Автоматика и телемеханика, 7, 1999

УДК 519.714.3

© 1999 г. Д. А. НОВИКОВ, д-р техн. наук
(Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва)

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ И АДЕКВАТНОСТЬ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ МОДЕЛЕЙ СТИМУЛИРОВАНИЯ В АКТИВНЫХ СИСТЕМАХ

Вводится понятие обобщенного решения задачи стимулирования как семейства решений, параметрически зависящих от множества активных систем, в котором они имеют максимальную гарантированную эффективность. Для детерминированной модели анализируется задача синтеза обобщенных решений и показывается, что построенные решения абсолютно устойчивы и обеспечивают максимальную область адекватности рассматриваемой модели.

1. Введение

Проблеме изучения устойчивости – анализу изменений решения при малых вариациях параметров задачи, модели и т.д. – традиционно уделяется значительное внимание, особенно на стыке математики с прикладными науками [1, 2]. Однако во многих случаях (в том числе, в теории активных систем [3, 4]) исследователи, осознавая важность этой проблематики и имея в своем распоряжении достаточно мощный инструментарий [1, 2, 5–7 и др.], ограничивались лишь нахождением оптимальных решений. Более того, зачастую не рассматривалась и проблема адекватности модели реальной моделируемой системе.

Настоящая работа посвящена изучению устойчивости решений задач стимулирования в детерминированных моделях активных систем и адекватности самих моделей. Изложение имеет следующую структуру. Во втором разделе приводятся некоторые используемые в дальнейшем известные результаты детерминированной теории активных систем по решению задачи синтеза оптимальной функции стимулирования. Третий раздел содержит определения понятий устойчивости и адекватности. В четвертом разделе проводится формальный анализ устойчивости приближенных решений детерминированных задач стимулирования, строятся области абсолютной устойчивости и адекватности обобщенных решений. Заключение содержит ряд выводов и обсуждение перспектив дальнейших исследований.

2. Базовая детерминированная задача стимулирования

Пусть активная система (АС) состоит из управляющего органа – центра и одного управляемого объекта – активного элемента (АЭ). Интересы участников соответственно выражены их целевыми функциями

(1) $H(y)$,

(2) $f(y) = h(y) - \chi(y)$,

где $y \in A$ – действие АЭ, $H(y)$ – функция дохода центра, $\chi(y) \in M$ – функция стимулирования (штрафов), $h(y)$ – функция дохода АЭ. Стратегией центра является назначение функции стимулирования из класса M с целью максимизации своей целевой функции $H(y)$ при условии, что АЭ выбирает при известной функции стимулирования действие из множества A, максимизирующее его собственную целевую функцию $f(y)$. Множество действий АЭ, доставляющих максимум его целевой функции при данной системе стимулирования, называется множеством реализуемых действий [3, 4]

$$P(\chi) = \mathrm{Arg}\max_{y\in A}\{h(y) - \chi(y)\}. \tag{3}$$

Эффективность стимулирования в рамках благожелательного отношения АЭ к центру (из множества действий, доставляющих максимум его целевой функции, АЭ выбирает действие, наиболее предпочтительное для центра), которое мы будем считать имеющим место в дальнейшем, определяется как

$$K(\chi) = \max_{y\in P(\chi)} \Phi(y). \tag{4}$$

Задача поиска допустимой (принадлежащей классу M) системы стимулирования, максимизирующей эффективность (4), называется задачей синтеза оптимальной функции стимулирования

$$K(\chi) \to \max_{\chi\in M}. \tag{5}$$

Введем следующие предположения:

A1. $A = [A^-, A^+] \subseteq \mathcal{R}^1$, $-\infty < A^- < A^+ < +\infty$;

A2. $h(y)$ – однопиковая функция [4] с точкой пика $r \in A$;

A3. $\chi \in M = \{\chi \,|\, \forall y \in A\ 0 \leqslant \chi(y) \leqslant C\}$;

A4. $H(y)$ – однопиковая функция с точкой пика $r' \geqslant r$.

Из детерминированной теории [3, 4] известно, что в рамках введенных предположений оптимальны, в частности, системы стимулирования C-типа

$$\chi_C(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} C, & y < x \\ 0, & y \geqslant x \end{array} \right. , \tag{6}$$

параметрически зависящие от плана

$$x \in P = \bigcup_{\chi\in M} P(\chi) = [y^-, y^+],$$

$$y^{+(-)} = \max(\min)\{y \in A \,|\, h(y) \geqslant h(r) - C\}.$$

Оптимальный план определяется как решение следующей задачи [3, 4]

$$x^* = \arg\max_{x\in P} H(x). \tag{7}$$

3. Определение устойчивости решений и адекватности моделей

В рамках описания (1)–(2) каждая конкретная АС определяется заданием функций дохода центра – $H(y)$, дохода АЭ – $h(y)$ и допустимыми множествами A и M. Обозначим через $\mathcal{P}$ – множество АС, удовлетворяющих предположениям А1–А4. Пусть $\widetilde{\rho} = \left\{\widetilde{H}, \widetilde{h}, \widetilde{A}, \widetilde{M}\right\} \in \mathcal{P}$ – некоторая детерминированная модель АС (значок "$\sim$" над параметром означает его принадлежность к модели). Эффективность системы стимулирования $K(\chi, \widetilde{\rho})$, определяемая (4), очевидно, зависит от рассматриваемой модели (мы будем считать, что множество возможных моделей АС совпадает с множеством реальных АС, т.е. модель и реальная система могут отличаться лишь значениями параметров (подробное качественное обсуждение обоснованности этого достаточно сильного предположения приведено в [8]).

В [6] предложено называть принципом оптимальности $\mathcal{R} : \Xi \to 2^M \setminus \{\varnothing\}$, где $\Xi \subset \mathcal{P}$, точечно-множественное отображение, ставящее в соответствие каждой модели $\rho \in \mathcal{P}$ подмножество множества M. Критерий оптимальности (4) порождает критериальный принцип ε-оптимальности

$$\mathcal{R}_\varepsilon(\rho) = \left\{ \chi \in M \mid K(\chi, \rho) \geqslant \sup_{t \in M} K(t, \rho) - \varepsilon \right\}. \tag{8}$$

Критериальный принцип оптимальности по определению, предложенному в [6], устойчив на модели $\widetilde{\rho} \in \mathcal{P}$, если функция

$$K(\rho) = \sup_{t \in M} K(t, \rho) \tag{9}$$

непрерывна на модели $\widetilde{\rho}$. Будем считать, что принцип оптимальности абсолютно устойчив, если существует решение, принадлежащее ему во всех точках некоторой непустой окрестности модели. Эту окрестность назовем областью абсолютной устойчивости соответствующего решения. В более общем случае принцип оптимальности устойчив, если малым (в некоторой псевдометрике на $\mathcal{P}$) изменениям модели соответствуют малые (в метрике Хаусдорфа) изменения множеств оптимальных решений. Такой подход, предложенный Д. А. Молодцовым [1, 6], в отличие от теории некорректных задач [7], использует вместо топологии на множестве решений само семейство приближенных решений, позволяя достаточно просто согласовать понятия устойчивости и приближенного решения.

К сожалению, оптимальные решения иерархических игр типа Γ_2, к которым относятся и детерминированные задачи стимулирования, неустойчивы (в частности, относительно “возмущений” целевой функции АЭ). В то же время, этот класс задач допускает регуляризацию, заключающуюся в искусственном введении неточности вычисления максимума целевой функции АЭ при определении множества реализуемых действий (3) [1, 5].

Не акцентируя внимания на том, что предположение о выборе именно АЭ “неоптимальных” стратегий представляется не слишком реалистичным (все-таки исследователь операций, как правило, стоит на позиции оперирующей стороны – центра), отметим следующее. Предположим, что удалось добиться устойчивости принципа оптимальности в смысле непрерывности (9). Содержательно это означает, что если реальная АС немного отличается от модели, то использование в каждой из них оптимальных систем стимулирования (в каждой – своей!) приведет к малому различию эффективностей стимулирования. Другими словами, использование “классического” понимания устойчивости (как “непрерывности” решений по параметрам модели) позволяет обоснованно говорить о нахождении приближенного решения по приближенным данным.

Обратим внимание на то, что модели активных систем рассматриваются с тем, чтобы выработать на основе их исследования некоторые рекомендации по управлению реальными системами. Если цель исследователя операций заключается в выработке “алгоритма” решения задачи стимулирования в рамках модели, то устойчивость (корректность задачи) действительно может быть обеспечена путем регуляризации. Однако этого оказывается недостаточно с точки зрения эффективности практического использования результатов исследования математических моделей.

Представим себе следующую ситуацию. Пусть исследователь операций решил детерминированную задачу стимулирования для некоторой модели АС, предполагая, что параметры модели достаточно точно соответствуют или в рамках данного описания максимально близки к параметрам некоторой реальной АС. Что произойдет, если решение, оптимальное в модели, будет использовано в реальной АС? Несмотря на то, что решение, оптимальное для реальной АС, может сколь угодно мало отличаться от решения, оптимального в модели, эффективности использования этих решений могут различаться достаточно сильно. Значит, возникает проблема адекватности модели: будет ли механизм управления, обладающий определенными свойствами в модели, обладать этими же свойствами в реальной АС, и насколько широк класс реальных систем, в которых данный механизм еще обладает этими свойствами?

Введем понятие адекватности модели. Если решение, обладающее некоторой эффективностью в модели, будет обладать этой же эффективностью и в реальной системе, то будем считать, что модель полностью адекватна. Таким образом, **критерием адекватности является эффективность управления**, а не решение задачи синтеза оптимального управления, как это имеет место при исследовании устойчивости. Будем считать, что модель $\widetilde{\rho} \in \mathcal{P}$ с принципом оптимальности $\mathcal{R}$ слабо адекватна реальной АС $\rho \in \mathcal{P}$, если $\exists \mathcal{X} \in \mathcal{R}(\widetilde{\rho}) : K(\mathcal{X}, \rho)$ непрерывна по ρ в малой окрестности $\widetilde{\rho}$.

Назовем областью адекватности модели $\widetilde{\rho} \in \mathcal{P}$ с принципом оптимальности $\mathcal{R}$ максимальное множество $\mathcal{X}(\widetilde{\rho}, \mathcal{R})$ АС $\rho \in \mathcal{P}$ с принципом оптимальности $\mathcal{R}$ таких, что $\mathcal{R}(\widetilde{\rho}) \cap \mathcal{R}(\rho) \neq \varnothing$ и $\mathcal{R}(\widetilde{\rho}) \cap \mathcal{R}(\rho) \in M$, т.е.

$$\mathcal{X}\left(\widetilde{\rho}, \mathcal{R}\right) = \left\{\rho \in \mathcal{P} \,|\, \exists \mathcal{X} \in M : \mathcal{X} \in \mathcal{R}(\widetilde{\rho}) \cap \mathcal{R}(\rho)\right\}. \tag{10}$$

Содержательно, при фиксированном критерии оптимальности модель адекватна такому множеству (10) реальных систем (включающему, естественно, саму модель), для которых существует общее управление, удовлетворяющее принципу оптимальности. Другими словами, устойчивость и адекватность связаны следующим образом: область адекватности модели совпадает с максимальной из областей абсолютной устойчивости решений, удовлетворяющих принципу оптимальности в модели.

В [8] показано, что в общем случае при использовании оптимальных (удовлетворяю-
щих (5)) решений модель стимулирования в АС полностью адекватна только самой себе – любое, сколь угодно малое изменение параметров модели может привести к разрывному изменению эффективности этих решений. Таким образом, оптимальные решения детерминированных задач стимулирования неустойчивы и, следовательно, не абсолютно устойчивы, а области адекватности соответствующих моделей чрезвычайно узки – в общем случае, если $\mathcal{R}$ определяется (4) или, что то же самое, (8) при $\varepsilon = 0$, то $\mathcal{X}\big(\widetilde{\rho}, \mathcal{R}\big) \equiv \widetilde{\rho}$.

Возможным путем выхода из создавшейся ситуации является ослабление требований к эффективности управления. Следует отметить, что указанная выше неустойчивость и неадекватность имели место для оптимальных (максимизирующих эффективность) решений задач стимулирования. Использование ε-оптимальных решений с $\varepsilon > 0$ отчасти позволяет решить проблемы устойчивости и адекватности за счет расширения как множества “оптимальных” решений, так и областей адекватности (обратим внимание на то, что в названии статьи фигурирует не традиционное словосочетание “… оптимальных решений задач стимулирования а именно “… решений задач стимулирования"). В частности, в [8] доказан следующий достаточно тривиальный факт: $\forall \widetilde{\rho} \in \mathcal{P}$, $\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 : 0 \leqslant \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2$ выполнено $\mathcal{X}\big(\widetilde{\rho}, \mathcal{R}_{\varepsilon_1}\big) \subseteq \mathcal{X}\big(\widetilde{\rho}, \mathcal{R}_{\varepsilon_2}\big)$, т.е. с ослаблением принципа оптимальности область адекватности модели не сужается.

Идея использования ε-оптимальных решений для повышения устойчивости и адекватности конструктивно реализуется в следующем разделе для детерминированных задач стимулирования.

4. Обобщенные решения детерминированных задач стимулирования

Предположим, что реальная АС $\rho = \{H, h, A, M\} \in \mathcal{P}$ может отличаться от модели $\widetilde{\rho} = \left\{\widetilde{H}, \widetilde{h}, \widetilde{A}, \widetilde{M}\right\} \in \mathcal{P}$, т.е. допустим, что:

целевая функция центра $H(y)$ может, оставаясь однопиковой, отличаться от функции $\widetilde{H}(y)$ не более, чем на $\gamma \geqslant 0$:

$$\rho \in \mathcal{P}_\gamma(\widetilde{\rho}) = \left\{\rho \in \mathcal{P} \,|\, \forall y \in A \ \widetilde{H}(y) - \gamma \leqslant H(y) \leqslant \widetilde{H}(y) + \gamma\right\}; \tag{11}$$

целевая функция АЭ $h(y)$ может, оставаясь однопиковой, отличаться от функции $\widetilde{h}(y)$ не более чем на $\delta \geqslant 0$:

$$\rho \in \mathcal{P}_\delta(\widetilde{\rho}) = \left\{\rho \in \mathcal{P} \,|\, \forall y \in A \ \widetilde{h}(y) - \delta \leqslant h(y) \leqslant \widetilde{h}(y) + \delta\right\}; \tag{12}$$

ограничение механизма стимулирования C может отличаться от $\widetilde{C}$ не более чем на $\beta \geqslant 0$:

$$\rho \in \mathcal{P}_\beta(\widetilde{\rho}) = \left\{\rho \in \mathcal{P} \,|\, \widetilde{C} - \beta \leqslant C \leqslant \widetilde{C} + \beta\right\}; \tag{13}$$

правая граница множества A может быть меньше, чем $\widetilde{A}^+$, не более чем на $\xi \geqslant 0$:

$$\rho \in \mathcal{P}_\xi(\widetilde{\rho}) = \left\{\rho \in \mathcal{P} \,|\, \widetilde{A}^+ - \xi \leqslant A^+ \leqslant \widetilde{A}^+\right\}. \tag{14}$$

Набор чисел $\gamma \geqslant 0$, $\delta \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\xi \geqslant 0$ задает "окрестность" модели АС – множество АС, отличие соответствующих параметров которых от параметров модели не более заданных величин

$$\rho \in \mathcal{P}_{\gamma,\delta,\beta,\xi}(\widetilde{\rho}) = \mathcal{P}_\gamma(\widetilde{\rho}) \cup \mathcal{P}_\delta(\widetilde{\rho}) \cup \mathcal{P}_\beta(\widetilde{\rho}) \cup \mathcal{P}_\xi(\widetilde{\rho}). \tag{15}$$

Обобщенным решением задачи стимулирования в модели $\widetilde{\rho} \in \mathcal{P}$ назовем $\chi = \chi(\widetilde{\rho}, \gamma, \delta, \beta, \xi) \in \mathcal{R}_{\varepsilon(\bullet)}(\widetilde{\rho})$, где

$$\varepsilon = \varepsilon(\gamma, \delta, \beta, \xi) = \min\left\{\alpha \geqslant 0 \,|\, \forall \rho \in \mathcal{P}_{\gamma,\delta,\beta,\xi}(\widetilde{\rho}) \ \chi\left\{\widetilde{\rho}, \gamma, \delta, \beta, \xi\right) \in \mathcal{R}_\alpha(\rho)\right\}. \tag{16}$$

То есть обобщенное решение – это такое ε-оптимальное в модели решение, которое остается гарантированно ε-оптимальным в множестве реальных АС $\mathcal{P}_{\gamma,\delta,\beta,\xi}(\widetilde{\rho})$, причем ε зависит от параметров γ, δ, β и ξ, определяющих это множество. Другими словами, обобщенное решение есть совокупность решений, которые гарантированно ε-оптимальны в некоторой окрестности (11)–(15) модели АС, причем ε, определяемое (16), зависит от размера окрестности. Если окрестность совпадает с самой моделью, то элемент обобщенного решения является оптимальным ($\varepsilon = 0$) решением задачи стимулирования для модели. Если, наоборот, множество реальных АС $\mathcal{P}_{\gamma,\delta,\beta,\xi}$ $(\widetilde{\rho})$, для которого ищется система стимулирования максимальной гарантированной эффективности, слишком "велико то стимулирование может не иметь смысла (можно использовать функцию стимулирования, тождественно равную нулю): при любом допустимом стимулировании всегда найдется АС, в которой активный элемент выберет действие, которое он выбрал бы и при полном отсутствии стимулирования. В этом случае справедлива следующая тривиальная оценка гарантированной эффективности:

$$\forall \widetilde{\rho} \in \mathcal{P}, \quad \forall \gamma, \delta, \beta, \xi \geqslant 0 \ \forall \rho \in \mathcal{P}_{\gamma,\delta,\beta,\xi}(\widetilde{\rho}) \forall \chi \in M \tag{17}$$

$$K(\chi, \rho) \geqslant \widetilde{H}\left(\max\left\{\widetilde{A}^{+} - \xi, \widetilde{r}\right\}\right) - \gamma.$$

Перейдем к построению явного вида обобщенных решений детерминированных задач стимулирования.

Обозначим:

$$x^*(\delta, \beta) = \max\left\{y \in A \mid \widetilde{h}(y) \geqslant \widetilde{h}(\widetilde{r}) + 2\delta + \beta - \widetilde{C}\right\}, \tag{18}$$

$$\varepsilon_1(\gamma, \delta, \beta) = \widetilde{H}\left(\widetilde{r}\,'\right) - \widetilde{H}(x^*(\delta, \beta)) + \gamma, \tag{19}$$

$$\varepsilon_2(\gamma, \delta, \beta) = \widetilde{H}\left(\widetilde{y}^{+}\right) - \widetilde{H}(x^*(\delta, \beta)) + \gamma, \tag{20}$$

$$\varepsilon_3(\gamma, \delta, \beta, \xi) = \widetilde{H}\left(\widetilde{A}^{+} - \xi\right) - \widetilde{H}(x^*(\delta, \beta)) + \gamma. \tag{21}$$

Обобщенное решение детерминированной задачи стимулирования дается следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения* A1–A4 *и заданы модель АС* $\widetilde{\rho} \in \mathcal{P}$ *и класс реальных АС* $\mathcal{P}_{\gamma,\delta,\beta,\xi}(\widetilde{\rho})$. *Тогда:*

а) если $2\delta + \beta > \widetilde{C}$ или $\xi > \widetilde{A}^{+} - \widetilde{r}$, то стимулирование бессмысленно (см. (17)),

б) если $2\delta + \beta \leqslant \widetilde{C}$ и $\xi \leqslant \widetilde{A}^{+} - \widetilde{r}$, то $\forall \rho \in \mathcal{P}_{\gamma,\delta,\beta,\xi}(\widetilde{\rho})$ выполнено:

1. Если $\widetilde{r}\,' \leqslant \widetilde{y}^{+}$ и $\widetilde{r}\,' \leqslant \widetilde{A}^{+} - \xi$, то:

   1.1) если $2\delta + \beta \leqslant \widetilde{h}(\widetilde{r}\,') - \widetilde{h}(\widetilde{r}) + \widetilde{C}$, то $\chi_c(r', y) \in \mathcal{R}_\varepsilon(\rho)$, где $\varepsilon \geqslant \gamma$;

   1.2) если $2\delta + \beta \geqslant \widetilde{h}(\widetilde{r}\,') - \widetilde{h}(\widetilde{r}) + \widetilde{C}$, то $\chi_c(x^*, y) \in \mathcal{R}_\varepsilon(\rho)$, где $\varepsilon \geqslant \varepsilon_1(\gamma, \delta, \beta)$.

2. Если $\widetilde{y}^{+} \leqslant \widetilde{r}\,'$ и $\widetilde{y}^{+} \leqslant \widetilde{A}^{+} - \xi$, то $\chi_c(x^*, y) \in \mathcal{R}_\varepsilon(\rho)$, где $\varepsilon \geqslant \varepsilon_2(\gamma, \delta, \beta)$.

3. Если $\widetilde{A}^{+} - \xi \leqslant \widetilde{r}\,'$ и $\widetilde{A}^{+} - \xi \leqslant \widetilde{y}^{+}$, то:

   3.1) если $2\delta + \beta \leqslant \widetilde{h}\left(\widetilde{A}^{+} - \xi\right) - \widetilde{h}(\widetilde{r}) + \widetilde{C}$, то $\chi_c\left(\widetilde{A}^{+} - \xi, y\right) \in \mathcal{R}_\varepsilon(\rho)$, где $\varepsilon \geqslant \gamma$,

   3.2) если $2\delta + \beta \geqslant \widetilde{h}\left(\widetilde{A}^{+} - \xi\right) - \widetilde{h}(\widetilde{r}) + \widetilde{C}$, то $\chi_c(x^*, y) \in \mathcal{R}_\varepsilon(\rho)$, где $\varepsilon \geqslant \varepsilon_3(\gamma, \delta, \beta, \xi)$.

Доказательство данной теоремы аналогично доказательству теоремы 3.18 [8] и поэтому не приводится.

5. Заключение

Теорема 1 дает (в рамках предположений A1–A4) одновременно решение проблем абсолютной устойчивости решений и адекватности детерминированных моделей АС: в ней определяется обобщенное решение – зависимость между семейством АС из окрестности модели и решениями, имеющими максимальную гарантированную эффективность и абсолютную устойчивость в этой окрестности.

Отметим, что обобщенное решение может рассматриваться как параметрическое решение задачи синтеза оптимальной функции стимулирования в АС с интервальной смешанной неопределенностью [4]. При предельном переходе (стремлении к нулю величин γ, δ, β и ξ) обобщенное решение, определяемое в теореме 1, стремится к решению "невозмущенной" задачи (ср. (17), (18) и (7)), а потери в эффективности (19)–(21) также стремятся к нулю. Более того, по аналогии с тем, как это проделано в [8], можно доказать, что критериальные принципы ε-оптимальности, построенные в теореме 1, регуляризуют (в смысле [1, 6]) принцип оптимальности $\mathcal{R}_0$.

Преимущества обобщенного решения заключаются в следующем. Во-первых, при их использовании учитывается возможная неадекватность модели, и исследователь операций имеет возможность предложить к внедрению семейство решений, максимальная гарантированная эффективность которых параметрически зависит от множества потенциальных реальных ситуаций (естественно, чем шире это множество, тем ниже гарантированная эффективность, т.е. платой за адекватность является снижение эффективности управления: конкретные оценки – (19)–(21)). Во-вторых, предложенный подход позволяет решать обратную задачу – нахождение для фиксированного решения и заданной эффективности управления множества АС, в которых это решение будет гарантировать эту эффективность. И, наконец, в-третьих, обобщенные решения абсолютно устойчивы – в теореме 1 для окрестности модели конструируется единственное решение, гарантированно "оптимальное" в ней, т.е. решение, остающееся "оптимальным" при соответствующих возмущениях модели.

В качестве перспективных направлений дальнейших исследований следует выделить целесообразность изучения проблем адекватности моделей и устойчивости решений задач стимулирования в условиях неопределенности, а также других механизмов управления активными системами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Молодцов Д. А.* Устойчивость принципов оптимальности. М.: Наука, 1987.
2. *Орлов А. И.* Устойчивость в социально-экономических моделях. М.: Наука, 1986.
3. *Бурков В. Н., Новиков Д. А.* Введение в теорию активных систем. М.: ИПУ РАН, 1996.
4. *Новиков Д. А.* Стимулирование в социально-экономических системах (базовые математические модели). М.: ИПУ РАН, 1998.
5. *Гермейер Ю. Б.* Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.
6. *Молодцов Д. А.* Устойчивость принципов оптимальности // Современное состояние теории исследования операций. М.: Наука, 1979. С. 236–262.
7. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
8. *Новиков Д. А.* Обобщенные решения задач стимулирования в активных системах. М.: ИПУ РАН, 1998.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Н. А. Бобылевым.

Поступила в редакцию 16.11.98