стимулирования в АС со смешанной неопределенностью (см. классификацию, введенную в [15]). Качественное отличие обобщенных решений от "обычных" решений базовых задач стимулирования находится на уровне методологии: в базовых моделях АС с неопределенностью при поиске классически оптимальных решений неопределенность "заключена" в модель, в то время как использование обобщенных решений соответствует анализу семейства моделей, в том числе - семейства моделей АС с неопределенностью.

Использование обобщенных решений позволяет вводить в рассмотрение механизмы с платой за информацию [15], в которых центр (а, следовательно, и исследователь операций) имеет возможность уменьшить неопределенность (сузить класс реальных АС, для которых строится модель) за счет приобретения дополнительной информации. При этом с одной стороны имеет место повышение гарантированной эффективности управления за счет уменьшения класса реальных АС, которым должна быть адекватна модель, а с другой стороны - управляющие возможности центра уменьшаются, так как часть средств может быть потрачена на приобретение информации. Приведенные в [15] методы решения задач синтеза механизмов стимулирования с платой за информацию также могут быть эффективно использованы совместно с обобщенными решениями.

Применение именно обобщенных решений, как повышающих эффективность математического моделирования, представляется достаточно важным, особенно на этапе практического использования. Поэтому можно надеяться, что теоретическое изучение устойчивости решений и адекватности моделей станет обязательным требованием к исследователю операций, использующему математическое (теоретико-игровое) моделирование как метод исследования сложных социально-экономических систем.

Автор считает своим приятным долгом выразить признательность д.т.н. В.Н.Буркову, д.т.н. Э.А.Трахтенгерцу, П.А.Харлапу, а также участникам общемосковских семинаров "Экспертные оценки и анализ данных" и "Логическое моделирование" за конструктивную критику и рекомендации по содержанию и структуре настоящей работы. Все недостатки, естественно, следует отнести на счет автора.

8. ЛИТЕРАТУРА

1. Бурков В.Н., Еналеев А.К., Новиков Д.А. Механизмы стимулирования в вероятностных моделях социально-экономических систем // А и Т. 1993. N 11. С. 3 - 30.

2. Бурков В.Н., Еналеев А.К., Новиков Д.А. Механизмы функционирования социально-экономических систем с сообщением информации // А и Т. 1996. N 3. С. 3 - 25.

3. Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981. - 384 с.

4. Большие системы: моделирование организационных механизмов / Бурков В.Н., Данев Б., Еналеев А.К. и др. М.: Наука, 1989.-245 с.

5. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Введение в теорию активных систем. М.: ИПУ РАН, 1996. - 125 с.

6. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять проектами. М.: Синтег, 1997. - 188 с.

7. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976. - 328 с.

8. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989. - 624 с.

9. Кононенко А.Ф., Халезов А.Д., Чумаков В.В. Принятие решений в условиях неопределенности. М.: ВЦ АН СССР, 1991. - 211 с.

10. Месарович М., Такахара Я. Общая теория систем: математические основы. М.: МИР, 1978. - 311 с.

11. Молодцов Д.А. Устойчивость принципов оптимальности / Современное состояние теории исследования операций. М.: Наука, 1979. - С. 236 - 262.

12. Молодцов Д.А. Устойчивость принципов оптимальности. М.: Наука, 1987. - 280 с.

13. Новиков Д.А. Механизмы стимулирования в динамических и многоэлементных социально-экономических системах // А и Т. 1997. N 6. С. 3 - 26.

14. Новиков Д.А. Механизмы стимулирования в моделях активных систем с нечеткой неопределенностью. М.: ИПУ РАН, 1997. - 101 с.

15. Новиков Д.А. Стимулирование в социально-экономических системах (базовые математические модели). М.: Институт проблем управления РАН, 1998. - 216 с.

16. Орлов А.И. Устойчивость в социально-экономических моделях. М.: Наука, 1979. - 294 с.

17. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. - 288 с.

Типография МИФИ **Заказ** 534 **Тираж** 100 экз.