Математическая Теория Игр и её Приложения, т.3, в.4, с. 3–22

УДК 519:301
ББК 60.54, 32.81

ПОРОГОВЫЕ МОДЕЛИ ВЗАИМНОГО СТРАХОВАНИЯ

Владимир В. Бреер
Дмитрий А. Новиков
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 65
e-mail: breer@live.ru, novikov@ipu.ru

Рассматриваются игровые модели взаимного страхования. Игровая ситуация состоит в выборе игрока принимать или не принимать участие в фонде взаимного страхования. Поведение игрока зависит от несклонности игрока к риску. Через скалярный коэффициент несклонности к риску агента определяются целевые функции, которые приводят к пороговому поведению игроков. Рассматриваются игровые модели для анонимных и неанонимных страхователей, и для этих моделей приводится структура равновесия Нэша.

Ключевые слова: страхование, игровая модель, целевая функция, несклонность к риску, равновесие Нэша, пороговое поведение.

1. Введение

В настоящей работе рассматриваются модели взаимного страхования, в которых выгодность участия в страховой программе отдельного агента определяется размером страхового фонда, то есть числом агентов, принявших решение участвовать в этой программе. Изложение имеет следующую структуру. Во втором разделе кратко описаны известные и используемые ниже подходы к моделированию отношения агентов к риску. Противопоставляются целевые функции склонного, несклонного и нейтрального к риску агента. В этом разделе вводится терминология, которая будет использована в дальнейшем изложении, и приводятся соответствующие содержательные интерпретации. В частности, вводится скалярный коэффициент степени несклонности агента к риску, который позволяет в дальнейшем упростить получение аналитических результатов поведения моделей.

В третьем разделе приводятся модели взаимного страхования. Фонд страхования считается некоммерческим, т.е. не получающим прибыль. Рассматриваются две модели в соответствии с распределением фонда при страховом случае и его отсутствии: модель с распределением страховых резервов и модель с переменными ставками. Приводятся содержательные интерпретации соотношений между степенью несклонности агента к риску и другими параметрами моделей.

В четвертом разделе проводится теоретико-игровой анализ поведения анонимных (однородных) страхователей. У агента есть выбор – вступать или не вступать в фонд взаимного страхования. В этом разделе описывается структура равновесия Нэша и получены условия достижения того или иного равновесия Нэша в зависимости от распределения индивидуальных порогов агентов. Порогом агента считается количество агентов в обстановке данного агента, принявших решение о вступлении в фонд.

В пятом разделе проводится теоретико-игровой анализ неанонимных страхователей. Неанонимность заключается в том, что агенту при принятии решения о вступлении в фонд важны индивидуальные характеристики (вероятность страхового случая или потери при страховом случае) других агентов, принимающих участие во взаимном страховании. В разделе приводится условие, описывающее все равновесия Нэша в случае неанонимных страхователей.

Шестой раздел посвящен описанию результатов идентификации порогов агентов. В этом разделе рассматривается опрос, по результатам которого можно сделать вывод о возможности образования фонда взаимного страхования среди опрашиваемых корреспондентов и какова численность этого фонда. Ключевым фактором является порог, зависящий от отношения страхователя к риску.

2. Функции полезности и несклонность к риску

Неопределенность среды, в которой действует агент, вносит изменения в характер его поведения. А именно, неопределенность подвергает агента риску уменьшения его дохода. Этот риск агент оценивает в зависимости от своего отношения к риску. Принято делить агентов по их отношению к риску на склонных, несклонных и нейтральных к риску [4, 5, 7]. Характерной чертой несклонного к риску агента считается то, что он готов вместо ожидаемого большого дохода, который подвержен существенной дисперсии, получить меньший, но гарантированный доход. Например, несклонный к риску агент положит деньги на гарантированный депозит в банк под проценты, меньшие, чем ожидаемая прибыль, например, при игре на бирже. У склонного к риску агента поведение противоположно – он будет склонен получить большой и рискованный доход, а не малый и гарантированный. Нейтральный к риску агент не имеет предпочтений между рискованными активами и активами с малым риском. Опишем формально поведение несклонного к риску агента. Будем считать, что поведение агента характеризуется его функцией полезности f [7, 11]. Пусть ω – случайный доход агента. В зависимости от того, произошла или нет неблагоприятная ситуация (в страховании – страховой случай) для агента, он получит $\omega_{min} = h$ или $\omega_{max} = H$ – минимальный и максимальный доходы соответственно. Обозначим через p – вероятность получения минимального дохода h в результате страхового случая. Математическое ожидание дохода будет равно

$$E\omega = ph + (1-p)H.$$

Математическое ожидание функции полезности агента будет соответственно равно

$$Ef(\omega) = pf(h) + (1-p)f(H).$$

Каждый агент может выбрать $\omega_0 = H_0$ – эквивалентный случайному, но уже гарантированный доход (certainty equivalent), т.е. такой, что $Ef = f(H_0)$. У несклонного к риску агента гарантированный доход меньше математического ожидания случайного дохода: $H_0 < E\omega$. Для склонного к риску и нейтрального агентов выполнено $H_0 > E\omega$ и $H_0 = E\omega$, соответственно [8, 14]. Функция полезности несклонного к риску агента будет выглядеть так, как показано на рис. 1 – она должна быть возрастающей и вогнутой (в случае дифференцируемых функций полезности [14]: $f' > 0, f'' < 0$).

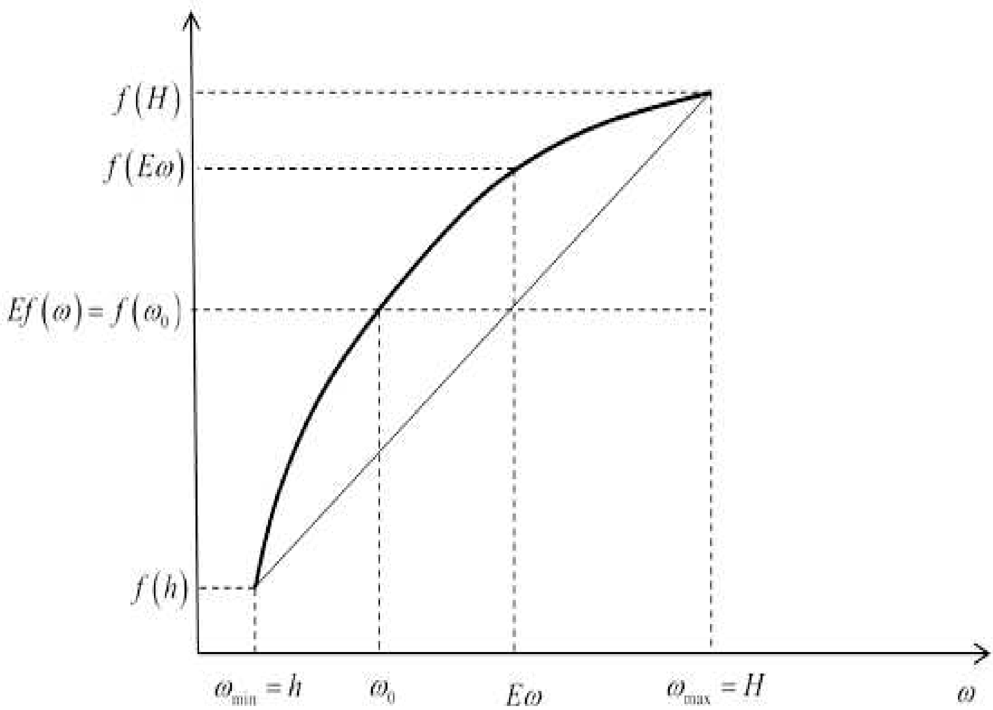

Рисунок 1. Вид функции полезности несклонного к риску агента

Для упрощения моделей принятия решений иногда вместо вогнутой функции полезности используют ее линейный «аналог», в котором вогнутость исходной функции характеризуется числовым параметром [3]. Введем следующие обозначения $Q = H - h$. Рассмотрим функцию $\hat{f}$, обладающую следующими свойствами:

$$E\hat{f} = p\left(H - \left(H - h\right)\left(1 + \xi\right)\right) + \left(1 - p\right)H = H - pQ\left(1 + \xi\right),$$

$$E\hat{f} = Ef.$$

Легко показать, что если f – вогнутая функция, то $\xi > 0$, то есть «степень вогнутости» (степень несклонности агента к риску) может характеризоваться параметром ξ.

3. Модель взаимного страхования

Следуя [3], рассмотрим множество $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ (которое в случае взаимного страхования можно условно считать страховщиком [6, 9]), состоящее из n агентов – страхователей [10, 12], имеющих в отсутствии страхования целевые функции (равные математическому ожиданию[1] их функций полезности)[2]

$$Ef_i = H_i - p_i Q_i (1 + \xi_i), i \in N, \tag{3.1}$$

где H_i – детерминированный доход i-го страхователя, p_i – вероятность наступления страхового случая у i-го страхователя (страховые случаи у различных страхователей будем считать независимыми событиями), Q_i – потери i-го страхователя при наступлении у него страхового случая, $\xi_i \geq 0$ – коэффициент, отражающий степень несклонности i-го страхователя к риску.

Модель с распределением страховых резервов. Целевые функции страхователей в присутствии страхования для этой модели имеют вид

$$EF_i = H_i - r_i + p_i(h_i - Q_i)(1 + \xi_i) + \Delta_i, i \in N, \tag{3.2}$$

где r_i – страховой взнос i-го страхователя, h_i – выплачиваемое ему при наступлении страхового случая возмещение, Δ_i – часть страховых резервов, «возвращаемая» i-му страхователю. Будем считать, что страховой фонд бесприбылен, т.е. математическое ожидание его прибыли равно нулю:

$$\sum_{i \in N} r_i - p_i h_i - \Delta_i - c = 0, \tag{3.3}$$

где c – затраты на организацию и поддержание деятельности фонда взаимного страхования. Введем следующие предположения относительно свойств механизма взаимного страхования:

---

[1] В настоящей работе мы оперируем ожидаемыми функциями полезности, не рассматривая вероятности разорения страховых фондов и т.д.

[2] Для простоты ограничимся описанием взаимодействия страхователей в течение одного промежутка времени, на протяжении которого однократно производится сбор взносов и компенсация ущербов. При этом будем считать, что остатки резервов (разность между собранными взносами и произведенными выплатами), если они положительны, распределяются в соответствии с некоторым механизмом между участниками системы взаимного страхования.

А.1. Страховой взнос составляет единую для всех страхователей долю $(0, 1)$ от страховых потерь:

$$r_i = Q_i,\ i \in N. \tag{3.4}$$

А.2. Страховое возмещение составляет единую для всех страхователей долю $(0, 1)$ от страховых потерь:

$$h_i = Q_i,\ i \in N. \tag{3.5}$$

А.3. Фонд взаимного страхования не получает прибыли, то есть страхователям возвращаются остатки страховых взносов за вычетом страховых возмещений, причем распределение этих остатков происходит пропорционально страховым взносам страхователей:

$$\Delta_i = \left[\left(\sum_{j \in N} r_j - p_i h_i\right) - c\right] \frac{r_i}{\sum\limits_{j \in N} r_j},\ i \in N. \tag{3.6}$$

А.4. Вероятности наступления страховых случаев у всех страхователей одинаковы: $p_i = p$, а также одинаковы потери от наступления страховых случаев у всех страхователей[3]: $Q_i = Q, i \in N$.

С учетом предположения А.4 и выражений (3.4), (3.5) выражение (3.6) примет вид

$$\Delta_i = \Delta = (\alpha - p\beta)Q - \frac{c}{n}, i \in N. \tag{3.7}$$

Подставляя (3.4), (3.5) и (3.7) в выражение (3.2), получим, что целевые функции страхователей имеют вид

$$EF_i = H_i - pQ[1 + (1 - \beta)\xi_i)] - \frac{c}{n},\ i \in N. \tag{3.8}$$

Участвовать в системе взаимного страхования для i-го страхователя выгодно, если его ожидаемая полезность при этом выше, чем

---

[3]Фактически, предполагается, что страхователи отличаются лишь своим отношением к риску.

при неучастии. Сравнивая выражения (3.1) и (3.8), получим, что участие в системе взаимного страхования выгодно для всех страхователей из множества N, если

$$\xi_i \geq \frac{c}{np\beta Q}. \tag{3.9}$$

Неравенство (3.9) показывает, что нейтральные к риску агенты ($\xi_i = 0$) при ненулевых затратах на содержание страхового фонда не будут участвовать во взаимном страховании. Участие в страховании не зависит от доли страхового взноса. Кроме того, участие во взаимном страховании целесообразно, если:

1. Число страхователей n достаточно велико.
2. Стоимость c содержания фонда не очень велика. Если содержание фонда бесплатно или оплачивается сторонней (благотворительной) организацией, то все страхователи будут участвовать.
3. Страховой случай достаточно вероятен.
4. Выплаты βQ ощутимы, т.е. доля выплат велика.

Ослабим условие А.4 и потребуем только, чтобы потери от наступления страховых случаев у всех страхователей были одинаковы: $Q_i = Q, i \in N$. Тогда участие в системе взаимного страхования выгодно для всего множества N страхователей, если

$$\xi_i \geq \frac{c}{np_i\beta Q} + \left(\frac{\sum\limits_{i\in N} p_i}{np_i} - 1 \right). \tag{3.10}$$

По сравнению с (3.9), в (3.10) появилось дополнительное слагаемое в скобках. Оно показывает, что если вероятность страхового случая i-го страхователя p_i больше средней вероятности $\frac{1}{n}\sum\limits_{i\in N} p_i$, то этот страхователь может принять участие в страховании, даже если он не принимал участия в случае (3.9). Таким образом, выбор участника будет зависеть, в том числе, от вероятностей наступления страховых случаев. Ослабим условие А.4 и потребуем только, чтобы вероятности наступления страховых случаев у всех страхователей были одинаковы: $p_i = p, i \in N$. Тогда участие в системе взаимного страхования выгодно для всего множества N страхователей, если

$$\xi_i \geq \frac{c}{p\beta \sum\limits_{i \in N} Q_i}, i \in N. \tag{3.11}$$

В отличие от (3.9), (3.11) показывает, что достаточно высокими должны быть не индивидуальные выплаты, а общая сумма выплат: $\beta \sum\limits_{i \in N} Q_i$. В остальном содержательные характеристики сходны с предыдущим случаем.

Модель с переменными ставками. Вместо того, чтобы распределять оставшиеся страховые резервы, можно подобрать переменные доли страховых взносов и возмещений в зависимости от числа страхователей n. Тогда суммы страховых взносов и возмещений (предположения А.2 и А.3) примут соответствующий вид:

$$r_i(n) = \alpha(n) Q_i,\ i \in N, \tag{3.12}$$

$$h_i(n) = \beta(n) Q_i,\ i \in N. \tag{3.13}$$

Так как фонд взаимного страхования не получает прибыли, то все взносы должны быть распределены между страхователями и, вместо условия А.3, запишем следующее условие бесприбыльности фонда:

$$\sum_{i \in N} r_i\,(n) = \sum_{i \in N} p_i h_i\,(n). \tag{3.14}$$

Подставляя (3.12) и (3.13) в (3.14), получим

$$\frac{\alpha\,(n)}{\beta\,(n)} = \gamma(n) = \frac{\sum\limits_{i \in N} p_i Q_i}{\sum\limits_{i \in N} Q_i}. \tag{3.15}$$

Показатель γ отношения ожидаемого ущерба (взвешенной суммы) к полному ущербу назовем *относительным риском страхового портфеля*. В таком определении учитывается наиболее распространенная интерпретация термина «риск», как ожидаемый ущерб.

Целевые функции страхователей в присутствии страхования для этой модели имеют вид

$$EF_i = H_i - r_i(n) + p_i(h_i(n) - Q_i)(1 + \xi_i),\ i \in N. \tag{3.16}$$

Сравнивая (3.1) и (3.16), получим, что участие в системе взаимного страхования выгодно в этой модели для всех страхователей, если

$$p_i h_i(n)(1+\xi_i) - r_i(n) \geq 0, i \in N, \tag{3.17}$$

или

$$p_i(1+\xi_i) \geq \frac{\sum\limits_{i\in N} p_i Q_i}{\sum\limits_{i\in N} Q_i}, i \in N. \tag{3.18}$$

Еще одной интерпретацией термина «риск» является вероятность наступления страхового случая. Так как p_i – объективная вероятность наступления страхового случая (объективный риск) у i-го страхователя, а i – коэффициент, отражающий степень несклонности i-го страхователя к риску, то левая часть условия (3.18) характеризует субъективный риск i-го страхователя. Очевидно, что у несклонных к риску страхователей субъективный риск выше объективного. Условие (3.18), таким образом, говорит о том, что для того, чтобы участие во взаимном страховании было выгодно всем страхователям, необходимо, чтобы для каждого из них субъективный риск был не меньше относительного риска $\gamma(n)$ страхового портфеля взаимного страхования. Преобразовав (3.18), получим следующее выражение:

$$\xi_i \geq \frac{\sum\limits_{i\in N} p_i Q_i}{p_i \sum\limits_{i\in N} Q_i} - 1, i \in N, \tag{3.19}$$

которое показывает, что если вероятности страховых случаев равны ($p_i = p, i \in N$), то все страхователи будут участвовать во взаимном страховании (правая часть (3.19) равна нулю) независимо от потерь в страховом случае. Таким образом, эта модель не описывает качественное поведение страхователей, имеющее место в предыдущем случае модели с распределением страховых резервов с одинаковыми рисками. Если равны потери от страховых случаев ($Q_i = Q, i \in N$), то условие участия примет следующий вид:

$$\xi_i \geq \frac{\sum\limits_{j\in N} p_j}{n p_i} - 1,\ i \in N. \tag{3.20}$$

Условие (3.20) показывает, что если вероятность страхового случая i-го страхователя p_i больше средней вероятности $\frac{1}{n}\sum\limits_{i\in N} p_i$, то этот страхователь примет участие в страховании, т.к. левая часть неравенства (3.20) отрицательна (см. также примечание к (3.10)). С увеличением числа страхователей относительный риск страхового портфеля $\gamma(n)$ может как уменьшаться, так и увеличиваться. Но если выполнено условие

$$\gamma(n) \geq p_{n+1}, \tag{3.21}$$

то $\gamma(n)$ является невозрастающей функцией, т.е. относительный риск страхового портфеля не возрастает с увеличением числа страхователей. Это означает, что число агентов, которым выгодно принять участие в страховании, не будет уменьшаться с увеличением числа агентов.

4. Теоретико-игровой анализ поведения анонимных страхователей

Полученные в предыдущем разделе условия (3.9), (3.10), (3.11) и (3.18) характеризуют ситуации, в которых каждому из n агентов выгодно участвовать в системе взаимного страхования при условии, что все остальные агенты также участвуют (в правой части этих выражений содержится общее число агентов). На самом деле, более корректно считать, что имеет место игровое взаимодействие агентов, в котором каждый из них выбирает одно из двух решений – участвовать ему в системе взаимного страхования или нет.

Рассмотрим сначала условия (3.9) и (3.10). Они описывают более простое поведение анонимных страхователей. Анонимность заключается в том, что агенту не важны индивидуальные характеристики (вероятность страхового случая или потери при страховом случае) других агентов, принимающих участие во взаимном страховании, а важно только их количество. Поведение неанонимных страхователей, описываемых условиями (3.11) и (3.18), рассмотрено в следующем разделе.

Опишем модель поведения множества $N = \{1, \ldots, n\}$ агентов в виде следующей игры в нормальной форме $G = (\{X_i\}_{i \in N}, \{u_i(\cdot)\}_{i \in N}, N)$, где множество допустимых стратегий агента i есть $X_i = \{0, 1\}$, а его целевая функция $u_i(\cdot)$ (или функция индивидуальной полезности) определяется ниже. Обозначим стратегию агента i через $x_i \in \{0, 1\}$, где выбор стратегии «1» означает, что агент участвует во взаимном страховании, а стратегии «0» – не участвует. Будем говорить, что при выборе страхования агент действует, иначе – бездействует. Ситуацию игры, т.е. вектор стратегий всех агентов, обозначим через $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$. Обстановку игры для агента i обозначим через следующий $n-1$-мерный вектор стратегий:

$$x_{-i} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in X_{-i}.$$

Из выражения (3.9) можно получить для каждого агента величину минимального числа других (анонимных) агентов, участвующих в системе взаимного страхования, при котором ему выгодно к ним присоединиться:

$$m_i\left(\xi_i\right) = \left[\frac{c}{\xi_i p \beta Q}\right] + 1, i \in N. \tag{4.1}$$

Здесь квадратные скобки обозначают целую часть числа. Пороги (4.1) убывают с увеличением степени несклонности к риску ξ_i агента i.

Таким образом, для агента при принятии решения имеет значение количество других агентов, намеревающихся участвовать во взаимном страховании. Если это количество не меньше порога m_i, то агенту выгодно принять участие в системе взаимного страхования. Подобный подход к моделированию принятия агентами решений получил название пороговых моделей [1, 2, 13]. Поведение агента i определяется его целевой функцией, значения которой зависят от ситуации игры. Пусть целевая функция имеет вид

$$u_i\left(x_i, x_{-i}\right) = \left(\sum_{j \neq i} x_j - m_i\right) x_i, i \in N. \tag{4.2}$$

Перейдем к исследованию равновесий в этой игре. Равновесием Нэша ([5]) в чистых стратегиях в игре G называют ситуацию x^N, если для всех $i \in N$ и $x_i \in X_i$ справедливо неравенство

$$u_i\left(x_i^N, x_{-i}^N\right) \geq u_i\left(x_i, x_{-i}^N\right). \tag{4.3}$$

Исследуем условия и структуру равновесий Нэша для игры G.

В [1] доказано, что для того чтобы ситуация x^* была равновесием Нэша в игре G, необходимо и достаточно, чтобы все агенты с порогами меньше суммарного действия $\Sigma(x^*) = \sum_{i \in N} x_i^*$ действовали, а остальные – бездействовали, т.е. были выполнены следующие условия:

$$\forall i : m_i < \Sigma(x^*) \to x_i^* = 1, \tag{4.4}$$

$$\forall i : m_i \geq \Sigma(x^*) \to x_i^* = 0. \tag{4.5}$$

Этот факт связывает структуру ситуации равновесия Нэша с распределением порогов агентов. Так, выбирать страхование будут только те агенты, пороги которых меньше общего действия в ситуации равновесия Нэша. Остальные будут бездействовать. Если расположить агентов в порядке возрастания их порогов (другими словами, по убыванию их степени несклонности к риску) вдоль оси абсцисс и откладывать значения их порогов вдоль оси ординат, то структура равновесия Нэша будет выглядеть так, как это условно показано на рис. 2, где высота прямоугольника соответствует значению порога соответствующего агента, а цвет означает действие (черный прямоугольник) или бездействие (белый) агента.

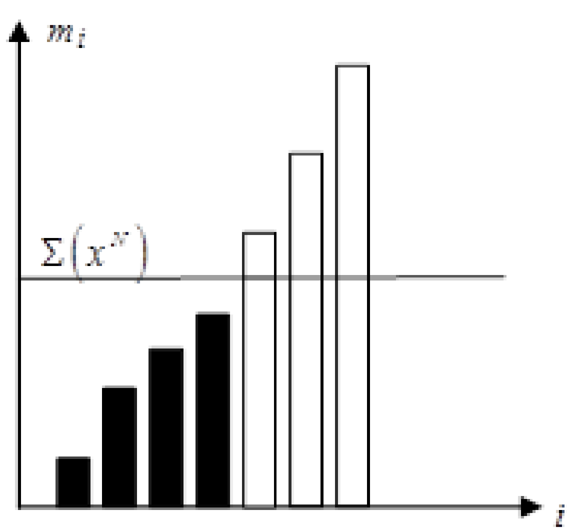

Рисунок 2. Структура равновесий Нэша

Будем называть базисной ситуацией $x(p)$, где p – натуральное число, не превышающее количества агентов n, следующую ситуацию игры:

$$\forall i: m_i < p \rightarrow x_i^{(p)} = 1, \tag{4.6}$$

$$\forall i: m_i \geq p \rightarrow x_i^{(p)} = 0. \tag{4.7}$$

Условия (4.4), (4.5) дают возможность определить все равновесия Нэша в игре G, как подмножество базисных ситуаций (4.6), (4.7). Для этого введем следующую функцию распределения порогов:

$$F\left(p\right) = \#\left\{ i \in N \right| m_i < p \right\}, \tag{4.8}$$

где p – натуральное число, а через # обозначена операция вычисления мощности множества. В [1] доказано, что для того, чтобы базисная ситуация x^* для p была равновесием Нэша в пороговой игре G, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:

$$F(p) = p. \tag{4.9}$$

Таким образом, равновесия Нэша можно определить, решая уравнение (4.9) относительно p и выбирая соответствующую базисную ситуацию.

5. Теоретико-игровой анализ поведения неанонимных страхователей

Условия (3.11) и (3.18) описывают поведение неанонимных страхователей. Неанонимность заключается в том, что потенциальному страхователю важны индивидуальные характеристики других страхователей, такие как, например, выплаты другим страхователям при наступлении страхового случая. Рассмотрим сначала случай (3.11). Перепишем его в следующем виде:

$$\xi_i p \beta \sum_{j \in N} Q_j \geq c, i \in N. \tag{5.1}$$

Напомним, что условие (5.1) характеризует условие выгодности участия во взаимном страховании всех n страхователей. Если существует такой агент, для которого не выполнено неравенство (5.1), то он не примет участия в страховании при любой ситуации участников.

Это следует из того, что сумма $\sum\limits_{j\in N} Q_j$ уменьшается при уменьшении количества участников. Отбросим (как не участвующих в игре) тех агентов, для которых неравенство (5.1) не выполняется. Таким образом, будем считать, что это неравенство выполняется для всех агентов.

Разумно предположить, что одному единственному агенту невыгодно участвовать единолично во «взаимном страховании», т.е. будем считать, что

$$\xi_i p\beta Q_i < c, i \in N. \tag{5.2}$$

Кроме ситуации, когда в страховании участвуют все агенты, могут существовать другие равновесные по Нэшу ситуации. Для того, чтобы страхователю i было выгодно участвовать в страховании, необходимо, чтобы выполнялось следующее неравенство, зависящее от выбора других страхователей:

$$\sum_{j\neq i} Q_j x_j + Q_i \geq \frac{c}{\xi_i p\beta}, \tag{5.3}$$

где $x_j \in \{0,1\}$ – выбор страхователя j относительно участия или отказ от участия в страховании. Страхователь выбирает участие во взаимном страховании, если достаточное для выполнения неравенства (5.3) число других страхователей участвует. Для описания этого поведения целесообразно выбрать следующую целевую функцию:

$$u_i^{(1)}(x_i, x_{-i}) = \left(\sum_{j\neq i} Q_j x_j + Q_i - \frac{c}{\xi_i p\beta}\right) x_i. \tag{5.4}$$

Действительно, если значение аргумента функции $u_i^{(1)}$ неотрицательно, то неравенство (5.3) выполнено для $x_i = 1$. Значит, страхователю выгодно участвовать в страховании, максимизируя свою целевую функцию (5.4).

Исследуем равновесие Нэша (4.3) в игре в нормальной форме $G^{(1)} = (\{X_i\}_{i\in N}, \{u_i^{(1)}(\cdot)\}_{i\in N}, N)$.

Утверждение 5.1. *Для того чтобы ситуация x^* была равновесием Нэша в игре $G^{(1)}$, необходимо и достаточно, чтобы она являлась решением следующей системы двойных линейных неравенств:*

$$\frac{c}{\xi_i p \beta} - Q_i \geq \sum_{j \neq i} Q_j x_j - x_i \sum_{j \in N} Q_j \geq \frac{c}{\xi_i p \beta} - Q_i - \sum_{j \in N} Q_j, i \in N. \quad (5.5)$$

Доказательство утверждения 5.1 приведено в Приложении.

Перейдем теперь к модели с переменными ставками. Все потенциальные страхователи будут участвовать в страховании, если выполнено (3.18). Для того, чтобы страхователю i было выгодно участвовать в страховании, необходимо, чтобы выполнялось следующее неравенство, зависящее от выбора других страхователей:

$$(\xi_i + 1)\, p_i \sum_{j \neq i} Q_j x_j + \xi_i p_i Q_i \geq \sum_{j \neq i} p_j Q_j x_j, i \in N. \quad (5.6)$$

Это поведение страхователя i можно описать стремлением к максимизации следующей целевой функции:

$$u_i^{(2)}(x_i, x_{-i}) = \left(\xi_i p_i Q_i - \sum_{j \neq i} (p_j - (\xi_i + 1)\, p_i)\, Q_j x_j \right) x_i. \quad (5.7)$$

Очевидно, что, решая систему неравенств (5.6) относительно x, можно найти все равновесия Нэша (4.3) в игре в нормальной форме $G^{(2)} = (\{X_i\}_{i \in N}, \{u_i^{(2)}(\cdot)\}_{i \in N}, N)$.

6. Идентификация порогов

Полученные результаты позволяют находить условия, при которых множество агентов могут образовывать общества взаимного страхования. Ключевым является понятие порога (4.1), зависящего от отношения страхователя к риску (параметра i). Следовательно, возникает задача идентификации порогов, для чего достаточно идентифицировать отношение страхователей к риску. При этом целесообразно воспользоваться многочисленными экспериментальными исследованиями отношения к риску, как отдельных индивидуумов, так и экономических субъектов.

Нами было проведено экспериментальное исследование (см. http://new.mtas.ru/form/25/), в котором одним из вопросов анкеты было: «Представьте, что Вы оказались перед выбором: потерять наверняка X\$ или потерять 2000\$ с вероятностью 25 %. При каком значении X$ Вам будет все равно, что выбрать?» Из ответов на этот вопрос (объем выборки составил 173 человека, из них 113 человек нейтральных или несклонных к риску, в том числе – 28 человек строго несклонных к риску) можно вычислить значения ξ, а по ним в соответствии с выражением (3.13), предполагая, например, $c = 100, p = 0,01, = 0,8, Q = 200$, найти распределение порогов. На рис. 3 изображена функция распределения порогов. Она пересекает биссектрису в двух точках – 3 и 26.

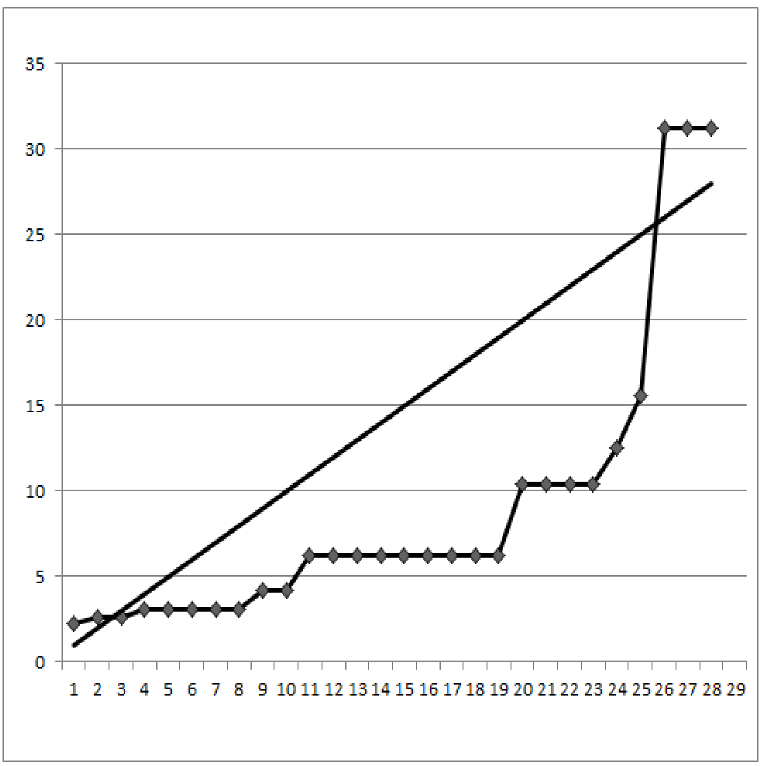

Рисунок 3. Функция распределения порогов

Точки пересечения биссектрисы и кривой распределения согласно (4.9) соответствуют равновесиям Нэша. То есть, в рассматриваемом условном примере агенты могли бы организовать общество взаимного страхования, состоящее из 3 или 26 членов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бреер В.В. *Теоретико-игровые модели конформного коллективного поведения* // Автоматика и телемеханика (в печати).

2. Бреер В.В. *Теоретико-игровая модель неанонимного порогового конформного поведения* // Управление большими системами. 2010. № 31. С. 162–176.

3. Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Кулик О.С., Новиков Д.А. *Механизмы страхования в социально-экономических системах.* М.: ИПУ РАН, 2002.

4. Бурков В.Н., Новиков Д.А. *Как управлять проектами.* М.: Синтег, 1997.

5. Губко М.В., Новиков Д.А. *Теория игр в управлении организационными системами.* М.: Синтег, 2002.

6. Ивашкин Е.И. *Взаимное страхование.* М.: Российская экономическая академия, 2000.

7. Нейман Д., Моргенштерн О. *Теория игр и экономическое поведение.* М.: Наука, 1970.

8. Новиков Д.А. *Механизмы страхования: перераспределение риска и манипулирование информацией* // Проблемы безопасности при чрезвычайных ситуациях. 1997. № 5. С. 44–55.

9. *Общества взаимного страхования* / Сост. К.Е. Турбина. М.: Анкил, 1994.

10. Сербиновский Б.Ю., Гарькуша В.Н. *Страховое дело.* Ростов-на-Дону: Феникс, 2000.

11. Фишберн П. *Теория полезности для принятия решений.* М.: Наука, 1978.

12. *Actuarial science* / Advances in the statistics science. 1987. V. 6. Reidel.

13. Granovetter M. *Threshold models of collective behavior* // AJS. 1978. V. 83, № 6. P. 1420–1443.

14. Pratt J. *Risk aversion in the small and in the large* // Econometrica. 1964. V. 52, № 1. P. 122–136.

7. Приложение

Доказательство утверждения 5.1. Достаточность. Предположим, что $x_i^* = 1$. Тогда, подставляя это значение в правую часть неравенства (5.5), получим

$$\sum_{j \neq i} Q_j x_j \geqslant \frac{c}{\xi_i p \beta} - Q_i. \tag{7.1}$$

Из неравенства (7.1) и определения целевой функции (5.4) следует, что изменение действия $x_i^* = 1$ на $x_i^* = 0$ не увеличит значения этой целевой функции.

Предположим теперь, что $x_i^* = 0$, тогда, исходя из левой части неравенства (5.5), получим

$$\frac{c}{\xi_i p \beta} - Q_i \geqslant \sum_{j \neq i} Q_j x_j. \tag{7.2}$$

Из неравенства (7.2) следует, что изменение действия $x_i^* = 0$ на $x_i^* = 1$ не увеличит целевую функцию (5.4).

Таким образом, изменение стратегии любого агента в состоянии x^* не увеличивает значения его целевой функции, т.е. выполнено условие равновесия Нэша (4.3).

Необходимость. Пусть x^* не удовлетворяет системе неравенств (5.5). Это означает, что существует $i_0 \in N$ такое, что справедливо хотя бы одно из следующих неравенств:

$$\sum_{j \neq i_0} Q_j x_j - x_{i_0} \sum_j Q_j < \frac{c}{\xi_{i_0} p \beta} - Q_{i_0} - \sum_j Q_j, \tag{7.3}$$

либо

$$\frac{c}{\xi_{i_0} p \beta} - Q_{i_0} < \sum_{j \neq i_0} Q_j x_j - x_{i_0} \sum_j Q_j. \tag{7.4}$$

Значение правой части неравенства (7.3) неположительно в силу (5.1), поэтому для того, чтобы левая часть была отрицательной, необходимо, чтобы $x^*_{i_0} = 1$. Тогда из неравенства (7.3) следует, что

$$\sum_{j \neq i_0} Q_j x_j < \frac{c}{\xi_{i_0} p \beta} - Q_{i_0}.$$

Из этого следует, что значение целевой функции (5.4) для агента i_0 отрицательно. Значит x^* в случае (7.3) не является равновесием Нэша.

Значение левой части неравенства (7.4) неотрицательно в силу (5.2), поэтому

$$x^*_{i_0} = 0.$$

Тогда из неравенства (7.4) следует, что

$$\frac{c}{\xi_{i_0} p \beta} - Q_{i_0} < \sum_{j \neq i_0} Q_j x_j.$$

Из этого следует, что значение

$$x^*_{i_0} = 0$$

не является наилучшим ответом агента на обстановку. Значит x^* в случае (7.4) не является равновесием Нэша.

Таким образом, из невыполнения системы неравенств (5.5) следует, что x^* не является равновесием Нэша. Необходимость доказана от противного. $\square$

THRESHOLD MODELS OF RECIPROCAL INSURANCE

Vladimir V. Breer, Institute of Control Sciences V.A. Trapeznikov Academy of Sciences, post-graduate (breer@live.ru).
Dmitrii A. Novikov, Institute of Control Sciences V.A. Trapeznikov Academy of Sciences, Dr.Sc., Corresponding Member of RAS (novikov@ipu.ru).

Abstract: Gaming models of reciprocal insurance is considered. In the gaming profile there is a choice of a player to take part or not to take part in reciprocal insurance funding. Behavior of a player depends upon her risk aversion. Through the scalar parameter of risk aversion partition function is defined. This partition function results in threshold behavior of the players. Anonymous and non-anonymous gambling models are considered. For both models the conditions of Nash equilibrium are found.

Keywords: insurance, gambling model, partition function, risk aversion, Nash equilibrium, threshold behavior.