УДК 65.012.122

ОПТИМАЛЬНОСТЬ ПРИНЦИПА ОТКРЫТОГО УПРАВЛЕНИЯ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ПРОЦЕДУРЫ ПЛАНИРОВАНИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

БУРКОВ В. Н., ЕНАЛЕЕВ А. К., КАЛЕНЧУК В. Ф.

(Москва)

На основе условия оптимальности принципа открытого управления в активных системах, сформулированного в [1], предложен способ вычисления оптимальной процедуры планирования и исследуются ее свойства.

1. Введение

В [1] было показано, что в активных системах оптимальной на множестве всевозможных процедур планирования является процедура открытого управления (ОУ). Однако приведенные там теоремы не дают конструктивных методов ее отыскания. В данной работе предлагается алгоритм построения оптимальной процедуры ОУ, кроме того, определяются некоторые свойства этой процедуры и зависимость ее эффективности от степени информированности центра.

Рассмотрим активную систему, состоящую из центра и только одного активного элемента. Модель функционирования такой системы подробно описана во многих работах, например в [1, 2], поэтому ее описание опускаем. Введем лишь некоторые обозначения, которые соответствуют обозначениям в [1] и потребуются нам в дальнейшем: y — вектор состояния элемента и системы; $Y=Y(r)$ — множество допустимых значений y, где r — вектор параметров, известный точно лишь элементу; A — компактное множество значений вектора параметров r, известное центру, $A\subset\mathbb{R}^m$; s — вектор оценок параметров r, сообщаемый элементом центру; $\pi(s)$ — процедура планирования, $\pi(s)\in P$ при всех $s\in A$, где P — компактное множество допустимых планов, $P\subset\mathbb{R}^l$; $f(\pi, y, r)$ — целевая функция элемента; $\Phi(\pi, y, r)$ — целевая функция центра, $\Phi(\pi, y, r)\geqslant 0$ и ограничена сверху; $\varphi(\pi(s), r)=f(\pi(s), \hat{y}, r)$, где $\hat{y}\in P(\pi(s), r)=\operatorname{Arg}\max\limits_{y\in Y(r)} f(\pi(s), y, r)$; $\Psi(\pi(s), r)=\inf\Phi(\pi(s), y, r)$ на $P(\pi(s), r)$; R — множество сообщений s активного элемента, максимизирующих функцию предпочтения $\varphi(\pi(s), r)$; $Q(\pi, r)=[\inf\limits_{s\in R}\Psi(\pi(s), r)]/\Psi_{\text{в}}(r)$ — значение показателя эффективности процедуры $\pi=\pi(\cdot)$, которое реализуется для заданного значения параметра r, где $\Psi_{\text{в}}(r)$ — заданная «весовая» функция, $\Psi_{\text{в}}(r)>0$ при всех $r\in A$; $K=K(\pi, A)=\inf\{Q(\pi, r)\,|\,r\in A\}$ — показатель эффективности процедуры π (гарантированное значение показателя $Q(\pi, r)$ на множестве неопределенных параметров A)[1].

Будем считать, что все операции max и min, встречающиеся в работе, определены.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу синтеза оптимальной процедуры планирования на множестве G процедур $\pi(\cdot)$, заданных на множестве A и принимающих значения из множества P, для которых определен максимум функции предпочтения $\varphi(\pi(s), r)$ по $s\in A$ при всех $r\in A$.

[1] Далее будем предполагать, что $\Psi_{\text{в}}(\cdot)$ подобрана так, что $Q(\pi, r)\leqslant 1$ при всех $r\in A$.

Оптимальной будем называть процедуру планирования $\pi^*(s)$, такую, что

$$(1)\qquad K(\pi^*(\cdot), A) \geqslant \sup_{\pi \in G} K(\pi, A) - \delta,$$

где δ — достаточно малое положительное число, которое выбирается, исходя из требований к точности решения задачи.

В [1] доказано, что на множестве G существует оптимальная процедура планирования $\pi^*(s)$, которая является процедурой ОУ, т. е. удовлетворяет условию

$$(2)\qquad \varphi(\pi^*(s), s) = \max_{x \in X^*} \varphi(x, s),$$

где X^* — некоторое фиксированное компактное множество планов, $X^* \subset P$.

Оказывается [1], что если процедура планирования удовлетворяет (2), то сообщение достоверной информации $s=r$ является для элемента доминантной стратегией. В случае сообщения достоверной информации показатель эффективности $Q(\pi, r)$ выражается более простой формулой $Q(\pi, r) = \Psi(\pi(r), r)/\Psi_в(r)$ и

$$(3)\qquad K = K(\pi, A) = \inf_{r \in A} [\Psi(\pi(r), r)/\Psi_в(r)].$$

Таким образом, задача (1) сводится к определению оптимальной процедуры ОУ, т. е. к определению соответствующего ей множества X^*, такого, что выполняются условия (1) и (2), где $K(\pi, A)$ имеет вид (3).

3. Алгоритм вычисления оптимальной процедуры планирования

Идея алгоритма заключается в следующем: множество X^*, которому соответствует оптимальная процедура $\pi^*(\cdot)$, удовлетворяющая условию (2), строится путем последовательного исключения из множества P окрестностей точек, в некотором смысле «невыгодных» для центра.

При описании алгоритма будем считать, что задачу определения процедуры планирования $\pi^*(s)$, удовлетворяющей условию совершенного согласования (2) при заданном компактном множестве X^*, мы решать умеем.

Далее будем предполагать, что функции $\Psi(\pi, s)$, $\Psi_в(s)$ непрерывны.

При описании алгоритма используются следующие обозначения: $\tilde{K} = K(\pi(\cdot), A) + \delta/4$; $\tilde{A}(\pi)$ — подмножество допустимых параметров r, для которых $Q(\pi, r) \leqslant \tilde{K}$, где $\pi = \pi(\cdot)$ — некоторая заданная процедура планирования. Определим также величину $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$, соответствующую используемой в выражении (1) величине δ, следующим образом:

$$\forall s \in A, \forall \pi, x \in P : \|\pi - x\| \leqslant \varepsilon(\delta) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |\Psi(\pi, s) - \Psi(x, s)| \leqslant \frac{\delta}{4} \Psi_m,$$

где $\Psi_m = \min\{\Psi_в(r) \mid r \in A\}$. Величина $\varepsilon(\delta)$ существует в силу равномерной непрерывности функции $\Psi(\pi, s)$ на P. Последнее следует из непрерывности $\Psi(\pi, s)$ и компактности множеств P и A.

Перейдем теперь к описанию алгоритма. Алгоритм состоит из предварительного этапа и последовательности итераций с номерами $j=1, 2, \ldots$

Предварительный этап заключается в следующем. Вычисляется процедура планирования $\pi_0(s)$, удовлетворяющая условию совершенного согласования (2) при $X^* = P$. Затем определяются величины $\tilde{K} = K(\pi_0(\cdot), A) + \delta/4$, $K_1 = \tilde{K} + \delta/4$ и множества $\tilde{A}(\pi_0) = \{r \mid Q(\pi_0, r) \leqslant \tilde{K}, r \in A\}$, $X_1 = P$.

Предположив, что выполнена $(j-1)$-я итерация, опишем j-ю итерацию.

Итерация начинается с проверки условия $K_j - \tilde{K} \leqslant \delta/4$. Если $K_j - \tilde{K} > \delta/4$, то из множества X_j исключаются точки, принадлежащие множеству $D(\pi_j, \varepsilon) = \{x \mid x \in d(\pi_j(r), \varepsilon), r \in \tilde{A}(\pi_j)\}$, где $d(\pi_j(r), \varepsilon)$ — открытый шар радиуса $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ с центром в точке $\pi_j(r)$, т. е. производится операция:

$$(4)\qquad X_j = X_j \setminus D(\pi_j, \varepsilon).$$

Если при этом окажется $X_j = \varnothing$, то выполнение алгоритма заканчивается, если же $X_j \neq \varnothing$, то определяется новая процедура планирования $\pi_j(\cdot)$, удовлетворяющая (2) при $X^* = X_j$. Для полученной процедуры $\pi_j(\cdot)$ вычисляется величина $\tilde{K} = K(\pi_j(\cdot), A) + \delta/4$ и определяется множество $\tilde{A}(\pi_j)$.

После этого снова переходим на начало j-й итерации, т. е. на проверку условия $K_j - \bar{K} \leqslant \delta/4$.

Если неравенство $K_j - \bar{K} \leqslant \delta/4$ справедливо, то принимаем $\pi^*(\cdot) = \pi_j(\cdot)$, $X_{j+1} = X_j$, $K_{j+1} = K_j + \delta/4$ и приступаем к выполнению следующей, $(j+1)$-й итерации.

Исследуем условия, когда описанный алгоритм дает решение задачи (1).

Введем в рассмотрение величину $\nu(\delta) > 0$ следующим образом: $\forall s, r \in A$, $\forall x, \pi \in P$, если $\|s - r\| < \nu(\delta)$ и $\|x - \pi\| \leqslant \varepsilon(\delta)$, то

$$|\Psi(x, s) - \Psi(\pi, r)| < \frac{\delta}{2} \Psi_m, \quad |\Psi_{\text{в}}(s) - \Psi_{\text{в}}(r)| < \frac{\delta}{4} \Psi_m.$$

Величина $\nu(\delta)$ существует в силу непрерывности функций $\Psi(x, s)$ и $\Psi_{\text{в}}(s)$ и компактности множеств P, A.

Будем говорить, что выполнено условие «регулярности» задачи, если на любой j-й итерации имеет место следующее: $\forall X \subset P$, такого, что $\exists \tilde{r} \in \tilde{A}(\pi_j)$: $X \cap d(\pi_j(\tilde{r}), \varepsilon(\delta)) \neq \varnothing \Rightarrow \exists s \in A$, $\|s - \tilde{r}\| < \nu(\delta)$, $\|\pi_X(s) - \pi_j(\tilde{r})\| \leqslant \varepsilon(\delta)$, где $\pi_X(\cdot)$ — процедура планирования, удовлетворяющая условию совершенного согласования (2) при $X^* = X$.

Теорема 1. Если соблюдается условие «регулярности», то описанный алгоритм сходится за конечное число итераций к процедуре ОУ $\pi^*(\cdot)$, которая является оптимальной на множестве G в смысле (1).

Доказательство теоремы приводится в приложении. Там же описан пример вычисления оптимальной процедуры планирования в задаче, для которой условие «регулярности» выполняется.

Замечание. Выполнение условия регулярности может зависеть от выбранной величины δ. Нетрудно показать, что если условие «регулярности» выполнено для некоторого значения δ, то оно справедливо и для всех $\delta' < \delta$. Таким образом, во многих случаях уменьшением величины δ, но тем самым увеличением числа шагов алгоритма можно добиться выполнения условий «регулярности». Так, например, если множества P и A состоят из конечного числа точек (дискретный случай), то выбор величины δ, которой соответствуют величины $\varepsilon(\delta)$ и $\nu(\delta)$ со значениями, меньшими, чем расстояния между ближайшими точками в множествах P и A, обеспечивает выполнение условия «регулярности». Такой (дискретный) случай, когда функции $\varphi(\pi, s)$ и $\Psi(\pi, s)$ задаются матрицами, был рассмотрен в [3], где предложен похожий алгоритм.

4. Свойства оптимальной процедуры планирования

Исследуем свойства процедуры $\pi^*(s)$ как функции вектора сообщений, а также зависимость этой процедуры и ее эффективности от информированности центра, определяемой множеством A.

Введем следующее предположение.

Пусть для любого $s \in A$, любого единичного вектора $e \in \mathbb{R}^l$ и любых чисел $t_1 > 0$, $t_2 > 0$, $t_1 < t_2$, таких, что $\pi_0(s) + et_1 \in P$, $\pi_0(s) + et_2 \in P$, имеет место

(5) $$\varphi(\pi_0(s) + et_1, s) > \varphi(\pi_0(s) + et_2, s).$$

Из этого предположения, в частности, следует, что при любом $s \in A$ функция $\varphi(\pi, s)$ достигает на P максимума в единственной точке $\pi_0(s)$.

В качестве примера функций $\varphi(\pi, s)$, удовлетворяющих (5), можно привести строго вогнутые функции, если множество P выпукло.

Теорема 2 (о двух режимах ОУ). Если функция предпочтения $\varphi(\pi, s)$ удовлетворяет предположению (5), то оптимальная процедура ОУ имеет следующий вид:

$$\pi^*(s) = \begin{cases} \pi_0(s), & \text{если } s \in A_0, \\ \pi_{\text{г}}(s), & \text{если } s \in A_{\text{г}}, \end{cases}$$

где $\pi_{\text{г}}(s)$ удовлетворяет условию $\varphi(\pi_{\text{г}}(s), s) = \max\limits_{x \in \Gamma(X^*)} \varphi(x, s)$; $\Gamma(X^*)$ — граница множества X^*, которому соответствует, согласно (2), процедура $\pi^*(s)$; $A_0 = \{s \mid \pi_0(s) \in X^*, s \in A\}$, $A_{\text{г}} = A \setminus A_0$.

Доказательство теоремы 2 приводится в приложении.

Из теорем 1 и 2 вытекает

Следствие. Пусть $P \subset \mathbb{R}^1$, тогда оптимальная процедура планирования имеет вид

$$\pi^*(s) = \begin{cases} \pi_0(s), & \text{если } s \in A_0, \\ C_j, & \text{если } s \in A_j,\ j = 1, 2, \ldots, N, \end{cases}$$

где C_j являются константами, а $A_0, A_1, \ldots, A_N$ — конечная система непересекающихся множеств, такая, что $A = \bigcup_{j=0}^{N} A_j$, N — некоторое натуральное число.

Приведенный ниже пример иллюстрирует это следствие.

Исследуем теперь зависимость показателя эффективности $K(\pi^*, A)$ оптимальной процедуры планирования от информированности центра.

Рассмотрим два множества A_1 и A_2. Будем говорить, что центр более информирован в случае $r \in A_1$, чем в случае $r \in A_2$, если $A_1 \subset A_2$.

Теорема 3. С увеличением степени информированности центра значения показателя $K(\pi^*, A)$ для оптимальной процедуры планирования $\pi^* = \pi^*(\cdot)$ не убывают.

Доказательство теоремы приведено в приложении.

В активных системах без обмена информацией, когда центр при определении наиболее эффективного плана $\pi^{\text{опп}}$ ориентируется на получение максимального гарантированного результата, оптимальная процедура планирования определяется решением задачи

$$K(\pi^{\text{опп}}, A) = \max_{\pi \in P} \min_{r \in A} \frac{\Psi(\pi, r)}{\Psi_{\text{в}}(r)}. \tag{6}$$

Процедуру (6) называют [2] оптимальным планированием с прогнозом (ОПП).

Из (6) видно, что $K(\pi^{\text{опп}}, A)$ не возрастает и может убывать с расширением множества A, т. е. уменьшением степени информированности.

Другой процедурой планирования, известной в теории активных систем, является процедура открытого управления $\pi^0(s)$, удовлетворяющая (2) при $X^* = P$. Заметим, что эффективность процедуры $\pi^0(\cdot)$ совпадает с эффективностью рыночного механизма [2], причем значение показателя эффективности $Q(\pi^0, r)$ не зависит от множества A, характеризующего информированность центра о параметре r. Легко заметить, что величины $\underline{Q}(A) = \max[Q(\pi^{\text{опп}}, r), Q(\pi^0, r)]$ и $\underline{K}(A) = \max[K(\pi^{\text{опп}}, A), K(\pi^0, A)]$ являются оценками снизу соответствующих показателей эффективности $Q(\pi^*, r)$ и $K(\pi^*, A)$ оптимальной процедуры планирования $\pi^*(\cdot)$ при фиксированном множестве A.

Проиллюстрируем качественно зависимость показателя эффективности $K(\pi^*, A)$ от степени информированности центра.

Пусть A_μ, $0 \leqslant \mu \leqslant \infty$ — некоторая система вложенных множеств, таких, что $A_{\mu_1} \subset A_{\mu_2}$, если $\mu_1 < \mu_2$, A_0 состоит из единственной точки $s = r$ (случай полной информированности центра), а A_∞ — все пространство допустимых сообщений s. Иначе говоря, параметр μ характеризует степень информированности центра.

Теперь теорема 3 может быть иллюстрирована зависимостями, изображенными на рис. 1.

Кривые *1—4* описывают возможные варианты зависимости $K(\pi^*, A)$. Кривая BCD изображает оценку $\underline{K}(A)$.

Отметим, что если в примере, приведенном ниже, величину Δ взять равной 0, то получим $Q(\pi^*, r) = \underline{Q}(A)$ и $K(\pi^*, A) = \underline{K}(A)$, т. е. оценки $\underline{Q}(A)$ и $\underline{K}(A)$ достижимы.

5. Пример

Рассмотрим активную систему, для которой $\varphi(\pi, r)$, $\Psi(\pi, r)$ имеют вид

$$\varphi(\pi, r) = \lambda\pi - \frac{1}{2r}\pi^2, \quad \Psi(\pi, r) = c\pi - \frac{1}{2(r + \Delta)}\pi^2$$

и, кроме того, $A=\{s \mid s \in [w_1, w_2], w_1>0\}$, $\lambda>c>0$, $P=\{\pi \mid \pi \in [0, \lambda w_2]\}$ и $\Psi_в(r)={}^1/_2 c^2(r+\Delta)$.

Содержательно данная модель описывает задачу производства продукции, где $\lambda\pi$ и $c\pi$ — доходы элемента и центра, а $\frac{1}{2r}\pi^2$ и $\frac{1}{2(r+\Delta)}\pi^2$ — их затраты на производство.

Определим оптимальную процедуру планирования. Несложно показать, что множество пар (s, π), для которых показатель эффективности

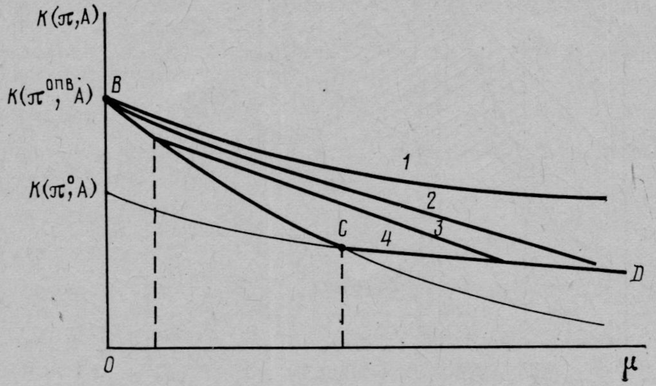

Рис. 1

не меньше K, определяется следующими условиями (рис. 2): $s\in A$, $c(s+ +\Delta)(1-\sqrt{1-K}) \leqslant \pi \leqslant c(s+\Delta)(1+\sqrt{1-K})$ и $\pi_0(s)=\lambda s$.

Максимальный коэффициент эффективности K^* определяется из условия равенства ординат точек A и B, т. е.

$$c(w_2+\Delta)(1-\sqrt{1-K^*})=c(s_0+\Delta)(1+\sqrt{1-K^*}), \tag{7}$$

$$c(s_0+\Delta)(1-\sqrt{1-K^*})=\lambda s_0. \tag{8}$$

Это следует из того факта, что если мы в соответствии с алгоритмом начнем увеличивать K, то ордината точки B (B — точка пересечения прямых $s=w_2$ и $\pi=c(s+\Delta)(1-\sqrt{1-K})$) увеличивается и перестает принадлежать множеству X^*.

Считается, что параметры задачи таковы, что выполняются следующие неравенства:

$$c(w_1+\Delta)(1-\sqrt{1-K^*}) \leqslant \lambda w_1 \leqslant c(w_1+\Delta)(1+\sqrt{1-K^*}).$$

Обозначим $y=\sqrt{1-K^*}$. Решая систему (7), (8), находим

$$s_0=\frac{c\Delta(1+y_1)}{\lambda-c(1+y_1)}, \tag{9}$$

где

$$y_1=\frac{\lambda}{2c}\left(1+\frac{\Delta}{w_2+\Delta}\right)-\left[\frac{\lambda^2}{4c^2}\left(1+\frac{\Delta}{w_2+\Delta}\right)^2+ +1-\frac{\lambda}{c}\frac{w_2}{w_2+\Delta}\right]^{1/2}. \tag{10}$$

Второе решение y_2 системы уравнений (7), (8) не удовлетворяет условиям

$$s_0>0, \quad y\leqslant 1.$$

Поскольку $y_1=\sqrt{1-K^*}$, то

$$K^*=1-\left\{\frac{\lambda}{2c}\left(1+\frac{\Delta}{w_2+\Delta}\right)- -\left[\frac{\lambda^2}{4c^2}\left(1+\frac{\Delta}{w_2+\Delta}\right)^2+1-\frac{\lambda}{c}\frac{w_2}{w_2+\Delta}\right]^{1/2}\right\}^2.$$

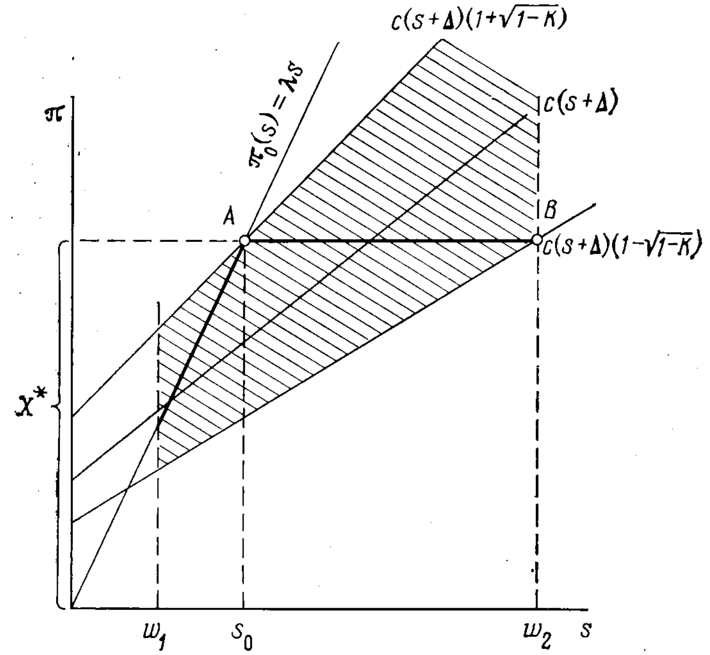

Рис. 2

Из рис. 2 видно, что оптимальная процедура планирования определяется следующим образом:

$$\pi^*(s)=\begin{cases}\lambda s, & s\in[w_1,s_0],\\ \lambda s_0, & s\in[s_0,w_2],\end{cases}$$

а соответствующее ей множество

$$X^*=\{\pi|\pi\in[0,\lambda s_0]\},$$

где s_0 определяется выражениями (9), (10).

6. Заключение

Предложенный алгоритм вычисления оптимальной процедуры планирования позволяет получить решение сложной максимальной задачи путем решения последовательности задач математического программирования. К сожалению, не удалось получить достаточно простых и универсальных рецептов проверки выполнения условия «регулярности» задач, для которых пригоден описанный алгоритм. Однако часто его справедливость бывает очевидной из специфики задач.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Покажем, что алгоритм позволяет определить оптимальную процедуру планирования $\pi^*(\cdot)$ за конечное число итераций.

Как следует из описания алгоритма, на j-й итерации выполняется либо неравенство $K_j-\bar{K}\leqslant\delta/4$, либо $K_j-\bar{K}>\delta/4$. В первом случае определяется значение $K_{j+1}=K_j+\delta/4$ и осуществляется переход к следующей итерации. Таким образом, на некоторой итерации обязательно реализуется второй случай. Поскольку величина $\bar{K}$ ограничена сверху числом $M=\max\limits_{r\in A}\max\limits_{\pi\in P}[\Psi(\pi,r)/\Psi_{\text{в}}(r)]$, то количество итераций, для которых выполняется неравенство $K_j-\bar{K}\leqslant\delta/4$, ограничено величиной $4\dfrac{M-K_0}{\delta}$.

Если на j-й итерации реализуется случай $K_j-\bar{K}>\delta/4$, то из замкнутого множества X_j исключается открытое множество $D(\pi_j,\varepsilon)$, т. е. выполняется действие, описываемое выражением (4). Поскольку исходное множество планов P компактно, то при выполнении всех итераций на множестве исключаемых из P окрестностей $D(\pi',\varepsilon)$ по теореме о конечном покрытии существует конечная последовательность окрестностей, покрывающая P. Отсюда следует, что выполнение алгоритма заканчивается ситуацией $X_J=\phi$ на итерации с некоторым конечным номером J.

Покажем теперь, что полученная в результате выполнения алгоритма процедура планирования $\pi^*(\cdot)$ является оптимальной в смысле (1).

Предположим противное, т. е. существует процедура планирования $x(\cdot)$, такая, что

(П.1) $\qquad K(x(\cdot),\ A)>K(\pi^*(\cdot),\ A)+\delta.$

Введем в рассмотрение множество $B=\bigcup\limits_{s\in A} x(s)$. По теореме 3 в [1] для $x(\cdot)$ найдется процедура планирования $x^{\text{оу}}(\cdot)$, удовлетворяющая условию совершенного согласования (2) при $X^*=B$, имеющая эффективность $K=\inf\limits_{r\in A}[\Psi(x^{\text{оу}}(r),\ r)/\Psi_{\text{в}}(r)]$, равную эффективности процедуры планирования $x(\cdot)$.

Поскольку на последней, J-й, итерации алгоритма $X_J=\phi$, а исходное множество допустимых планов P включает множество B, то существует итерация с номером j, такая, что $B\subset X_j$, но $B\setminus X_{j+1}\neq\phi$. Так как $X_{j+1}=X_j\setminus D(\pi_j,\ \varepsilon)$, справедливо $B\setminus X_{j+1}=B\setminus D$. Следовательно, найдется значение $\bar r\in A$, такое, что $B\cap d(\pi_j(\bar r),\ \varepsilon(\delta))\neq\phi$. Но тогда из условия «регулярности» имеет место:

$$\exists\bar s\in A,\ \|\bar s-\bar r\|<\nu(\delta),\ \ \|x^{\text{оу}}(\bar s)-\pi_j(\bar r)\|\leqslant\varepsilon(\delta).$$

Оценим величину $\Delta=|K-K_j|$, где K и K_j – показатели эффективности процедур $x(\cdot)$ и $\pi_j(\cdot)$ соответственно. Итак,

$$\Delta\leqslant\left|\frac{\Psi(x^{\text{оу}}(\bar s),\bar s)}{\Psi_{\text{в}}(\bar s)}-\frac{\Psi(\pi_j(\bar r),\bar r)}{\Psi_{\text{в}}(\bar r)}\right|+\frac{\delta}{4}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|\Psi(\pi_j(\bar r),\bar r)-\Psi(x^{\text{оу}}(\bar s),\bar s)|\Psi_{\text{в}}(\bar s)+\Psi(x^{\text{оу}}(\bar s),\bar s)|\Psi_{\text{в}}(\bar s)-\Psi_{\text{в}}(\bar r)|}{\Psi_{\text{в}}(\bar r)\Psi_{\text{в}}(\bar s)}+$$

$$+\frac{\delta}{4}\leqslant\frac{1}{2}\delta\frac{\Psi_m}{\Psi_{\text{в}}(\bar r)}+\frac{1}{4}\delta\frac{\Psi(x^{\text{оу}}(\bar s),\bar s)}{\Psi_{\text{в}}(\bar s)}\frac{\Psi_m}{\Psi_{\text{в}}(\bar r)}+\frac{\delta}{4}<\delta.$$

Но это неравенство противоречит предположению (П.1). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим процедуру ОУ $\pi^*(\cdot)$ из множества G и соответствующее ей множество $X^*\supset\bigcup\limits_{s\in A}\pi^*(s)$. Согласно (2) имеем $\varphi(\pi^*(r),\ r)=\max\limits_{x\in X^*}\varphi(x,\ r)$. Поскольку $X^*\subset P$, то для любых $r\in A_0$, таких, что $\pi_0(r)\in X^*$, имеет место $\pi^*(\cdot)=\pi_0(\cdot)$. Пусть теперь $r\in A_{\text{г}}=A\setminus A_0$. В этом случае $\pi_0(r)\in X^*$. Если X^* не имеет внутренних точек, т. е. совпадает со своей границей, то теорема очевидна. Пусть X^* имеет внутренние точки. Рассмотрим произвольную внутреннюю точку x^* из X^* и соединим ее отрезком $\{x|x=\lambda x^*+(1-\lambda)\pi_0(r),\ 0\leqslant\lambda\leqslant1\}$ с точкой $\pi_0(r)$. Поскольку x^* – внутренняя, а $\pi_0(r)$ – внешняя точка по отношению к множеству X^*, то существует граничная точка $x^{\text{г}}=\lambda^{\text{г}}x^*+(1-\lambda^{\text{г}})\pi_0(r)$ множества X^*, принадлежащая данному отрезку, причем $0<\lambda^{\text{г}}<1$. Отсюда и из предположения (5) следует, что $\varphi(x^{\text{г}},\ r)=\varphi(\pi_0(r)+\lambda^{\text{г}}(x^*-\pi_0(r)),\ r)>\varphi(\pi_0(r)+(x^*-\pi_0(r)),\ r)=\varphi(x^*,\ r)$. Таким образом, при $r\in A^{\text{г}}$ максимум функции $\varphi(x,\ r)$ по x достигается на $\Gamma(X^*)$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Если $A_1\subset A_2$ и при этом $\pi_2(\cdot)$ – некоторая процедура ОУ при $r\in A_2$, то $\pi_2(\cdot)$ является процедурой ОУ и при $r\in A_1$. Это следует из того, что условие (2), справедливое для всех $s\in A_2$, справедливо и при всех $s\in A_1\subset A_2$. Таким образом, множество всех процедур ОУ, т. е. процедур, удовлетворяющих условию (2), не расширяется с уменьшением степени информированности. Сравним теперь показатели эффективности $K(\pi_1^*,\ A_1)$ и $K(\pi_2^*,\ A_2)$. Очевидно, $K(\pi_1^*,\ A_1)=\inf\{Q(\pi_1^*,r)|r\in A_1\}\geqslant\inf\{Q(\pi_2^*,\ r)|r\in A_2\}=K(\pi_2^*,\ A_2)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бурков В. Н., Еналеев А. К.* Оптимальность принципа открытого управления. Необходимые и достаточные условия достоверности информации в активных системах.– АиТ, 1985, № 3, с. 73–80.
2. *Бурков В. Н., Кондратьев В. В.* Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981.
3. *Метев Б. С.* Игровые модели экспертизы.– Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1977, т. 17, № 4, с. 932–947.

Поступила в редакцию
26.III.1985

OPTIMALITY OF THE ABOVE-BOARD CONTROL. COMPUTATION OF THE OPTIMAL PLANNING PROCEDURE AND ITS PROPERTIES

BURKOV V. N., YENALEEV A. K., KALENCHUK V. F.

With optimal above-board control in active systems [1] optimal planning procedure is computed and its properties studied.