© 2010 г. И.Н. БАРАБАНОВ, канд. физ.-мат. наук,
Н.А. КОРГИН, канд. тех. наук,
Д.А. НОВИКОВ, чл.-корр. РАН,
А.Г. ЧХАРТИШВИЛИ, д-р физ.-мат. наук
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ИНФОРМАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ В СОЦИАЛЬНЫХ СЕТЯХ

Рассмотрены динамические модели информационного управления в социальных сетях. Сформулированы и исследованы задачи анализа и синтеза оптимальных управлений.

1. Введение

Настоящая работа посвящена постановке и исследованию динамических задач информационного управления в социальных сетях. Под *социальной сетью* понимается социальная структура, состоящая из множества *агентов* (субъектов – индивидуальных или коллективных членов сети, например индивидов, семей, групп, организаций) и определенного на нем множества *отношений* (совокупности *связей* между агентами, например знакомства, дружбы, сотрудничества, коммуникации) [1]. Формально социальная сеть представляет собой ориентированный граф $G(N, E)$, в котором N – множество вершин (агентов) и E – множество дуг, отражающих связи между агентами.

При моделировании социальных сетей возникает необходимость учета взаимного влияния их членов, динамики их мнений. Обзор моделей влияния в социальных сетях можно найти в [2]. Целенаправленное влияние членов социальной сети (или субъектов, не входящих в сеть, но использующих ее в качестве инструмента информационного воздействия) является частным случаем *информационного управления*, заключающегося в формировании (как правило, путем сообщения соответствующей информации) у управляемых субъектов такой информированности [3], при которой принимаемые ими решения были наиболее выгодны для управляющего субъекта [4].

Настоящая работа опирается на модель информационного влияния, описанную в [1] и в отличие от указанной работы, рассматривающей однократные информационные воздействия, посвящена динамической модели информационного управления. Изложение имеет следующую структуру: во втором разделе описывается модель социальной сети, в третьем и четвертом разделах рассматриваются соответственно задачи анализа и синтеза управлений. В заключении кратко перечисляются перспективные направления дальнейших исследований.

2. Модель социальной сети

В качестве основы для построения модели социальной сети примем подход, предложенный в [1] в развитие ставших классическими моделей [5-7] (см. также обзоры в [8, 9]). В [1] рассматривается информационное влияние агентов в социальных сетях на формирование мнений друг друга. Структура сети описывается с помощью понятий: *сообщество* (множество агентов, которые не подвергаются влиянию агентов вне его), *группа* (сообщество агентов, в котором любые два агента влияют друг на друга) и *спутник* (агент, не оказывающий влияния ни на одну из групп) [1].

Пусть $N = \{1, \ldots, n\}$ – множество агентов, входящих в социальную сеть. Агенты в сети влияют друг на друга, и степень влияния задается матрицей прямого влияния $A = ||a_{ij}||$ размерности $n \times n$, где $a_{ij} \geq 0$ обозначает степень *доверия* i-го агента j-му агенту (или, что будем считать эквивалентным, степень влияния j-го агента на i-го агента). Считается, что выполняется *условие нормировки*:

$$(1) \qquad \forall i \in N \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1,$$

т.е. матрица A – стохастическая по строкам.

Если i-й агент доверяет j-му, а j-й доверяет k-му, то это означает следующее: k-й агент косвенно влияет на i-го и т.д., т.е., возможны "цепочки" косвенных (опосредованных) влияний.

У каждого агента в начальный момент времени имеется *мнение* по некоторому вопросу. Мнение всех агентов сети отражает вектор-столбец x^0 размерности n действительнозначных начальных ("невозмущенных" – в отсутствие управления) мнений. Классификация и многочисленные примеры мнений членов социальных сетей приведены в [10]. Агенты в социальной сети взаимодействуют, обмениваясь мнениями. Этот обмен приводит к тому, что мнение каждого агента меняется под влиянием мнений агентов, которым данный агент доверяет. Будем считать, что мнение i-го агента $x_i^k \in \Re^1$ в момент времени k равно

$$(2) \qquad x_i^k = \sum_{j \in N} a_{ij} x_j^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Обозначим через $x^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)$ состояние социальной сети в момент времени k. Уравнение (2) записывается в векторно-матричных обозначениях как

$$(2') \qquad x^k = A x^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Предположим, что в каждой группе существует как минимум один агент, который хоть сколько-нибудь доверяет сам себе (т.е. $\exists i$: $a_{ii} > 0$). Тогда (см., например, [11–14]) в конечном итоге (при многократном обмене мнениями) мнения агентов сходятся к результирующему (*итоговому*) вектору мнений $X = \lim\limits_{k \to \infty} x^k$ (общие необходимые и достаточные условия сходимости – правильность цепи Маркова и др. – можно найти в [11–14], ниже мы кратко изложим их суть). Т.е., в конечном итоге мнения спутников определяются мнением групп, а в группах мнения выравниваются.

Тогда можно записать соотношение

$$(3) \qquad X = A^{\infty} x,$$

где $A^{\infty} = \lim\limits_{k \to \infty} A^k$. При этом, во-первых, в каждой из групп итоговые мнения агентов совпадают (имеет место *консенсус*) и не зависят от начальных мнений агентов, не входящих в данную группу; во-вторых, итоговые мнения спутников полностью определяются мнением одной или нескольких групп. Каждый агент из группы является *существенным состоянием* в терминологии теории конечных цепей Маркова [11, 12]. Из этой теории известно, что если у марковского процесса имеется несколько групп существенных состояний (которые в терминах социальных сетей соответствуют понятию групп), то матрица переходов A может быть представлена в виде

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_p & 0 \\ Q_1 & \cdots & Q_p & R \end{pmatrix},$$

где A_l, $l = \overline{1,p}$, – матрицы переходов внутри групп (*неразложимые* стохастические матрицы), p – число групп, Q_l – матрица, описывающая влияние группы l на спутников, при этом суммарное влияние группы l на некоторого спутника определяется как сумма элементов соответствующей строки матрицы Q_l, R – матрица влияния спутников друг на друга.

Если цепь Маркова оказывается в каком-либо состоянии из произвольной группы существенных состояний, то далее возможны состояния только из этой же группы. При этом возврат в это же состояние возможен через какое-то число шагов. Минимальное число шагов, через которое процесс, выйдя из существенного состояния, может вернуться в него, называется *периодом состояния*. Если считать, что матрица взаимовлияний A_l описывает граф для группы l, то период состояния будет совпадать с длиной минимального цикла, проходящего через агента, соответствующего данному состоянию. Очевидно, что период любого состояния из группы не превышает числа состояний в данной группе.

Наибольший общий делитель периодов всех существенных состояний из одной группы называется *цикличностью* d_l группы [11–13]. Данная характеристика группы крайне важна, так как необходимым и достаточным условием сходимости мнений внутри отдельной группы l является *ацикличность* (или *примитивность* по Колмогорову [11]) матрицы взаимовлияний агентов данной группы [13]: $d_l = 1$.

Как отмечалось выше, наличие в группе хотя бы одного агента, который хоть сколько-нибудь доверяет себе, достаточно для сходимости мнений внутри группы. Легко убедиться, что матрица взаимовлияний такой группы ациклична, так как длина минимального цикла для данного агента будет равна единице. Если все группы в матрице A ацикличны, то матрица называется *простой* [11]. Если в простой матрице Aесть только одна группа, то такая матрица называется *регулярной* [11, 12].

Далее для простоты иногда (оговаривая это в каждом конкретном случае) будем предполагать, что все элементы стохастической матрицы прямого влияния A строго положительны, что является достаточным условием регулярности матрицы A (т.е. все члены социальной сети образуют единую ацикличную группу). Отметим, что даже в рамках этого достаточно сильного предположения для сходимости мнений агентов в общем случае потребуется бесконечное время.

Известно, что для регулярной матрицы A все строки матрицы A^∞ равны одному и тому же вероятностному положительному вектору $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, $\forall i \in N \;\; \alpha_i > 0$. Более того, этот вектор является решением уравнения $\alpha A = \alpha$, которое в силу регулярности матрицы A имеет единственное решение [11, 12]. Вектор α является *финальным* (*предельным*) распределением регулярной цепи Маркова [12].

При заданном векторе начальных мнений x^0 итоговым мнением каждого агента будет αx^0. Поэтому с точки зрения рассматриваемой модели, величина α_i может трактоваться как *влиятельность* i-го агента, так как эта величина определяет, насколько сильно его начальное мнение отражается в итоговом. Также очевидным является тот интересный факт, что для любого $k = 1, 2, \ldots$ выполнено равенство $\alpha x^0 = \alpha x^k$, где $x^k = A^k x^0$ (см. выражение (2')). Из этого факта следует, что для всех $a \in \Re^1$ можно определить *область притяжения* $X(a)$ – множество начальных мнений, из которых достижимо данное значение как консенсус группы – $X = a(1 \ldots 1)^{\mathrm{T}}$:

$$X(a) \subseteq \Re^{n-1} = \{x^0 \in \Re^n | \alpha x^0 = a\}.$$

При этом $\forall a, b \in \Re^1$, $a \neq b$ $X(a) \cap X(b) = \varnothing$. Геометрические интерпретации данного утверждения тесно связаны с условием, фигурирующим в формулировке утверждения 2в), приведенного ниже.

В качестве отступления отметим, что задача определения относительного влияния агентов в социальной сети (анализ уравнений типа $\alpha A = \alpha$) чрезвычайно близка к так называемой *задаче ранжирования Интернет-страниц* (*PageRank problem*) – см., например, обзоры в [15–17].

В [1] рассмотрена модель информационного управления, заключающегося в однократном формировании управляющим органом – *центром* – начальных мнений агентов. Представляет интерес анализ возможностей информационного управления, осуществляемого на протяжении, как минимум, нескольких периодов времени. Перейдем к рассмотрению соответствующих моделей.

3. Динамические модели информационного управления. Анализ

"Статическая" модель. Рассмотрим сначала "статический" случай, когда центр имеет возможность оказывать однократно – только в начальный момент времени – влияние на начальные мнения множества $M \subseteq N$ агентов, которых будем условно называть "*агентами влияния*"; их число равно $m = |M|$.

Введем обозначения: $x(u^0) = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ – вектор начальных мнений агентов с учетом управления, $x = (x_M, x_{N\setminus M})$, где $u^0 = (u_j^0)_{j\in M}$ – вектор управлений, $u_j^0 \in U_j$, U_j – некоторые множества, представляющие собой ограничения на управления (конкретный вид этих множеств в той или иной математической модели определяется содержательным смыслом управлений), $j \in M$, $x_M = (x_j(u^0))_{j\in M}$.

Предположим, что управление – влияние центра на мнения агентов – аддитивно, т.е. $x_i(u^0) = x_i^0$, $i \in N\setminus M$, $x_j(u^0) = x_j^0 + u_j^0$, $j \in M$. С учетом управлений выражение (3) примет вид

$$X(u^0) = A^\infty x(u^0).$$

До сих пор ничего не было сказано о критерии эффективности информационного управления, т.е. о целевой функции центра, его предпочтениях (эти термины употребляются ниже как синонимы). Будем пока считать, что предпочтения центра зависят от итоговых мнений агентов X. Например, центр может быть заинтересован в том или ином значении среднего арифметического мнений членов социальной сети, тогда, как показано в [1], статическая задача определения оптимального управления сводится к задаче линейного программирования; в [10] приведены соответствующие численные примеры.

Динамические модели: анализ. Перейдем к описанию случая динамического информационного управления, когда центр имеет возможность оказывать влияние на мнения агентов не только в начальный, но и в другие моменты времени.

Без потери общности предположим, что агентами влияния являются агенты с номерами $1, 2, \ldots, m$. Обозначим через $u^k = (u_j^k)_{j=1}^m$, $k = 0, 1, \ldots$ вектор управлений в момент времени k и введем в рассмотрение матрицу $B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \dots & 1 \\ & 0 & \end{pmatrix}$ размера $n \times m$. Представляет интерес, каково должно быть минимальное число агентов влияния и в каких случаях наличие только одного агента влияния позволяет управлять (в том числе оказывая воздействие однократно) всей социальной сетью. Достаточные условия даются следующим утверждением.

Утверждение 1. *Пусть все элементы стохастической матрицы прямого влияния A строго положительны, а однократно оказываемое в начальный момент времени воздействие не ограничено. Тогда при наличии, как минимум, одного (произвольного) агента влияния может быть реализовано любое единогласное значение итоговых мнений членов социальной сети.*

Справедливость утверждения 1 следует из того, что в рамках предположения о строгой положительности элементов матрицы A все строки матрицы A^∞ одинаковы и не содержат нулевых элементов (как отмечалось выше, элементы матрицы A^∞ отражают *влиятельность* агентов [1, 9, 13]).

Считая, что в каждом периоде (в том числе в нулевом) управление предшествует обмену мнениями между агентами, уравнение динамики мнений можно записать в матричном виде следующим образом (ср. с выражением (2)):

$$x^{k+1} = A[x^k + B\,u^k], \quad k = 0, 1, \dots \tag{4}$$

Выражение (4) представляет собой разностное уравнение, которое описывает линейную дискретную систему управления [18] со стохастической матрицей A. Его решение при заданном начальном условии (аналог решения задачи Коши в непрерывном случае) можно записать в виде

$$x^k = A^k x^0 + \sum_{\tau=0}^{k-1} A^{k-\tau} B\, u^\tau, \quad k = 1, 2, \dots \tag{5}$$

Назовем $\Phi = [B' \;\; A\,B' \;\; \dots \;\; A^{n-1}\,B']$, где $B' = A\,B$, *матрицей управляемости* системы (4).

Предположим пока, что ограничения на управления отсутствуют (т.е. $U_j = \Re^1$, $j \in M$). Тогда вопрос о достижимости произвольного состояния x^T линейной системы (4) за T ($T \geq n$) шагов сводится к вопросу о невырожденности пары матриц A и $A\,B$ или, что то же самое к тому, равен ли ранг матрицы Φ числу n. Искать ответ на этот вопрос можно, используя известные результаты теории дискретных систем управления (см., например, [18]).

Представляет интерес, насколько итоговые мнения агентов зависят от того, в каких периодах времени были оказаны воздействия. Ответ на этот вопрос дает утверждение 2а). Если предпочтения центра зависят именно от итоговых мнений агентов, то утверждение 2б) позволяет существенно упростить задачу, сведя ее к статической. Для этого достаточно неограниченности управлений. В случае же, когда предпочтения центра зависят от мнений агентов в некоторый конечный момент времени, для возможности сведения задачи управления к статической требуется выполнения дополнительного условия, фигурирующего в утверждении 2в).

Утверждение 2а). *Пусть центр оказал воздействия $u^0, \dots, u^l$, $l < +\infty$. Вектор итоговых (при $k \to +\infty$) мнений агентов не изменится, если те же (по величине) воздействия были оказаны в любые другие конечные моменты времени.*

Утверждение 2б). *Пусть управления не ограничены. Тогда для любой последовательности векторов управлений $u^0, \dots, u^l$, $l < +\infty$, существует такой вектор* *управлений ν в начальный (нулевой) момент времени, который приводит к тем же итоговым мнениям агентов.*

Утверждение 2в). *Пусть управления не ограничены и*

$$\mathrm{span}\,(\Phi) \subseteq \mathrm{span}\,(A^{l+1}\,B),$$

где $\mathrm{span}(\cdot)$ – *линейная оболочка столбцов матрицы.*

Тогда для любой последовательности векторов управлений $u^0, \ldots, u^l$, $l < +\infty$ и реализовавшегося состояния x^{l+1} социальной сети существует такой вектор управлений $\hat{\nu}$ в начальный (нулевой) момент времени, который приводит к тому же состоянию x^{l+1} социальной сети в момент времени $l+1$.

Доказательство утверждений 2а)–2б). В силу (3) и равенства $A^\infty A = A^\infty$ имеем:

$$X = A^\infty\left[\ldots A\left(A\left(A\left(x^0 + B\,u^0\right) + B\,u^1\right) + B\,u^2\right) + \ldots + B\,u^l\right] = \tag{6}$$

$$= A^\infty(x^0 + B\,u^0) + A^\infty \sum_{k=1}^{l} Bu^k.$$

Обозначая

$$\nu = \sum_{k=0}^{l} u^k, \tag{7}$$

получим: $X = A^\infty(x^0 + B\nu)$, что и требовалось доказать.

Доказательство утверждения 2в). В соответствии с выражением (5) можно записать: $x^{l+1} = A^{l+1}[x^0 + B\,u^0] + \sum\limits_{k=1}^{l} A^{l-k+1}B\,u^k$. С другой стороны, требуется найти вектор $\hat{\nu}$ такой, что $x^{l+1} = A^{l+1}[x^0 + B\hat{\nu}]$. Если выполнены условия утверждения 2в), то по теореме Кронекера–Капелли можно найти вектор $\hat{\nu}$, являющийся решением системы линейных алгебраических уравнений

$$A^{l+1}B\hat{\nu} = A^{l+1}Bu^0 + \sum_{k=1}^{l} A^{1-k}B\,u^k.$$

Следствие 1. *Пусть управления не ограничены, а критерий эффективности управления зависит только от итоговых мнений агентов и суммы (по агентам и периодам времени) управлений. Тогда для любой конечной последовательности векторов управлений существует вектор* (7) *начальных управлений не меньшей эффективности.*

Итак, в рамках условий следствия 1 использование зависящего от времени управления не даст ничего нового по сравнению со статическим случаем. Следует подчеркнуть, что данный результат может оказаться чрезвычайно эффективным в моделях когнитивных карт (см. обсуждение задач управления "на когнитивных картах" в [19]). Поэтому существенным предположением, которое будем считать выполненным в ходе последующего изложения, является то, что предпочтения центра зависят от мнений агентов в конечном числе $T < +\infty$ первых периодов их взаимодействия.

Назовем *влиятельностью* агента j в момент k следующую сумму: $w_j^k = \sum\limits_{i\in N}(A^k)_{ij}$. Назовем *суммарным мнением* агентов в момент k сумму $\sum\limits_{i\in N} x_i^k$. Пусть центр выбрал управления $u^0, \ldots, u^l$, $l \le T$. Назовем *суммарным воздействием* сумму $\sum\limits_{\xi=0}^{l} \sum\limits_{j \in M} u_j^\xi$.

Для удобства вычислений введем матрицу $C_0 = \underbrace{(1 \ldots 1)}_{n}$ и запишем в матричном виде: $w^k = C_0 A^k$ – матрица-строка размерности n, состоящая из влиятельностей агентов; $x_\Sigma^k = C_0 x^k$ – суммарное мнение агентов в момент времени k; $u_\Sigma = \sum\limits_{\xi=0}^{l} C_0 B u^\xi$ – суммарное воздействие.

Представляет интерес вопрос, в какие моменты времени и на каких агентов следует воздействовать центру. Ответ даст следующее.

Утверждение 3. *Пусть управления неотрицательны* ($u_j^k \ge 0$, $j \in M$, $k = 0, 1, \ldots$). *Если центр стремится достичь максимального суммарного мнения агентов в момент T при заданном суммарном воздействии, то для этого достаточно оказать в момент времени k^* единственное воздействие на одного агента j^* с максимальной влиятельностью:*

$$(8) \qquad (j^*, k^*) \in \operatorname*{Argmax}_{j \in M,\, k \in \{0, \ldots, T-1\}} w_j^{T-k}.$$

Доказательство. Вектор мнений агентов в момент T имеет вид (см. (5)):

$$x^T = A^T x^0 + \sum_{k=0}^{T-1} A^{T-k} B u^k, \quad T = 1, 2, \ldots.$$

Как и ранее, обозначим суммарное воздействие через u_Σ:

$$u_\Sigma = \sum_{k=0}^{T-1} \sum_{j \in M} u_j^k = C_0 B \sum_{k=0}^{T-1} u^k.$$

В силу (8) для суммарного мнения агентов в момент T справедлива следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned} x_\Sigma^T &= \sum_{i \in N} x_i^T = \sum_{i \in N} (A^T x^0)_i + \sum_{k=0}^{T-1} \sum_{i \in N} (A^{T-k} B u^k)_i = \\ &= C_0 A^T x^0 + \sum_{k=0}^{T-1} C_0 A^{T-k} B u^k = \\ &= w^T x_0 + \sum_{k=0}^{T-1} w^{T-k} B u^k \le w^T x_0 + \max_{j \in M, t \in \{0, 1, \ldots, T-1\}} w_j^t \sum_{k=0}^{T-1} C_0 B u^k = \\ &= w^T x_0 + w_{j^*}^{k^*} u_\Sigma. \end{aligned}$$

С другой стороны, если взять управления $u_{j^*}^{k^*} = u_\Sigma$, $u_j^k = 0$ ($j \ne j^*$, $k \ne k^*$), то неравенство выше обратится в равенство. Утверждение 3 доказано.

Аналогичный утверждению 3 результат будет иметь место и в случае, когда целевая функция центра частично монотонна по мнениям агентов (в любой момент времени в течение планового горизонта), а ограничения заданы не на суммарное воздействие, а на индивидуальные управления. При этом оптимальные управления будут однократными и будут лежать на границе множества допустимых управлений.

Ситуация усложнится, если целевая функция центра не является частично монотонной по действиям агентов. Тогда динамическая задача синтеза оптимального информационного управления сведется к той или иной (в зависимости от структуры целевой функции центра) оптимизационной задаче, которая в каждом конкретном случае может быть решена численно. Существенным упрощающим фактором при этом является линейность управляемой системы (см. (5)).

Перейдем к постановке динамической задачи синтеза оптимального информационного управления.

4. Динамические модели информационного управления. Синтез

В общем случае задача синтеза формулируется следующим образом. Обозначим: $y = Y(x) \in \Re^q$ – вектор *наблюдаемых состояний* социальной сети, $Y\colon \Re^q \to \Re^k$ – известная функция, $q \leq n$, T – плановый горизонт, $x^{1,T} = (x^1, \dots, x^T)$ – траектория состояний социальной сети, $y^{1,T} = (y^1, \dots, y^T)$ – траектория наблюдаемых состояний социальной сети, $u(y)\colon \Re^q \to U$ – *закон управления*, $u^{1,T} = (u(y^1), \dots, u(y^T))$ – последовательность управлений, $F(y^{1,T}, u^{1,T})$ – критерий эффективности управления.

Пусть известно начальное наблюдаемое состояние социальной сети. В общем виде динамическая *задача синтеза оптимального позиционного информационного управления* заключается в нахождении допустимого закона управления дискретной системой (4), обладающего максимальной эффективностью:

$$F\left(y^{1,T}(x^{1,T}(u(\cdot))), u(\cdot)\right) \to \max_{u(\cdot)}. \tag{9}$$

В общем виде динамическая *задача синтеза оптимального программного информационного управления* заключается в нахождении последовательности управлений дискретной системой (4), обладающей максимальной эффективностью:

$$F\left(y^{1,T}(x^{1,T}(u^{1,T})), u^{1,T}\right) \to \max_{u^{1,T}}. \tag{10}$$

Естественно, в рассматриваемой детерминированной задаче (в отсутствие неопределенности) последовательности управлений, являющиеся решениями задач (9) и (10), совпадают. Задача построения оптимального управления для систем с дискретным временем исследовалась многими авторами. Некоторые подходы к решению этой задачи можно найти, например, в [18].

Рассмотрим ряд практически важных для социальных сетей частных случаев задач (9) и (10). Пусть фиксирован вектор y^*, являющийся "целью" информационного управления в пространстве наблюдаемых состояний социальной сети. Задачи

$$||y^T - y^*|| \to \min_{u(\cdot)} \tag{11}$$

и

$$||y^T - y^*|| \to \min_{u^{1,T}} \tag{12}$$

назовем *задачами позиционного и программного управления конечным состоянием социальной сети.*

Рассмотрим задачу (12), причем для простоты будем считать, что $y = x$, т.е. наблюдаемыми являются состояния всех агентов системы. Если выполнены условия утверждения 2в), то минимум в (12) будет равен нулю, а управление достаточно будет приложить только один раз (утверждения 2а) и 2б)). Если условие $\operatorname{span}(\Phi) \subseteq \operatorname{span}(A^T B)$ не будет выполнено, то система, вообще говоря, не придет в состояние y^* (в нашем случае $x^* = y^*$). В этом случае можно говорить только о том, чтобы перевести систему в некоторое состояние, лежащее на множестве $A^T x^0 + \operatorname{span}(\Phi)$, максимально близкое к y^* в смысле евклидовой метрики. Задача отыскания соответствующего управления сведется в этом случае к задаче безусловной минимизации неотрицательно определенной квадратичной формы. Решение при этом не будет единственным и, опять же в силу утверждений 2а) и 2б), одним из решений будет однократное воздействие на систему.

Задача (12) сводится к известной задаче также при условии, что управление u_i ограничено — принимает значения в некотором выпуклом множестве U, например $|u_i| \leq 1$. Тогда задача нахождения программного управления, которое переводит систему из некоторого заданного начального состояния x^0 в состояние, максимально близкое к x^*, сведется к задаче выпуклого программирования:

$$\left\| A^T x^0 + \sum_{t=1}^{T-1} A^{T-t} B u^t - x^* \right\| \to \min_{u_i^t \in U},$$

которая может быть решена известными методами (см., например, [20]).

В заключение настоящего раздела приведем пример постановки задачи позиционного управления — синтеза линейного регулятора, осуществляющего *стабилизацию социальной сети*.

Пусть $y = Cx$, где $C \in \Re^{q \times n}$ — некоторая матрица. Выберем линейный закон управления в виде $u = Ky$ (если $u = Kx$, $C = E_n$ в случае, если наблюдению доступны состояния всех агентов). Уравнение замкнутой системы управления:

(13) $$x^{k+1} = (A + A\ B\ K\ C)x^k.$$

В силу линейности рассматриваемой системы стабилизация произвольного положения x^* будет эквивалентна стабилизации нулевого положения равновесия замкнутой системы (13). Управление будет стабилизирующим, если спектр матрицы замкнутой системы $A + A\ B\ K\ C$ будет лежать внутри единичного круга на комплексной плоскости с центром в нуле. Заметим, что в случае $C = E_n$ и невырожденности пары A, $A\ B$ соответствующая матрица K всегда найдется.

В общем случае для задачи стабилизации социальной сети можно применять известные методы синтеза линейных стабилизирующих регуляторов для линейных дискретных систем [18].

5. Заключение

Основным результатом настоящей работы является сведение динамических задач управления определенным классом социальных сетей к каноническим для теории управления задачам исследования управляемости и синтеза линейных дискретных систем управления. Поэтому перспективной представляется дальнейшая трансляция результатов теории управления в такую область, как управление в социальных сетях. Кроме того, многообещающими выглядят:

1) отказ от очень сильного предположения (в том случае, когда оно вводится) о строгой положительности матрицы влияний, а в более общем случае — исследование влияния графа коммуникаций на свойства социальной сети и ее управляемость;

2) использование многочисленных известных результатов исследования цепей Маркова и управляемых марковских процессов при построении различных моделей социального влияния;

3) рассмотрение критериев эффективности управления более общего вида;

4) детальное исследование роли ограничений на управление;

5) исследование моделей социальных сетей, в которых "подверженность" агентов управляющим информационным воздействиям различна, что может быть отражено использованием в матрице B соответствующих "весовых" коэффициентов;

6) рассмотрение задач управления "нелинейными" социальными сетями, т.е., такими, в которых уравнения динамики мнений агентов, аналогичные выражению (2), нелинейны;

7) учет неопределенности (вероятностной или интервальной), в первую очередь, добавление в правую часть выражения (4) аддитивных внешних возмущений (соответственно стохастических или ограниченных);

8) введение нескольких управляющих органов, каждый из которых управляет некоторым множеством агентов, причем на одного и того же агента могут оказывать воздействие различные управляющие органы. Тогда, предполагая аддитивность управлений, получим обычную динамическую игру управляющих органов (модель так называемого информационного противоборства [1, 21]), для которой можно искать, например, совершенное по подыграм равновесие и т.д. [22];

9) постановка и решение задачи управления структурой коммуникаций между членами социальной сети [10] с возможным переносом результатов на задачу о консенсусе [23, 24] и наоборот;

10) разработка имитационных моделей, позволяющих анализировать динамические процессы информационного управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Модели информационного влияния и информационного управления в социальных сетях // Пробл. управления. 2009. № 5. С. 28-35.
2. *Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Модели влияния в социальных сетях (обзор) // Управление большими системами. 2009. № 27. С. 205–281.
3. *Чхартишвили А.Г.* Теоретико-игровые модели информационного управления. М.: ПМСОФТ, 2005.
4. *Новиков Д.А.* Теория управления организационными системами. 2-е изд. М.: Физматлит, 2007.
5. *French J.R.* A Formal Theory of Social Power // Psychological Rev. 1956. No. 63. P. 181–194.
6. *Harary F.* A Criterion for Unanimity in French's Theory of Social Power / Studies in Social Power. – Michigan: Inst. Sociolog. Res. 1959. P. 168–182.
7. *De Groot M.H.* Reaching a Consensus // J. Amer. Statist. Assotiat. 1974. No. 69. P. 118–121.
8. *Робертс Ф.С.* Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. М.: Наука, 1986.
9. *Jackson M.* Social and Economic Networks. Princeton: Princeton University Press, 2008.
10. *Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства. М.: Изд.-во. физ.-мат. лит.-ры., 2010.
11. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. 4-е изд. М.: Наука, 1988.
12. *Кемени Дж., Снелл Дж.* Конечные цепи Маркова. М.: Наука, 1970.
13. *Golub B., Jackson M.* Naive Learning in Social Networks: Convergence, Influence and the Wisdom of Crowds. 2007. http://www.stanford.edu/~jacksonm/naivelearning.pdf.
14. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

15. *Langville A., Meyer C.* A Survey of Eigenvector Methods for Web Information Retrieval // SIAM Rev. 2005. No. 47. P. 135–161.

16. *Langville A., Meyer C.* Google's PageRank and Beyond: The Science of Search Engine Rankings. Princeton: Princeton University Press, 2006.

17. *Lin Y., Shi X., Wei Y.* On Computing PageRank via Lumping the Google Matrix // J. Comput. Appl. Math. 2009. V. 224. No. 2. P. 702–708.

18. Справочник по теории автоматического управления. Под ред. А.А. Красовского. М.: Наука, 1987.

19. *Новиков Д.А.* "Когнитивные игры": линейная импульсная модель // Пробл. управления. 2008. № 3. С. 14–22.

20. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.

21. *Губанов Д.А., Новиков Д.А.* Модели распределенного контроля в социальных сетях // Сист. управл. и информ. технологии. 2009. № 3.1 (37). С. 124–129.

22. *Губко М.В., Новиков Д.А.* Теория игр в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2002.

23. *Чеботарев П.Ю., Агаев Р.П.* Согласование характеристик в многоагентных системах и спектры лапласовских матриц орграфов // АиТ. 2009. № 3. С. 136–151.

24. *Wei R.* Consensus Seeking, Formation Keeping and Trajectory Tracking in Multiple Vehicle Cooperative Control. PhD Dissertation. Brigham: Brigham Young University, 2004.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Т. Поляком.