УДК 62-505.5

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА МЕХАНИЗМОВ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ДВУХУРОВНЕВЫХ АКТИВНЫХ СИСТЕМ

II. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРАВИЛЬНЫХ МЕХАНИЗМОВ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ В СЛУЧАЕ ПОЛНОЙ ИНФОРМИРОВАННОСТИ ЦЕНТРА

БУРКОВ В. Н., ЕНАЛЕЕВ А. К., КОНДРАТЬЕВ В. В., ЦВЕТКОВ А. В.

(Москва)

Получены необходимые и достаточные условия оптимальности правильных механизмов функционирования для случая, когда варьируемой компонентой в задаче синтеза является не только процедура планирования состояний активных элементов, но и их система стимулирования. Приводятся конструктивные достаточные условия оптимальности для систем стимулирования, обеспечивающих выполнение плана.

1. В [1] была описана модель функционирования двухуровневой активной системы, поставлена задача оптимального синтеза механизмов функционирования, обеспечивающих максимальную эффективность функционирования системы в предположении о полной информированности центра. В качестве критерия эффективности механизма принималась, что характерно для современных теоретико-игровых исследований иерархических систем, гарантированная оценка значения целевой функции системы Ф, достигаемого на множестве рациональных выборов активных элементов нижнего уровня. Решение задачи оптимального синтеза в [1] искалось среди правильных механизмов. Главной особенностью правильных механизмов является то, что используемые при их применении процедуры планирования и системы стимулирования обеспечивают выбор активными элементами состояний, точно совпадающих с назначаемыми центром планами. В [1] были приведены необходимые и достаточные условия оптимальности правильных механизмов на множестве механизмов G_π с фиксированными целевой функцией системы Ф и системой стимулирования элементов f. Были сформулированы конструктивные и легко проверяемые достаточные условия оптимальности правильных механизмов. Эти условия были представлены в виде ограничений на системы стимулирования элементов.

В данной работе продолжено исследование задачи оптимального синтеза правильных механизмов функционирования. Рассмотренная в [1] задача определения условий оптимальности правильных механизмов расширяется здесь на случай, когда варьируемой компонентой в задаче синтеза является не только процедура планирования состояний активных элементов, но и их система стимулирования. В плане рассмотрения этой задачи приводятся необходимые и достаточные условия оптимальности правильных механизмов на множестве механизмов $G_{f,\pi}$ с фиксированной целевой функцией системы Ф. Получены конструктивные достаточные условия оптимальности для систем стимулирования, обеспечивающих выполнение плана.

2. Задача оптимального синтеза правильных механизмов функционирования на заданном множестве механизмов $G_{f,\pi}$ имеет вид [1]:

$$K(\hat{\Sigma})=\max_{\Sigma\in G_{f,\pi}} K(\Sigma),\qquad \hat{\Sigma}\in G_{f,\pi}\cap \tilde{G}_\Sigma. \tag{1}$$

Здесь и ниже используются обозначения, принятые в [1]. Всюду в данной работе предполагается, что max и min существуют. Предполагается также, что множество допустимых планов X зависит от системы стимулирования f и любой план из этого множества может быть сформирован на основе соответствующей процедуры планирования π. Поэтому выражение $\Sigma=\langle\Phi, f, \pi\rangle\in G_{f,\pi}$ в задаче (1) может быть записано в виде $f\in\bar{G}_f$, $x\in X(f)$, где $\bar{G}_f=\{f|\langle\Phi, f, \pi\rangle\in G_{f,\pi}\}$, а для обозначения механизма $\Sigma=\langle\Phi,f, \pi\rangle$ допустима эквивалентная запись $\langle\Phi, f, x\rangle$.

Обозначим через $A(\Sigma)$ множество эффективных планов при механизме Σ. Это множество всех таких планов, которые в случае их выполнения не менее эффективны, чем план x при механизме функционирования $\Sigma=\langle\Phi, f, \pi\rangle$:

$$A(\Sigma)=\{z\in Y\,|\,\Phi(z,z)\geqslant \min_{y\in R(f,x)} \Phi(x,y)\},$$

где $R(f, x)$ — множество решений игры элементов при гипотезе локально-оптимального, благожелательного поведения [1, 2]. Тогда множество $A(G_{f,\pi})=\bigcap\limits_{\Sigma\in G_{f,\pi}} A(\Sigma)$ представляет собой множество всех не менее эффективных планов по отношению к множеству механизмов $G_{f,\pi}$. Будем также использовать множества $Y(f, x)=\{z|z=x$, если $x\in R(f, x)$, иначе $z\in Y\}$ и $S(f)=\{y\in Y|f_i(y_i, y_i)\geqslant f_i(y_i, z_i),\ z\in Y,\ i\in I\}$, где последнее обозначает множество совершенно согласованных планов при системе стимулирования f.

Рассмотрим теперь условия разрешимости задачи (1).

Теорема. Задача (1) имеет решение тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих эквивалентных условий.

1°. $\exists\hat{f}\in\bar{G}_f : A(G_{f,\pi})\cap S(\hat{f})\cap X(\hat{f})\neq\phi$;

2°. $\exists\hat{f}\in\bar{G}_f,\ \hat{x}\in A(G_{f,\pi})\cap X(\hat{f}) : \forall y\in Y,\ i\in I$:

$$\hat{f}_i(\hat{x}_i, \hat{x}_i)\geqslant\hat{f}_i(\hat{x}_i, y_i); \tag{2}$$

3°. $\exists\hat{f}\in\bar{G}_f,\ \hat{x}\in X(\hat{f})\cap Y : \forall f\in\bar{G}_f,\ x\in X(f) : \exists z\in R(f, x) : \forall y\in Y,\ i\in I$ выполняется неравенство (2) и неравенство

$$\Phi(\hat{x}, \hat{x})-\Phi(x, z)\geqslant 0; \tag{3}$$

4°. $\exists\hat{f}\in\bar{G}_f,\ \hat{x}\in X(\hat{f})\cap Y : \forall f\in\bar{G}_f,\ x\in X(f) : \exists z\in Y(f, x) : \forall y,\ y'\in Y,\ i\in I$ выполняется неравенство (3) и неравенство

$$\hat{f}_i(\hat{x}_i, \hat{x}_i)-\hat{f}_i(\hat{x}_i, y_i)\geqslant f_i(x_i, y_i')-f_i(x_i, z_i);$$

5°. $\exists\hat{f}\in\bar{G}_f,\ \hat{x}\in X(\hat{f})\cap Y : \forall f\in\bar{G}_f,\ x\in X(f) : \exists z\in Y(f, x) : \forall y\in Y,\ \alpha, \beta\geqslant 0,\ i\in I$ выполняется неравенство (3) и неравенство

$$\alpha[\hat{f}_i(\hat{x}_i, \hat{x}_i)-\hat{f}_i(\hat{x}_i, y_i)]\geqslant\beta[f_i(x_i, y_i)-f_i(x_i, z_i)].$$

Доказательство теоремы приведено в приложении.

Обсудим результаты теоремы. Условие 1° представляет собой теоретико-множественную форму записи задачи (1). Это условие означает, что решение задачи (1) существует тогда и только тогда, когда существует допустимый, совершенно согласованный, реализуемый план, не менее эффективный, чем другие планы. Разделение свойств совершенной согласованности, допустимости и эффективности в условии 1° существенно облегчает решение задачи (1). В общем случае при использовании принципов согласованного планирования решение соответствующей задачи оптимального синтеза целесообразно начинать с построения условия, аналогичного условию 1°.

Рассмотрим подробнее свойство не меньшей эффективности.

Лемма 1. Для того чтобы $A(G_{f,\pi})\neq\phi$,

а) необходимо и достаточно, чтобы $\exists\hat{x}\in Y : \forall f\in\bar{G}_f,\ x\in X(f) : \exists z\in R(f, x)$, такое, что выполняется неравенство (3);

б) достаточно, чтобы центр нес потери из-за несовпадения реализуемого состояния y и плана x: $\Phi(y, y)\geqslant\Phi(x, y)$ для $x\in\bigcup\limits_{f\in\bar{G}_f} X(f)$, $y\in\bigcup\limits_{f\in\bar{G}_f} R(f,x)$ (либо на всем множестве Y).

Доказательство леммы приведено в приложении.

Условие б) существенно использовалось при выводе достаточных условий оптимальности правильных механизмов на множестве G_π [1, 2].

Множество $A(\Sigma)$ характеризует заинтересованность центра в применении правильных механизмов при механизме Σ. Очевидно, если $A(G_{f,\pi})=\phi$, центр не заинтересован в применении правильных механизмов.

Изучению свойств множества совершенно согласованных планов $S(f)$ посвящено значительное число работ. Необходимую библиографию и основные результаты можно найти в [2]. Сформулируем один из результатов.

Лемма 2. Пусть элементы штрафуются за невыполнение плана:

$$\forall x,\ y\in Y,\ i\in I:\ f_i(y_i,\ y_i)\geqslant f_i(x_i,\ y_i), \tag{4}$$

тогда $S(f)\neq\phi$.

Доказательство леммы приведено в приложении.

Условия 2°—5° теоремы представляют собой варианты записи условия 1°, в которых частично (условия 2° и 3°) или полностью (условия 4° и 5°) выписаны неравенства, определяющие множества в условии 1°. Такая форма записи в большей степени пригодна для получения конструктивных достаточных условий и решений задачи (1) в явном виде.

3. Рассмотрим некоторые решения задачи (1). Вид решений очевидно зависит от свойств механизмов функционирования из множества $G_{f,\pi}$, т. е., в конечном счете, от свойств целевой функции центра, системы стимулирования элементов и модели ограничений системы [2]. Определим некоторые наиболее распространенные множества механизмов.

Множество механизмов, для которых выполняется условие б) леммы 1, обозначим через $G_\Sigma{}^1$. Множества, при определении которых учитывается условие (4), обозначим через $G^2_{f,\pi}=\{\langle\Phi,\ f,\ x\rangle\in G_{f,\pi}|R(f,\ x)\cap X(\hat f)\neq\phi,$ $\hat f\in\overline{G}_f$ и условие (4)$\}$ и $G^3_{f,\pi}=\{\langle\Phi,\ f,\ x\rangle\in G_{f,\pi}|\,Y\subseteq X(f)$ и условие (4)$\}$. Кроме того, обозначим $G^4_{f,\pi}=\{\langle\Phi,\ f,\ x\rangle\in G_{f,\pi}|\,\exists\hat f\in\overline{G}_f:\forall z\in X(f)\cap Y,\ y\in Y,$ $i\in I:\hat f_i(z_i,\ z_i)-\hat f_i(z_i,\ y_i)\geqslant f_i(x_i,\ z_i)-f_i(x_i,\ y_i)\}$.

Будем также применять обозначения $\overline{G}_f{}^1=\{f|\langle\Phi,\ f,\ x\rangle\in G_{f,\pi}\cap G_\Sigma{}^1\}$, $\overline{G}_f{}^j=\{f|\langle\Phi,f,x\rangle\in G^j_{f,\pi}\}$ для $j=2,3,4$ и $\overline{G}_f{}^{1s}=\overline{G}_f{}^1\cap\overline{G}_f{}^s$, $\overline{G}_f^{1s4}=\overline{G}_f{}^{1s}\cap\overline{G}_f{}^4$, $s=2,3$.

Решения задачи (1) на введенных выше множествах механизмов сформулируем в виде следствия теоремы.

Следствие. Для выполнения условий 1°—5° достаточно, чтобы имело место одно из следующих условий.

1¹. $\forall\hat f\in\overline{G}_f{}^1,\ \hat x\in X(\hat f)\cap Y,\ y\in Y,\ i\in I$:

$$\hat f_i(\hat x_i,\ \hat x_i)-\hat f_i(\hat x_i,\ y_i)\geqslant 0;$$

2¹. $\exists\hat f\in\overline{G}_f{}^{12}:\forall\hat x,\ y\in Y\subseteq X(\hat f),\ i\in I$:

$$\hat f_i(\hat x_i,\ \hat x_i)-\hat f_i(\hat x_i,\ y_i)\geqslant\eta_i(\hat x-\hat x(y_i),\ \Phi(\hat x,\ \hat x)-\Phi(\hat x,\ \hat x(y_i))),$$

где $\eta_i\in\{\varkappa|\varkappa(0,\ 0)=0$ и $\varkappa(x-y,\ q)\geqslant0$ для $q\geqslant0,\ x,\ y\in Y\}$, $\hat x(y_i)=(\hat x_1,\ldots$ $\ldots,y_i,\ldots,\hat x_n)$;

3¹. $\exists\hat f\in\overline{G}_f{}^{12}:\forall f\in\overline{G}_f{}^{12},\ \hat x\in X(\hat f)\cap Y,\ x\in X(f),\ y\in Y,\ i\in I$:

$$\hat f_i(\hat x_i,\ \hat x_i)-\hat f_i(\hat x_i,\ y_i)\geqslant f_i(x_i,\ z_i)-f_i(x_i,\ y_i);$$

4¹. $\exists\hat f\in\overline{G}_f{}^{12}:\forall\hat x\in X(\hat f)\cap Y,\ y\in Y,\ i\in I$:

$$\hat f_i(\hat x_i,y_i)=\begin{cases}\max\limits_{f\in\overline{G}^{12}_f}\ \max\limits_{x\in X(f)} f_i(x_i,y_i), & \text{если } \hat x=y,\\ \min\limits_{f\in\overline{G}^{12}_f}\ \min\limits_{x\in X(f)} f_i(x_i,y_i), & \text{если } \hat x\neq y;\end{cases}$$

5¹. $\exists\hat f\in\overline{G}_f^{124}:\forall\hat x\in X(\hat f)\cap Y,\quad y\in Y,\quad i\in I$:

$$\hat{f}_i(\hat{x}_i, y_i)=\begin{cases}\max\limits_{f\in\bar{G}_f^{124}} f_i(\hat{x}_i, y_i), & \text{если } \hat{x}=y,\\ \min\limits_{f\in\bar{G}_f^{124}} f_i(\hat{x}_i, y_i), & \text{если } \hat{x}\neq y.\end{cases}$$

Доказательство следствия приведено в приложении.

Замечание 1. Результаты, сформулированные в следствии, останутся справедливыми, если в условиях 1^1—5^1 заменить множество $\bar{G}_f^2$ на $\bar{G}_f^3$. При этом выражение $\forall\hat{x}\in X(\hat{f})\cap Y$ следует заменить на $\forall\hat{x}\in Y$. Некоторые решения задачи (1) для случая с множеством $\bar{G}_f^3$ уже рассматривались в [2].

Замечание 2. Условия оптимальности правильных механизмов, полученные в [1] для случая $G_\Sigma^3=G_\pi\subseteq G_\Sigma^1$, в задаче (1) данной работы являются, вообще говоря, только необходимыми. Но если задача (1) из [1] решена для $\forall G_\pi\subseteq G_{f,\pi}$, то среди этих решений имеется и решение задачи (1) данной работы. Примером такого решения является условие 1^1.

На основе условия 2^1 можно построить оптимальную систему стимулирования $\hat{f}$, используя в качестве «прототипа» целевую функцию системы Ф. Отметим, что выполнение любого из условий 1^1 или 2^1, при соответствующем выборе процедуры планирования, обеспечивает абсолютно оптимальное функционирование системы [2].

Как следует из условия 4^1, одной из оптимальных стратегий центра является стратегия максимального стимулирования за выполнение плана и минимального при его невыполнении.

Представим целевые функции элементов f_i, $i\in I$ в виде $f_i(x_i, y_i)=$ $=h_i(y_i)-\chi_i(x_i, y_i)$, $i\in I$ соответственно для системы стимулирования $f=(h, \chi)$ [2], где $h_i(y_i)=f_i(y_i, y_i)$, $\chi_i(x_i, y_i)=h_i(y_i)-f_i(x_i, y_i)$ — функция штрафов за невыполнение плана. Обозначим $\bar{G}_\chi^{12}(h)=\{\chi\mid(h, \chi)\in\bar{G}_f^{12}\}$ и $\bar{G}_\chi^{124}(h)=\{\chi\mid(h,\chi)\in\bar{G}_f^{124}\}$. Рассмотрим условия 3^1—5^1 в случае, когда h фиксированно. После соответствующих преобразований получим:

3^2. $\exists\hat{\chi}\in\bar{G}_\chi^{12}(h):\forall\chi\in\bar{G}_\chi^{12}(h)$, $\hat{x}\in X(h, \hat{\chi})\cap Y$, $x\in X(h, \chi)$,

$y\in Y$, $i\in I$: $\hat{\chi}_i(\hat{x}_i, y_i)\geqslant\chi_i(x_i, y_i)-\chi_i(x_i, \hat{x}_i)$;

4^2. $\exists\hat{\chi}\in\bar{G}_\chi^{12}(h):\forall z\in X(h, \hat{\chi})\cap Y$, $y\in Y$, $i\in I$:

$$\hat{\chi}_i(\hat{x}_i, y_i)=\begin{cases}0, & \text{если } \hat{x}_i=y_i,\\ \max\limits_{\chi\in\bar{G}_\chi^{12}(h)}\ \max\limits_{x\in X(h,\chi)} \chi_i(\hat{x}_i, y_i), & \text{если } \hat{x}_i\neq y_i;\end{cases}$$

5^2. $\exists\hat{\chi}\in\bar{G}_\chi^{124}(h):\forall\hat{x}\in X(h,\hat{\chi})\cap Y$, $y\in Y$, $i\in I$:

$$\hat{\chi}_i(\hat{x}_i, y_i)=\max_{\chi\in\bar{G}_\chi^{124}(h)}\chi_i(\hat{x}_i, y_i).$$

Как и в следствии, в условиях 3^2—5^2 возможна замена множества $\bar{G}_\chi^2(h)$ на множество $\bar{G}_\chi^3(h)$.

Условие 3^2 можно рассматривать как обобщение достаточного условия сильной согласованности [2] на случай, когда фиксированными являются только Ф и h. Если функция χ также фиксированна, то это условие сводится к условию сильной согласованности 4° б из [1].

Условие 5^2 означает, что на множестве $\bar{G}_\chi^{124}(h)$ оптимальной является система стимулирования с максимальной степенью централизации [2].

Условия 3^2—5^2 можно использовать также в случае, когда h варьируется. Для этого достаточно, чтобы функции штрафа $\hat{\chi}_i$, $i\in I$ имели дополнительно скачок в точке $z=y$ на величину

$$\Delta_i=\max_{y\in Y}[\hat{h}_i(y_i)-h_i(y_i)]-\min_{y\in Y}[\hat{h}_i(y_i)-h_i(y_i)].$$

В качестве функции штрафа в этом случае следует выбрать функцию

$$\hat{\chi}_i^*(\hat{x}_i, y_i) = \begin{cases} 0, & \text{если } \hat{x}_i = y_i, \\ \hat{\chi}_i(\hat{x}_i, y_i) + \Delta_i, & \text{если } \hat{x}_i \neq y_i. \end{cases}$$

4. Рассмотрим пример оптимального синтеза функции штрафа активного элемента в системе, состоящей из центра и одного элемента. Пусть состояние элемента задается скаляром y; множество возможных состояний — множеством $Y = \{y | a \leqslant y \leqslant b\}$; план — скаляром x; множество допустимых планов — множеством $X_s = \{v | c_s \leqslant x \leqslant d_s\}$, где s — целочисленный параметр функции штрафа χ_s. Множество функций штрафа имеет вид:

$$\overline{G}_\chi(h) = \{(q(z, y) - y)^{2s} - (q(z, y) - z)^{2s} | \ s = \overline{1, m}, \ y \in Y, \ z \in X_s \cap Y\},$$

где q — некоторая функция со значениями в X_s. Вид функции h не влияет на результаты решения рассматриваемой задачи синтеза.

Для решения поставленной задачи воспользуемся условием 3^2. Сформируем для этого множество

$$\overline{G}_\chi^{13}(h) = \{((q(z, y) - y)^{2s} - (q(z, y) - z)^{2s} \geqslant 0) \,|\, s = \overline{1, m}, \ y, z \in Y \subseteq X_s\}.$$

Потребуем, чтобы $\overline{G}_\chi^{13}(h) \neq \phi$. Это возможно, если $c_s \leqslant a \leqslant b \leqslant d_s$ и $y \leqslant z \leqslant q(z, y) \leqslant d_s$ либо $c_s \leqslant q(z, y) \leqslant z \leqslant y$ для $s = \overline{1, m}$.

Определим функцию q из условия

$$(q(z, y) - y)^{2s} - (q(z, y) - z)^{2s} = \max_{x \in X_s} [(x - y)^{2s} - (x - z)^{2s}].$$

При $x \leqslant z \leqslant y$ и $y \leqslant z \leqslant x$ производная по x от $(x-y)^{2s} - (x-z)^{2s}$ при любых z, $y \in Y$ знакопостоянна. Поэтому в данном случае максимум функции $(x-y)^{2s} - (x-z)^{2s}$ достигается на границе множества X_s, т. е. $q(z, y) = \{c_s$, если $y \geqslant z$, иначе $d_s\}$. Таким образом, решение поставленной задачи следует искать среди функций штрафа вида:

$$\chi_s(z, y) = \sum_{j=0}^{2s} C_{2s}^j q^{2s-j}(z, y) (-1)^j (y^j - z^j),$$

где $C_{2s}^j = (2s)!/j!(2s-j)!$.

Оптимальное значение s зависит от выбора X_s и Y. Рассмотрим некоторые возможные варианты. Пусть

$$c_s + \frac{1}{c_s - p} \leqslant a \leqslant b \leqslant d_s - \frac{1}{d_s + p}, \qquad p = \sqrt{\frac{s-1}{s}}. \tag{5}$$

Тогда можно установить, что $\chi_s(z, y) - \chi_{s-1}(z, y) \geqslant 0$ для $\forall z$, $y \in Y$, если дополнительно $c_s \leqslant c_{s-1}$ и $d_s \geqslant d_{s-1}$. Поэтому из условия 3^2 следует, что оптимальным значением s является $s = m$. В этом случае условие (5) определяет соответствующее семейство множеств допустимых планов X_s, $s = \overline{1, m}$.

Пусть $c_s \leqslant a \leqslant d_s - \dfrac{1}{d_s + p} \leqslant c_s + \dfrac{1}{c_s - p} \leqslant b \leqslant d_s$. Тогда, наоборот, $\chi_{s-1}(z, y) \geqslant \chi_s(z, y)$ для $\forall z$, $y \in Y$ при дополнительном условии $c_s \geqslant c_{s-1}$ и $d_s \leqslant d_{s-1}$. В результате оптимальное значение s будет равно 1.

Рассмотренные решения не исчерпывают, вообще говоря, всех возможных решений. Нерассмотренными остались, например, случай, когда оптимальное значение s достигается не на границе множества $\overline{1, m}$, и случай, когда s зависит от z, y. Последний является наиболее общим, но в силу громоздкости получающейся при этом функции штрафа не конструктивен и здесь не рассматривается.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В случае, когда из условия 1° следует 2°, будем писать 1° => 2°.

Доказательство теоремы.

(1) => 1°. Предположим обратное. Тогда $\forall \hat{f} \in \overline{G}_f : A(G_{f,\pi}) \cap S(\hat{f}) \cap X(\hat{f}) = \phi$ или $\exists \widetilde{\Sigma} \in G_{f,\pi} : \forall \hat{f} \in \overline{G}_f : A(\widetilde{\Sigma}) \cap S(\hat{f}) \cap X(\hat{f}) = \phi$. Из определения $A(\Sigma)$ следует, что $K(\Sigma') \geqslant K(\Sigma)$, если $A(\Sigma') \subseteq A(\Sigma)$, и $K(\Sigma') > K(\Sigma)$, если $A(\Sigma) \setminus A(\Sigma') \neq \phi$ для Σ, $\Sigma' \in G_{f,\pi}$.

По предположению из множества $X(\hat{f})$ может быть запланирован любой план. Поэтому выберем процедуру оптимального совершенно согласованного планирования [1, 2] и обозначим ее через $\hat{\pi}$. Тогда для $\hat{\Sigma}=\langle\Phi, \hat{f}, \hat{\pi}\rangle\in G_{f,\pi}$ справедливо $A(\hat{\Sigma})\cap S(\hat{f})\cap X(\hat{f})\neq\phi$. Но так как $A(\tilde{\Sigma})\cap S(\hat{f})\cap X(\hat{f})=\phi$, получаем $A(\hat{\Sigma})\setminus A(\tilde{\Sigma})\neq\phi$ и $K(\hat{\Sigma})<K(\tilde{\Sigma})$, что противоречит условию (1). Таким образом из (1) следует 1°.

1°=>(1). Выберем план $\hat{x}\in A(G_{f,\pi})\cap X(\hat{f})\cap S(\hat{f})$. Очевидно, это оптимальный совершенно согласованный план. Поэтому $A(\langle\Phi, \hat{f}, \hat{x}\rangle)=A(G_{f,\pi})\subseteq A(\Sigma)$ для $\forall\Sigma\in G_{f,\pi}$. Отсюда следует, что $K(\hat{\Sigma})\geqslant K(\Sigma)$ для $\forall\Sigma\in G_{f,\pi}$. Что и требовалось доказать.

1°=>2°. Пусть $\hat{x}\in A(G_{f,\pi})\cap S(\hat{f})\cap X(\hat{f})$, тогда для $\forall y\in Y$, $i\in I$ выполняется неравенство (2) и $\hat{x}\in A(G_{f,\pi})\cap X(\hat{f})$. Что и требовалось доказать.

2°=>1°. Так как $\hat{x}\in A(G_{f,\pi})\cap X(\hat{f})$ и для $\forall y\in Y$, $i\in I$ выполняется неравенство (2), $\hat{x}$ одновременно принадлежит множествам $A(G_{f,\pi})\cap X(f)$ и $S(\hat{f})$. Поэтому $A(G_{f,\pi})\cap X(\hat{f})\cap S(\hat{f})\neq\phi$.

2°=>3°. Так как $\hat{x}\in A(G_{f,\pi})\cap X(\hat{f})$, получаем

$$\Phi(\hat{x},\hat{x})\geqslant\min_{y\in R(f,x)}\Phi(x,y)$$

для $\forall\langle\Phi, f, x\rangle\in G_{f,\pi}$. Но для $\forall\langle\Phi, f, x\rangle\in G_{f,\pi}:\exists z\in R(f, x):\Phi(x, z)=\min\limits_{y\in R(f,x)}\Phi(x, y)$.

После подстановки этого равенства в полученное выше неравенство получаем (3) и само условие 3°.

3°=>2°. Так как $z\in R(f, x)$, из неравенства (3) имеем:

$$\Phi(\hat{x},\hat{x})\geqslant\Phi(x,z)\geqslant\min_{y\in R(f,x)}\Phi(x,y)$$

для $\forall\langle\Phi, f, x\rangle\in G_{f,\pi}$. Из определения множества $A(\Sigma)$ и этого неравенства следует, что $\hat{x}\in A(G_{f,\pi})$. Поэтому условие 2° выполняется.

3°=>4°. Так как $z\in R(f, x)$, получаем для $\forall y'\in Y$, $i\in I$: $f_i(x_i, z_i)-f_i(x_i, y_i')\geqslant 0$. Сложив соответствующим образом это неравенство с неравенством (2), получим недостающее неравенство условия 4° и само условие.

4°=>3°. Предположим обратное. Тогда $\forall\hat{f}\in\overline{G}_f$, $\hat{x}\in X(\hat{f})\cap Y:\exists f\in\overline{G}_f$, $x\in X(f)$: $:\forall z\in R(f, x):\exists y\in Y$, $i\in I$, такие, что нарушается неравенство (2). Так как условие 4° справедливо для $\forall y'\in Y$, выберем $y'\in R(f, x)$, тогда для $\forall i\in I$, $x\in X(f)$, $z\in Y$ справедливо неравенство $f_i(x_i, y_i')\geqslant f_i(x_i, z_i)$. Сложим это неравенство и неравенство $\hat{f}_i(\hat{x}_i, \hat{x}_i)<\hat{f}_i(\hat{x}_i, y_i)$, полученное из (2) в силу нашего предположения. Получим

$$\hat{f}_i(\hat{x}_i, \hat{x}_i)-\hat{f}_i(\hat{x}_i, y_i)<f_i(x_i, y_i')-f_i(x_i, z_i).$$

Это неравенство противоречит второму неравенству условия 4°, т. е. относительно неравенства (2) наше предположение неверно. Но тогда в условии 4° $z\in R(f, x)$ и неравенство (3) также должно выполняться. Что и требовалось доказать.

Доказательство переходов 3°=>5° и 5°=>3° проводится аналогично рассмотренным 3°=>4° и 4°=>3° соответственно. Теорема доказана.

Доказательство леммы 1. Рассмотрим условие а).

Необходимость. Так как $A(G_{f,\pi})\neq\phi$, выберем $\hat{x}\in A(G_{f,\pi})$. Тогда

$$\Phi(\hat{x},\hat{x})\geqslant\min_{y\in R(f,x)}\Phi(x,y)$$

для $\forall\langle\Phi, f, x\rangle\in G_{f,\pi}$ или $\forall f\in\overline{G}_f$, $x\in X(f)$. Но $\exists z\in R(f, x)$, такое, что $\Phi(x, z)=$ $=\min\Phi(x, y)$ по $y\in R(f, x)$. Подставим это равенство в полученное выше неравенство, получим неравенство (3) и само условие а).

Достаточность. Предположим обратное. Тогда $A(G_{f,\pi})=\phi$. В этом случае из определения множества $A(\Sigma)$ получаем: $\forall\hat{x}\in Y:\exists f\in\overline{G}_f$, $x\in X(f)$: $\forall z\in R(f, x)$, такие, что нарушается неравенство (3). Это противоречит условию а). Полученное противоречие доказывает достаточность.

Рассмотрим достаточность условия б). Предположим обратное. Тогда, повторив начало предыдущего доказательства, неравенство (3) тем более будет нарушаться, если заменить $\exists f\in\overline{G}_f$, $x\in X(f)$: $\forall z\in R(f, x)$ на $\forall x\in\bigcup\limits_{f\in\overline{G}_f}X(f)$, $z\in\bigcup\limits_{f\in\overline{G}_f}R(f, x)$ (либо $z\in Y$) и положить $\hat{x}=z$. Но, тогда получим условие противоречащее условию б). Противоречие завершает доказательство достаточности условия б) и леммы 1.

Доказательство леммы 2. Предположим обратное. Тогда $S(f)=\phi$ и из определения множества $S(f)$, $\forall z\in Y:\exists i\in I$:

$$\max_{y\in Y}f_i(z_i, y_i)>f_i(z_i, y_i).$$

Выберем $y'\in R(f, z)$, тогда

$$\max_{y\in Y}f_i(z_i, y_i)=f_i(z_i, y_i')>f_i(z_i, z_i),$$

что противоречит условию леммы 2. Лемма 2 доказана.

Доказательство следствия.

$1^1 \Rightarrow 2°$. Предположим обратное. Тогда $\forall \hat{f} \in \bar{G}_f$, $\hat{x} \in A(G_{f,\pi}) \cap X(\hat{f})$: $\exists y \in Y$, $i \in I$, такие, что нарушается неравенство (2). Из условия б) леммы 1 следует, что для $G^1_{f,\pi} = G_\Sigma{}^1 \cap G_{f,\pi}$ множество $A(G^1_{f,\pi}) \neq \phi$ и, так как из условия 1^1 $X(\hat{f}) \cap Y \neq \phi$, $A(G^1_{f,\pi}) \cap X(\hat{f}) \neq \phi$. Поэтому неравенство тем более будет нарушаться, если заменить $\forall \hat{f} \in \bar{G}_f$, $\hat{x} \in A(G_{f,\pi}) \cap X(\hat{f})$ на $\exists \hat{f} \in \bar{G}_f{}^1$, $\hat{x} \in X(\hat{f}) \cap Y$. Полученное условие противоречит условию 1^1. Что и требовалось доказать.

$2^1 \Rightarrow 3°$. Предположим обратное. Тогда $\forall \hat{f} \in \bar{G}_f$, $\hat{x} \in X(\hat{f}) \cap Y : \exists f \in \bar{G}_f$, $x \in X(f)$: $: \forall z \in R(f, x) : \exists y \in Y$, $i \in I$, такие, что нарушается одно или одновременно оба неравенства условия 3°.

Так как в условии 2^1 $\hat{f} \in \bar{G}_f{}^{12}$, целевая функция системы Φ удовлетворяет условию б) леммы 1. Поэтому достаточно положить $z = \hat{x}$, чтобы убедиться в том, что неравенство (3) не нарушается.

Рассмотрим неравенство (2). Выберем $\hat{x} \in Y$, такой, что $\Phi(\hat{x}, \hat{x}) - \Phi(x, x) \geqslant 0$ для $\forall x \in Y$. В силу этого и условия б) леммы 1 имеем: $\Phi(\hat{x}, \hat{x}) \geqslant \Phi(\hat{x}(y_i), \hat{x}(y_i)) \geqslant \geqslant \Phi(\hat{x}, \hat{x}(y_i))$ для $\forall y \in Y$. Отсюда $\eta_i(\hat{x} - \hat{x}(y_i), \Phi(\hat{x}, \hat{x}) - \Phi(\hat{x}, \hat{x}(y_i))) \geqslant 0$. Но из условия 2^1 получаем $\hat{f}_i(\hat{x}_i, \hat{x}_i) - \hat{f}_i(\hat{x}_i, y_i) \geqslant 0$, что противоречит нашему предположению и доказывает достаточность 2^1.

$3^1 \Rightarrow 5°$. Предположим обратное. Тогда $\forall \hat{f} \in \bar{G}_f$, $\hat{x} \in X(\hat{f}) \cap Y : \exists f \in \bar{G}_f$, $x \in X(f)$: $: \forall z \in Y(f, x) : \exists y \in Y$, α, $\beta \geqslant 0$, $i \in I$:

$$\alpha\,[\hat{f}_i(\hat{x}_i, \hat{x}_i) - \hat{f}_i(\hat{x}_i, y_i)] < \beta\,[f_i(x_i, y_i) - f_i(x_i, z_i)]. \tag{6}$$

Так как достаточность условия 3^1 рассматривается на множестве $\bar{G}_f{}^{12}$, целевая функция Φ удовлетворяет условию б) леммы 1. Поэтому неравенство (3) не нарушается.

Строгое неравенство (6) должно выполняться и для $z \in R(f, x)$. Но тогда $f_i(x_i, z_i) \geqslant f_i(x_i, y_i)$ и в результате из (6) следует $\hat{f}_i(\hat{x}_i, \hat{x}_i) < \hat{f}_i(\hat{x}_i, y_i)$. В этом случае неравенство (6) тем более будет выполняться, если положить $\alpha = -\beta \neq 0$. Но полученное таким образом неравенство противоречит неравенству условия 3^1. Это противоречие доказывает достаточность условия 3^1.

$3^1 = 4^1$. Из неравенства условия 3^1 получаем:

$$\hat{f}_i(\hat{x}_i, \hat{x}_i) - \hat{f}_i(\hat{x}_i, y_i) \geqslant \max_{f \in \bar{G}^{13}_f} \max_{z \in X(f)} [f_i(z_i, x_i) - f_i(z_i, y_i)] \tag{7}$$

для $\forall \hat{x} \in X(\hat{f}) \cap Y$, $y \in Y$, $i \in I$. Очевидно,

$$\max_{f \in \bar{G}^{13}_f} \max_{z \in X(f)} [f_i(z_i, x_i) - f_i(z_i, y_i)] \leqslant$$
$$\leqslant \max_{f \in \bar{G}^{13}_f} \max_{z \in X(f)} f_i(z_i, x_i) - \min_{f \in \bar{G}^{13}_f} \min_{z \in X(f)} f_i(z_i, y_i)$$

для $\forall i \in I$. Сравнивая это неравенство с (7), получаем искомое.

$3^1 \Rightarrow 5^1$. Подставляя неравенство, определяющее множество $\bar{G}_f{}^4$, в (6), получим искомое. Следствие доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бурков В. Н., Еналеев А. К., Кондратьев В. В., Цветков А. В.* Элементы теории оптимального синтеза механизмов функционирования двухуровневых активных систем. I. Необходимые и достаточные условия оптимальности правильных механизмов функционирования в случае полной информированности центра.– АиТ, 1983, № 10, с. 139–143.
2. *Бурков В. Н., Кондратьев В. В.* Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981.

Поступила в редакцию
23.VI.1983

FUNDAMENTALS OF THEORY OF OPTIMAL DESIGN FOR FUNCTIONING MECHANISMS OF TWO-LEVEL ACTIVE SYSTEMS

II. DESIGN OF OPTIMAL CORRECT FUNCTIONING MECHANISMS WITH CENTER BEING COMPLETELY INFORMED

BURKOV V. N., YENALEEV A. K., KONDRAT'EV V. V., TSVETKOV A. V.

The necessary and sufficient conditions are obtained for optimality of correct functioning mechanism when the variable component in the design problem is their incentive system as well as the procedure of planning the states of active elements. Constructive optimality conditions are provided for incentive systems ensuring that the plan target is met.