© 2002 г. А. А. ВОРОНИН, д-р физ.-мат. наук,
С. П. МИШИН
(Волгоградский государственный университет)

МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СТРУКТУРНЫМИ ИЗМЕНЕНИЯМИ ОРГАНИЗАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Рассматривается организационная система: совокупность некоторых элементов, иерархически связанных для выполнения набора функций. Предполагается, что результат деятельности системы зависит от ее структуры. На множестве всевозможных структур (графов организации) определены затраты на функционирование системы и на реструктуризацию. Оптимальное управление структурными изменениями на конечном отрезке времени состоит в выборе последовательности структурных преобразований, максимизирующей суммарную прибыль. Оптимальное управление позволяет сбалансировать затраты на функционирование (эффективность) и на реструктуризацию (устойчивость к внешним воздействиям).

1. Введение

Подавляющее большинство существующих моделей организационной системы предполагает структуру заданной или рассматривает несколько ее вариантов. Двухуровневая организационная система общего вида (центр и подчиненные элементы) подробно изучена в теории активных систем. Один из подходов к изучению многоуровневой системы состоит в ее декомпозиции на ряд двухуровневых, что позволяет изучать систему с неизменной структурой. Однако сохранение эффективности системы при изменениях внешней среды иногда требует ее структурной перестройки, которая не описывается в рамках двухуровневых систем [1]. Ниже рассмотрена модель, позволяющая сравнивать эффективность различных управлений структурными изменениями.

Рассматривается организационная система на протяжении T единиц времени. Параметры, соответствующие единице времени t, будем снабжать верхним индексом t, $t = \overline{1,T}$.

Считаем, что система получает доход, выпуская некоторые изделия из заданного набора $I_1, \ldots, I_q$, определяющего область деятельности (отрасль). Состав выпускаемых изделий может меняться с течением времени, но весь набор $I_1, \ldots, I_q$ изделий отрасли считаем неизменным на всем изучаемом отрезке времени.

Обозначим объем изделия I_k, выпускаемый за единицу времени t, через $y_k^t \geq 0$, вектор объемов – через $\mathbf{y}^t = (y_1^t, \ldots, y_q^t)$. Цену изделия I_k в течение единицы времени t обозначим через p_k^t, максимальный объем изделия, который система может реализовать на рынке, – через v_k^t. Соответствующие векторы обозначим через $\mathbf{p}^t = (p_1^t, \ldots, p_q^t)$, $\mathbf{v}^t = (v_1^t, \ldots, v_q^t)$.

Считаем, что параметры $\mathbf{p}^1, \ldots, \mathbf{p}^T$, $\mathbf{v}^t, \ldots, \mathbf{v}^T$ определяются внешней средой и не зависят от управления системой. Наборы векторов $\mathbf{p}^t = \{\mathbf{p}^1, \ldots, \mathbf{p}^t\}$ и $\mathbf{v}^t =$

$= \{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^t\}$ считаем известными к началу единицы времени t. Параметры $\mathbf{y}^1, \ldots$ $\ldots, \mathbf{y}^T$ управляемы: их можно выбирать с учетом ограничений $0 \le y_k^t \le v_k^t$, $k = \overline{1,q}$, $t = \overline{1,T}$.

Набор операций (элементарных работ), необходимых для выпуска всех изделий, обозначим через $e_1, \ldots, e_r$. Считаем, что набор $e_1, \ldots, e_r$ не содержит вспомогательных операций, связанных с организацией системы (управление, учет и т.п.), и определяется технологией.

Пусть задана матрица технологических коэффициентов $W = \{w_{k,j}\}$, где $w_{k,j} \ge$ ≥ 0 – количество единиц элементарной работы e_j, необходимое для выпуска единицы изделия I_k, $k = \overline{1,q}$, $j = \overline{1,r}$. Набор $e_1, \ldots, e_r$ и матрицу W полагаем одинаковыми для всех организаций данной отрасли и неизменными на всем изучаемом отрезке времени параметрами внешней среды.

На протяжении единицы времени t система располагает некоторым множеством исполнителей $A^t = \{a_1^t, \ldots, a_{n^t}^t\}$, которые могут выполнять элементарные работы $e_1, \ldots, e_r$. К началу следующей единицы времени имеется возможность уволить некоторых исполнителей из A^t и нанять исполнителей из множества $\widetilde{A}^t$. Таким образом, управляя системой, можно выбирать множество $A^t \subseteq A^{t-1} \cup \widetilde{A}^{t-1}$, $t = \overline{1,T}$, где A^0 – начальное множество исполнителей, $\widetilde{A}^0 = \varnothing$. Множества A^0, $\widetilde{A}^1, \ldots, \widetilde{A}^T$ определяются внешней средой и не зависят от управления. К началу единицы времени t известен набор множеств $\widetilde{\mathbf{A}}^t = \left\{\widetilde{A}^1, \ldots, \widetilde{A}^{t-1}\right\}$, т.е. информация о рынке труда в прошлом.

Обозначим через $s_j(a)$ количество элементарной работы e_j, которое исполнитель a способен выполнить в единицу времени. Вектор производительности $\mathbf{s}(a) =$ $= (s_1(a), \ldots, s_r(a))$ исполнителя a считаем постоянным на всем изучаемом отрезке времени (пренебрегая изменениями $\mathbf{s}(a)$, например, при обучении или деградации).

Обозначим через $0 \le x_j^t(a) \le 1$ долю единицы времени t, которую a уделяет выполнению элементарной работы e_j Загруженность исполнителя a обозначим через $z^t(a) = \sum\limits_{j=\overline{1,r}} x_j^t(a)$. План работ исполнителя a в течение единицы времени t обозначим через $\mathbf{x}^t(a) = (x_1^t(a), \ldots, x_r^t(a))$. Управляя системой, можно выбирать $\mathbf{x}^t(a)$ с учетом ограничения $z^t(a) \le 1$. Для выполнения объема работ, необходимого для выпуска изделий, должны выполняться соотношения $\sum\limits_{k=\overline{1,q}} y_k^t w_{k,j} \le \sum\limits_{a \in A^t} s_j(a) x_j^t(a)$, $j = \overline{1,r}$. Если все неравенства выполнены, то план выпуска $\mathbf{y}^t$ и планы работ $\mathbf{x}^t(a)$, $a \in A^t$ будем называть корректными.

Затраты на выполнение работ исполнителем a в соответствии с планом $\mathbf{x}^t(a)$ определяются технологией (необходимые материалы, энергия и т.п.) и не зависят от взаимодействия исполнителей. Считаем, что управление не влияет на заработную плату (фиксированную или сдельную, зависящую от $\mathbf{x}^t(a)$). Таким образом, суммарные затраты $p(a, \mathbf{x}^t(a))$ на содержание исполнителя a зависят от самого исполнителя и от плана его работ. Если планы работ $\mathbf{x}^t(a)$ определены, то будем обозначать затраты через $p^t(a) = p(a, \mathbf{x}^t(a))$.

2. Граф организации системы

Для выпуска изделий необходимо организовать взаимодействие исполнителей, каждый из которых выполняет часть элементарных работ.

Определение 1. Любое непустое подмножество $f \subseteq A^t$, $t = \overline{1,T}$, назовем группой. Множество всех групп в течение единицы времени t обозначим через

$F^t = 2^{A^t} \setminus \{\varnothing\}$. *Мощностью группы* f *назовем количество содержащихся в ней исполнителей* $|f|$.

От распределения выполненных исполнителем a работ $x_1^t(a)s_1(a), \ldots, x_r^t(a)s_r(a)$ для выпуска тех или иных изделий зависит его участие в выпуске каждого из изделий. Таким образом, в выпуске изделия I_k участвует некоторое подмножество исполнителей $f \subseteq A^t$, причем $f = \varnothing$ при $y_k^t = 0$, в противном случае $f \in F^t$.

Следовательно, для выпуска изделий в объемах $\mathbf{y}^t$ в течение единицы времени t необходимо организовать набор групп $\mathbf{f}^t = \{f_1^t, \ldots, f_{m^t}^t\}$, $m^t \leq q$. По планам выпуска $\mathbf{y}^t$ и планам работ $\mathbf{x}^t(a)$ набор $\mathbf{f}^t$ определяется, вообще говоря, неоднозначно. Набор назовем корректным, если он соответствует некоторому распределению выполненных исполнителями работ по изделиям. Управление системой определяет один из корректных наборов групп. Зафиксировав единицу времени, далее в этом и следующем пунктах индекс t будем опускать.

Определение 2. *Назовем ориентированный граф* $G = (V, E)$ *графом организации групп* $f_1, \ldots, f_m$, *если он удовлетворяет следующим условиям:*

a) вершины соответствуют группам, т.е. $V \subseteq F$, $f_1, \ldots, f_m \in V$;

b) $E \subseteq V \times V$, *для любого ребра* $(g, h) \in E$ *выполнено* $g \subset h$;

c) для произвольной вершины $g \in V$ *обозначим через* $Q(g) = \{h : (h, g) \in E\}$ *множество вершин, из которых идут ребра в* g. *Тогда для любой* $h' \in Q(g)$ *выполнено* $h' \not\subseteq \bigcup\limits_{h \in Q(g) \setminus \{h'\}} h$. *Для любой* $g \neq \{a_i\}$, $i = \overline{1, n}$ *выполнено* $g = \bigcup\limits_{h \in Q(g)} h$, $Q(\{a_i\}) = \varnothing$.

Таким образом, ребра, входящие в группу $g \in V \setminus \{a_1\}, \ldots, \{a_n\}$, определяют набор подгрупп $Q(g)$, из которых она организуется. Каждая подгруппа $Q(g)$ не покрывается целиком остальными подгруппами (иначе нет смысла ее использовать при организации g). В группы $\{a_1\}, \ldots, \{a_n\}$ ребра не входят (группы, состоящие из одного исполнителя, организовывать не нужно). Граф определяет порядок взаимодействия исполнителей при организации групп $f_1, \ldots, f_m$, т.е. структуру системы. Под организацией будем понимать соответствующий граф организации. Вершины (группы) мощности 1 будем называть элементарными, неэлементарные вершины G, отличные от $f_1, \ldots, f_m$, – промежуточными.

Из определения 2 следует, что граф организации ацикличен и для любой группы $g \in V \setminus \{a_1\}, \ldots, \{a_n\}$ выполнено $|Q(g)| \geq 2$.

Определение 3. *Организацию* $G = (V, E)$ *назовем последовательной, если для любой неэлементарной группы* $g \in V$ $Q(g) = \{g \setminus \{a\}, \{a\}\}$ *для некоторого* $a \in A$.

Определение 4. *Организацию* $G = (V, E)$ *назовем* r*-организацией,* $r \geq 2$, *если для любой группы* $g \in V$ $|Q(g)| \leq r$.

Определение 5. *Организацию* $G = (V, E)$ *назовем одновременной, если* $V = \{\{a_1\}, \ldots, \{a_n\}, f_1, \ldots, f_m\}$, *причем* $Q(f_i) \subseteq \{\{a_1\}, \ldots, \{a_n\}\}$ *для* $i = \overline{1, m}$.

В последовательной организации любая неэлементарная группа организуется из двух подгрупп, хотя бы одна из которых элементарна. Таким образом, последовательная организация – частный случай 2-организации. Одновременная организация единственна. Примеры организаций приведены на рис. 1.

Слева на рис. 1 изображена одновременная организация групп $f_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$, $f_2 = \{a_2, a_3, a_4\}$, при которой исполнители взаимодействуют между собой в группах f_1, f_2 без промежуточных звеньев. В центре приведен пример последовательной организации групп f_1, f_2. Исполнители a_2 и a_3 взаимодействуют, образуя промежуточную группу $\{a_2, a_3\}$ (подразделение организации), которая используется как для организации f_1, так и для организации f_2. Справа на рисунке приведен пример 2-организации группы $f = \{a_1, \ldots, a_4\}$. Здесь f организуется из двух пересекающихся промежуточных подгрупп.

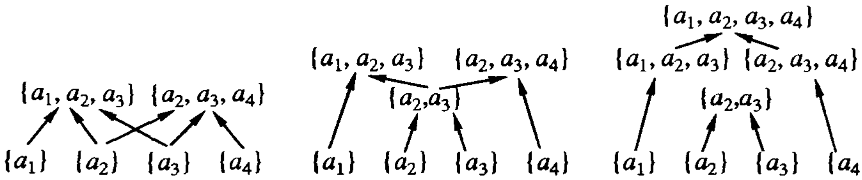

Рис. 1. Примеры графов организации.

Определение 6. *Тупиковой вершиной графа организации назовем вершину, из которой не выходит ребер.*

Определение 7. *Организацию назовем организацией без пересечений, если для всех неэлементарных $g \in V$ множество $Q(g)$ не содержит пересекающихся групп.*

Определение 8. *Вершину $g \in V$ назовем дочерней для вершины $f \in V$, $f \neq g$, если в графе $G = (V, E)$ существует путь из g в f.*

Дочерняя вершина (группа) – некоторое подмножество родительской. Докажем вспомогательное утверждение, которым будем пользоваться в дальнейшем.

Утверждение 1. *Организация одной группы f без пересечений, содержащая единственную тупиковую вершину f, представляет собой дерево с корнем в f.*

Доказательство проводится индукцией по мощности f. Если $|f| = 1$, то организация $G = (V, E)$ состоит из одной вершины, поскольку иначе существовала бы отличная от f тупиковая вершина. Пусть утверждение доказано для всех мощностей, меньших k.

Пусть $f = \{a_1, \ldots, a_k\}$ организуется из подгрупп $Q(f) = \{g_1, \ldots, g_\ell\}$, $g_i \cap g_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Пусть G_i – подграф G, состоящий из g_i и ее дочерних вершин (подмножеств g_i). Любая вершина $h \neq f$ принадлежит одному из подграфов G_i, $i = \overline{1, \ell}$, так как f – единственная тупиковая вершина. Если $g \in G_i$, $h \in G_j$, $i \neq j$, то $(g, h) \notin E$, иначе $g \subset g_i \cap g_j = \varnothing$.

По предположению G_i – дерево с корнем в g_i. Следовательно, G состоит из f, в которую идут ребра из корней ℓ независимых деревьев, т.е. G – дерево с корнем в f.

3. Стоимость организации системы. Оптимальная организация

По определению 2 в неэлементарную вершину g графа организации входят ребра из $Q(g) = \{g_1, \ldots, g_k\}$, $k \geq 2$, $g = g_1 \cup \ldots \cup g_k$. Для $i = \overline{1, k}$ $g_i \not\subset g_1 \cup \ldots \cup g_{i-1} \cup g_{i+1} \cup \cup \ldots \cup g_k$. Произвольный набор подгрупп, удовлетворяющий указанным выше условиям, назовем допустимым. Совместная работа подгрупп $g_1, \ldots, g_k$ в группе g требует затрат на координацию действий подгрупп в группе (управление), учет результатов, прочие накладные расходы.

Рассмотрим допустимый набор $g_1, \ldots, g_k$. Считаем, что стоимость организации совместной работы подгрупп $g_1, \ldots, g_k \in F$ в группе $g = g_1 \cup \ldots \cup g_k$ в течение единицы времени определяется функционалом стоимости организации $P(g_1, \ldots, g_k) \geq 0$, заданным на всех допустимых наборах подгрупп и не изменяющимся при перестановке аргументов.

Произвольной вершине $g \in V \setminus \{a_1\}, \ldots, \{a_n\}$ графа организации $G = (V, E)$ поставим в соответствие стоимость ее организации из подгрупп $Q(g)$ (пометку) $R(g) = P(g_1, \ldots, g_k)$, где $\{g_1, \ldots, g_k\} = Q(g)$. Функционал стоимости определен на таком наборе подгрупп в силу его допустимости.

Определение 9. Стоимостью функционирования организации G назовем величину $P(G) = \sum\limits_{g\in V\setminus\{a_1\},\ldots,\{a_n\}} R(g) + \sum\limits_{a\in A} p(a)$. Организацию G^* групп $f_1, \ldots, f_m$ назовем оптимальной, если $P(G^*) = \min P(G)$, где минимум берется по всем возможным организациям групп $f_1, \ldots, f_m$.

Определение 10. Задачей об оптимальной организации назовем задачу поиска одной из оптимальных организаций.

Стоимость функционирования (или просто стоимость) организации представляет собой сумму затрат на организацию совместной работы исполнителей в группах и на содержание исполнителей (последние не зависят от G и увеличивают стоимость всех организаций на константу). Оптимальная организация минимизирует стоимость функционирования системы.

Определение 11. Функционал стоимости назовем монотонным, если для любого допустимого набора подгрупп $\{g_1, \ldots, g_k\}$ выполнены следующие условия:

а) $P(g_1, \ldots, g_k) \le P(g_1, \ldots, g_k, g)$, где g – произвольная подгруппа, при которой набор $\{g_1, \ldots, g_k, g\}$ допустим.

б) $P(g_1, \ldots, g_k) \le P(g_1, \ldots, g_{i-1}, g_{i+1}, \ldots, g_k)$ для любого $i = \overline{1,k}$ и подгруппы g такой, что $g_i \subset g$ и набор $\{g_1, \ldots, g_{i-1}, g, g_{i+1}, \ldots, g_k\}$ допустим.

Таким образом, при монотонном функционале добавление еще одной подгруппы или расширение одной из подгрупп не приводит к уменьшению стоимости организации.

Теорема 1. При монотонном функционале стоимости оптимальная организация одной группы f существует в классе деревьев с корнем в f.

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ – оптимальная организация группы f. Удалим отличные от f тупиковые вершины, оптимальность при этом сохранится. Построим оптимальную организацию G^* группы f, в которой из каждой вершины $g \in V \setminus \{f\}$ выходит ровно одно ребро.

Пусть $g \in V$ – вершина наибольшей мощности, из которой выходит по крайней мере два ребра: одно в h_1, другое в ℓ_1. Из h_1 и ℓ_1 существуют пути в f (других тупиковых вершин нет), т.е. из g существуют два пути в f. Обозначим их отрезки до первого пересечения через $g - h_1 - h_2 - \ldots - h_{n_1}$, $g - \ell_1 - \ell_2 - \ldots - \ell_{n_2}$, где $h_{n_1} = \ell_{n_2}$. Группы $h_1, \ldots, h_{n_1-1}, \ell_1, \ldots, \ell_{n_2-1}$ имеют более высокую мощность, чем g, следовательно (по определению g), из них выходит ровно одно ребро в следующую вершину пути.

Для любого ребра $(\ell, h) \in E$ назовем (ℓ, h)-упрощением следующее перестроение. Обозначим $h' = \bigcup\limits_{h''\in Q(h)\setminus\{\ell\}} h''$. Если $h' \in V$ (в частности, при $|Q(h)| = 2$), то уберем h и входящие ребра. Если $h' \notin V$, то уберем ребро (ℓ, h). При этом h изменится на h' (группа h' может быть организована из набора $Q(h) \setminus \{\ell\}$ в силу его допустимости). Результатом (ℓ, h)-упрощения назовем вершину h'. Очевидно, что $h \setminus h' \subseteq \ell$. В силу монотонности функционала (ℓ, h)-упрощение не увеличивает стоимость графа.

Проведем (g, ℓ_1)-упрощение, результат обозначим через ℓ_1'. Стоимость графа не возросла. Имеем $\ell_1 \setminus \ell_1' \subseteq g$. Из ℓ_1 выходило ребро (ℓ_1, ℓ_2). Обозначим $\ell_2' = \bigcup\limits_{h\in(Q(\ell_2)\setminus\{\ell_1\})\cup\{\ell_1'\}} h$. Если $\ell_2' = \ell_2$, то получили организацию G' группы f. Иначе продолжаем перестроение.

Если $\ell_2' \in V$, то убираем ℓ_2 и входящие в нее ребра. Иначе, если $\ell_1' \subseteq \bigcup\limits_{h\in Q(\ell_2)\setminus\{\ell_1\}} h$, то проводим (ℓ_1, ℓ_2)-упрощение; в противном случае ℓ_2' организуется из допустимого набора $(Q(\ell_2)\setminus\{\ell_1\})\cup\{\ell_1'\}$. В результате во всех случаях вместо ℓ_2 будет организована ℓ'_2, причем в силу монотонности функционала стоимость графа не возрастет. Имеем $\ell_2 \setminus \ell'_2 \subseteq \ell_1 \setminus \ell'_1 \subseteq g$.

Если $\ell'_2 \neq \ell_2$, то аналогичным образом (с точностью до замены ℓ_1 на ℓ_2, ℓ_2 на ℓ_3) перестраиваем граф без увеличения стоимости. Вместо ℓ_3 будет организована ℓ'_3, $\ell_3 \setminus \ell'_3 \subseteq g$. И так далее. Если ℓ_{n_2-1} будет заменена на $\ell'_{n_2-1} \neq \ell_{n_2-1}$, то в силу $\ell_{n_2-1} \setminus \ell'_{n_2-1} \subseteq g$, $g \subseteq h_{n_1-1} \in Q(\ell_{n_2}) \setminus \{\ell_{n_2-1}\}$ имеем $\ell'_{n_2} = \ell_{n_2}$. Т.е. на некотором шаге получим организацию G' группы f, $P(G') \leq P(G)$.

Удаляем отличные от f тупиковые вершины G'. Если g не будет удалена и из нее выходит более одного ребра, то проделываем аналогичную операцию с графом G' вместо G. В результате либо удалим g, либо из g будет выходить ровно одно ребро.

Если в полученном графе есть вершины, из которых выходит более одного ребра, то проделываем описанные выше действия. При перестроениях ребра не добавляются. В результате получим искомую организацию $G^* = (V^*, E^*)$. Из каждой элементарной группы $\{a\} \subseteq f$ в G^* существует ровно один путь в f. Для любой неэлементарной $g \in V^*$ и любых $g_1, g_2 \in Q(g)$ выполнено $g_1 \cap g_2 = \varnothing$, иначе из группы $\{a\} \subseteq g_1 \cap g_2$ существовали бы два пути в f. Таким образом, G^* – оптимальная организация без пересечений и отличных от f тупиковых вершин. Из утверждения 1 следует, что G^* – дерево с корнем в f.

Определение 12. Функционал P назовем выпуклым, если для любого допустимого набора групп $\{f_1, \ldots, f_k\}$, $k \geq 3$ существует поднабор $\{g_1, \ldots, g_r\} \subset \subset \{f_1, \ldots, f_k\}$, $2 \leq r < k$, для которого выполнено неравенство:

a) $$P(f_1, \ldots, f_k) \geq P(g_1, \ldots, g_r) + P(g, h_1, \ldots, h_{k-r}),$$

где $g = g_1 \cup \ldots \cup g_r$, $\{h_1, \ldots, h_{k-r}\} = \{f_1, \ldots, f_k\} \setminus \{g_1, \ldots, g_r\}$. Функционал P назовем вогнутым, если не существует поднабора $\{g_1, \ldots, g_r\}$, для которого неравенство a) выполнено строго, т.е. для любого поднабора $\{g_1, \ldots, g_r\} \subset \{f_1, \ldots, f_k\}$, $2 \leq r < k$ выполнено неравенство:

b) $$P(f_1, \ldots, f_k) \leq P(g_1, \ldots, g_r) + P(g, h_1, \ldots, h_{k-r}).$$

При выпуклом функционале вместо организации подгрупп $f_1, \ldots, f_k$ в группу $f = f_1 \cup \ldots \cup f_k$ можно, не увеличивая стоимость, сначала организовать некоторые подгруппы из $f_1, \ldots, f_k$, а затем полученную группу организовать с оставшимися подгруппами из $f_1, \ldots, f_k$. При вогнутом функционале уменьшить стоимость таким образом нельзя.

В силу допустимости набора $\{f_1, \ldots, f_k\}$ и условия $2 \leq r < k$ наборы $\{g_1, \ldots, g_r\}$ и $\{g, h_1, \ldots, h_{k-r}\}$ допустимы, т.е. определение корректно. Определить выпуклость (вогнутость) на множестве наборов (частичную выпуклость, вогнутость) можно следующим образом.

Определение 13. Пусть задано некоторое множество допустимых наборов групп. Если для любого набора множества выполнено неравенство a) определения 12, то функционал P назовем выпуклым на данном множестве, если неравенство b) – вогнутым.

Теорема 2. При выпуклом функционале стоимости оптимальная организация существует в классе 2-организаций.

Доказательство. Рассмотрим оптимальную организацию $G = (V, E)$. Пусть $k = \max |Q(g)|$, где максимум берется по всем неэлементарным вершинам G. Если $k = 2$, то найдена оптимальная 2-организация.

Пусть $k \geq 3$. Найдется $f \in V$, для которой $Q(f) = \{f_1, \ldots, f_k\}$. В силу выпуклости функционала существует поднабор $\{g_1, \ldots, g_r\} \subset \{f_1, \ldots, f_k\}$, $2 \leq r < k$, для которого $P(f_1, \ldots, f_k) \geq P(g_1, \ldots, g_r) + P(g, h_1, \ldots, h_{k-r})$, где $\{h_1, \ldots, h_{k-r}\} =$

$= \{f_1, \dots, f_k\} \setminus \{g_1, \dots, g_r\}$, $g = g_1 \cup \dots \cup g_r$. Перестроим G. Если $g \notin V$, то добавим g, организовав ее из $g_1, \dots, g_r$. Изменим входящие в f ребра так, чтобы $Q(f) = \{g, h_1, \dots, h_{k-r}\}$. В силу допустимости наборов $\{g_1, \dots, g_r\}$, $\{g, h_1, \dots, h_{k-r}\}$ перестроение возможно (при $\{g_1, \dots, g_r\} = \{f_1, \dots, f_r\}$ оно изображено на рис. 2). Полученный граф G' – граф организации тех же групп, что и G, при этом $P(G') \le P(G)$.

Имеем $|Q'(f)| = k - r + 1 < k$, $|Q'(g)| = r < k$. Т.е. в f и g входит менее k ребер. Число вершин, в которые входит k ребер, уменьшилось на единицу. Проделывая аналогичные перестроения, получим в итоге оптимальную организацию, для которой $k_1 = \max |Q(g)| < k$. Если $k_1 > 2$, то повторим рассуждения. В результате придем к оптимальной 2-организации.

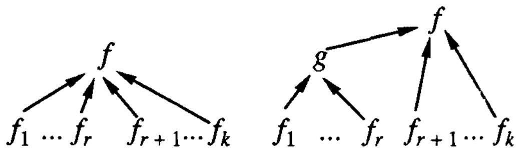

Рис. 2. Перестроение оптимального графа при выпуклом функционале.

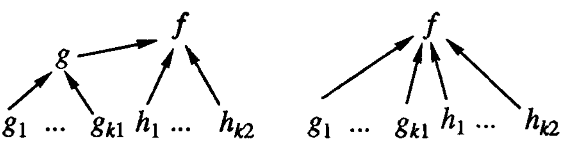

Рис. 3. Перестроение оптимального дерева при вогнутом функционале.

Следствие. При монотонном выпуклом на наборах непересекающихся групп функционале стоимости оптимальная организация одной группы f существует в классе 2-деревьев с корнем в f.

Доказательство. По теореме 1 существует оптимальное дерево организации с корнем в f. Возьмем его в качестве графа G при доказательстве теоремы 2. Для любой вершины $f \in V$ набор $Q(f) = \{f_1, \dots, f_k\}$ не содержит пересекающихся групп. Следовательно, для перестроения G достаточно выпуклости на наборах непересекающихся групп. После перестроения получим дерево с корнем в f, что позволяет продолжить рассуждения.

Теорема 3. При монотонном вогнутом на наборах непересекающихся групп функционале стоимости одновременная организация одной группы оптимальна.

Доказательство. По теореме 1 существует оптимальное дерево $G = (V, E)$ организации одной группы f. Если G не содержит промежуточных вершин, то G – одновременная организация. В противном случае рассмотрим промежуточную вершину $g \in V$ наибольшей мощности. Пусть $Q(g) = \{g_1, \dots, g_{k_1}\}$. Из g выходит ровно одно ребро в f. Пусть $Q(f) = \{g, h_1, \dots, h_{k_2}\}$. В наборе $Q'(f) = \{g_1, \dots, g_{k_1}, h_1, \dots, h_{k_2}\}$ нет пересекающихся групп (G – дерево). Т.е. $Q'(f)$ допустим и на нем функционал вогнут: $P(g_1, \dots, g_{k_1}, h_1, \dots, h_{k_2}) \le P(g_1, \dots, g_{k_1}) + P(g, h_1, \dots, h_{k_2})$. Удалим g, а f организуем из набора $Q'(f)$ (см. рис. 3).

Получим оптимальное дерево организации группы f, которое содержит на одну промежуточную вершину меньше, чем G. Продолжая такие действия, докажем оптимальность одновременной организации одной группы.

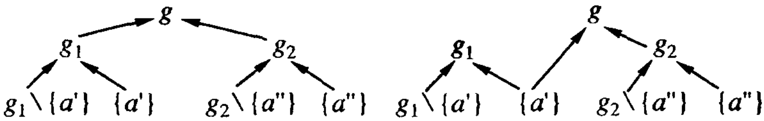

Рис. 4. Первый вариант перестроения при существенно выпуклом функционале.

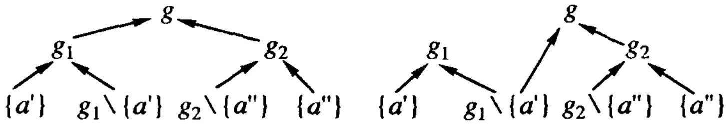

Рис. 5. Второй вариант перестроения при существенно выпуклом функционале.

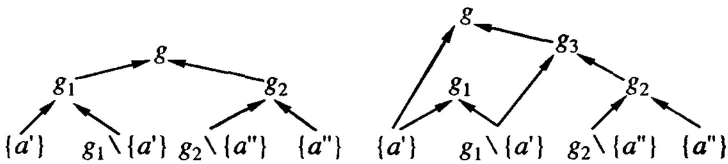

Рис. 6. Третий вариант перестроения при существенно выпуклом функционале.

Определение 14. Функционал стоимости назовем существенно выпуклым, если он выпуклый и для любого допустимого набора неэлементарных групп $\{g_1, g_2\}$ выполнено по крайней мере одно из двух условий:

a) для любого $a \in g_1$: $P(g_1, g_2) \geq P(g_1 \setminus \{a\}, g_2) + P((g_1 \setminus \{a\}) \cup g_2, \{a\})$,

b) для любого $a \in g_2$: $P(g_1, g_2) \geq P(g_1, g_2 \setminus \{a\}) + P(g_1 \cup (g_2 \setminus \{a\}), \{a\})$,

причем функционал считается равным нулю, если соответствующий набор недопустим.

Т.е. функционал существенно выпуклый, если при организации двух подгрупп можно из одной удалить произвольного исполнителя, а затем организовать его с полученной группой, не увеличивая стоимости.

Теорема 4. При существенно выпуклом функционале стоимости оптимальная организация существует в классе последовательных организаций.

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ – оптимальная 2-организация, которая существует в силу теоремы 2. Будем называть вершину графа G неправильной, если она организуется из двух неэлементарных групп. В противном случае будем называть ее правильной. Если в графе G нет неправильных вершин, то G – последовательная организация. В противном случае построим оптимальную 2-организацию G^*, число неправильных вершин которой на одну меньше, чем в G. Тогда, проделав такую операцию нужное число раз, придем к оптимальной последовательной организации.

Пусть g – такая неправильная вершина, все дочерние вершины которой правильные. Пусть $Q(g) = \{g_1, g_2\}$. Тогда g_1 и g_2 – неэлементарные правильные вершины, и, следовательно, $Q(g_1) = \{g_1 \setminus \{a'\}, \{a'\}\}$, $Q(g_2) = \{g_2 \setminus \{a''\}, \{a''\}\}$. Функционал существенно выпуклый. Пусть выполнено условие a) определения 14.

Если набор $\{g_1 \setminus \{a'\}, g_2\}$ недопустим, то $(g_1 \setminus \{a'\}) \subset g_2$, и, следовательно, $g_2 \cup \cup\{a'\} = g$, $\{a'\} \not\subset g_2$. Организуем g из g_2 и $\{a'\}$ (см. рис. 4). Выполнено $(g_1 \setminus \{a'\}) \cup g_2 = = g_2$, неравенство а) имеет вид: $P(g_1, g_2) \geq P(g_2, \{a'\})$. Получим последовательную организацию G', $P(G') \leq P(G)$.

Если набор $\{g_1 \setminus \{a'\}, g_2\}$ допустим, то добавим вершину $g_3 = (g_1 \setminus \{a'\}) \cup g_2$, организовав ее из $g_1 \setminus \{a'\}$ и g_2. Если при этом $\{a'\} \subset g_3$, то $g_3 = g$. Получим последовательную организацию G' (см. рис. 5). В силу недопустимости $\{(g_1 \setminus \{a'\}) \cup g_2, \{a'\}\}$ неравенство а) имеет вид: $P(g_1, g_2) \geq P(g_1 \setminus \{a'\}, g_2)$. Следовательно, $P(G') \leq P(G)$.

Если $\{a'\} \not\subset g_3$, то организуем g из $\{a'\}$ и g_3. Получим последовательную организацию G' (см. рис. 6). В силу $P(g_1, g_2) \geq P(g_1 \setminus \{a'\}, g_2) + P(g_3, \{a\})$ имеем $P(G') \leq P(G)$.

Если выполнено условие б) определения 14, то рассуждаем аналогично, заменяя g_1 на g_2 и $\{a'\}$ на $\{a''\}$. Итак, во всех случаях получили оптимальную последовательную организацию G', в которой g правильна. Если G' не содержит g_3 или g_3 правильна, то в G' на одну неправильную вершину меньше, чем в G, т.е. искомая организация G^* построена.

Пусть G' содержит неправильную вершину g_3. Мощность g_3 меньше, чем мощность g, все дочерние вершины g_3 правильные. Повторим перестроение, взяв вместо G граф G', а вместо g вершину g_3, что снова уменьшит мощность неправильной вершины. Повторяя такие действия, либо получим на очередном шаге G^*, либо дойдем до момента, когда мощность g_3 равна двум. В этом случае g_3 правильна, т.е. искомая организация G^* построена.

4. Примеры функционалов стоимости

Предположим, что заданы сложности единиц элементарной работы $c_1^e \geq 0, \ldots \ldots, c_r^e \geq 0$ (например, средние трудозатраты) – безразмерные сравнимые показатели.

Определение 15. Сложность (потенциал) $C(a)$ исполнителя a определим как максимум сложности элементарной работы, которую a способен выполнить за единицу времени: $C(a) = \max(c_1^e s_1(a), \ldots, c_r^e s_r(a))$. Сложностью (потенциалом) группы f назовем величину $C(f) = \left(\sum\limits_{a \in f} C(a)^{1/\alpha}\right)^{\alpha}$, где $\alpha \in (0, +\infty)$.

При $\alpha = 1$ сложность группы равна сумме сложностей составляющих ее исполнителей, при $\alpha > 1$ – больше этой суммы, при $\alpha < 1$ – меньше. Стоимость организации подгрупп зависит от некоторых их характеристик, например от сложностей. Исходя из возможных содержательных интерпретаций, в [2] были предложены следующие варианты функционала стоимости:

$$(1) \qquad P(g_1, \ldots, g_k) = \left[C(g_1) + \ldots + C(g_k) - \max(C(g_1), \ldots, C(g_k))\right]^{\beta};$$

$$(2) \qquad P(g_1, \ldots, g_k) = \left[C(g_1) + \ldots + C(g_k)\right]^{\beta};$$

$$(3) \qquad P(g_1, \ldots, g_k) = \frac{C(g)}{\max(C(g_1), \ldots, C(g_k))} - 1;$$

$$(4) \qquad P(g_1, \ldots, g_k) = \sum_{i=\overline{1,k}} (C(g) - C(g_i)),$$

где группа $g = g_1 \cup \ldots \cup g_k$ организуется из подгрупп $g_1, \ldots, g_k$, $\beta \in (0; +\infty)$.

Очевидно, что функционалы (1), (2) монотонны, а функционалы (3), (4) не монотонны. Для доказательства следующих утверждений используются неравенства, которые легко доказываются индукцией по n:

(5) $(x_1+\ldots+x_n)^z \ge x_1^z+\ldots+x_n^z$ для любых $x_1\ge 0,\ldots,x_n\ge 0$ при $z\ge 1$,

(6) $(x_1+\ldots+x_n)^z \le x_1^z+\ldots+x_n^z$ для любых $x_1\ge 0,\ldots,x_n\ge 0$ при $z\le 1$.

Утверждение 2. Функционал (1) *при* $\beta\le 1$ *– вогнутый, при* $\beta\ge 1$ *– выпуклый, при* $\beta\ge 1$ *и* $\alpha\beta\ge 1$ *– существенно выпуклый.*

Доказательство. Рассмотрим допустимый набор $\{f_1,\ldots,f_k\}$ и произвольный поднабор $\{g_1,\ldots,g_r\}\subset\{f_1,\ldots,f_k\}$, $2\le r<k$. Пусть $\{h_1,\ldots,h_{k-r}\}=\{f_1,\ldots,f_k\}\setminus\{g_1,\ldots,g_r\}$; $g=g_1\cup\ldots\cup g_r$; $x_i=C(g_i)$, $i=\overline{1,r}$; $y_j=C(h_j)$, $j=\overline{1,k-r}$; $x=\max(x_i)$; $y=\max(y_j)$. Обозначим через P_1 левую, через P_2 – правую часть в неравенствах определения 12: $P_1=(X+Y-\max(x,y))^\beta$, $P_2=(X-x)^\beta+(C(g)+Y-\max(y,C(g)))^\beta$, где $X=x_1+\ldots+x_r$, $Y=y_1+\ldots+y_{k-r}$. При $\beta\le 1$ в силу (6) $P_2\ge(X+Y+C(g)-x-\max(y,C(g)))^\beta$. Для доказательства неравенства $P_1\le P_2$ осталось показать, что $x+\max(y,C(g))\le C(g)+\max(x,y)$. При $y\le C(g)$ неравенство, очевидно, выполнено. При $y>C(g)$ неравенство перепишется в виде $x+y\le C(g)+\max(x,y)$, что выполнено в силу $x\le C(g)$. Таким образом, при $\beta\le 1$ выполнено $P_1\le P_2$, т.е. функционал (1) – вогнутый.

Пусть $\beta\ge 1$. Обозначим $x_i=C(f_i)$, $i=\overline{1,k}$. Без ограничения общности считаем $x_1=\max(x_1,\ldots,x_k)$. Положим $\{g_1,g_2\}=\{f_1,f_2\}$, $\{h_1,\ldots,h_{k-2}\}=\{f_3,\ldots,f_k\}$. Имеем: $P_1=(x_2+\ldots+x_k)^\beta$, $P_2=x_2^\beta+(x_3+\ldots+x_k)^\beta$. В силу (5) при $\beta\ge 1$ выполнено $P_1\ge P_2$, т.е. неравенство a) определения 12, следовательно, функционал (1) – выпуклый.

Пусть $\beta\ge 1$ и $\alpha\beta\ge 1$. Рассмотрим допустимый набор неэлементарных групп $\{g_1,g_2\}$.

Пусть $C(g_1)\le C(g_2)$. Обозначим через P_1 левую, через P_2 – правую часть в неравенстве a) определения 14: $P_1=P(g_1,g_2)$; для $a\in g_1$ $P_2=P(g_1\setminus\{a\},g_2)+P((g_1\setminus\{a\})\cup g_2,\{a\})$. Если $g_1\setminus\{a\}\subset g_2$, то $P_2=P(g_2,\{a\})$. Если $g_1\setminus\{a\}\not\subset g_2$, но $\{a\}\subset g_2$, то $P_2=P(g_1\setminus\{a\},g_2)$. В обоих случаях $P_1\ge P_2$ в силу монотонности (1). Если $g_1\setminus\{a\}\not\subset g_2$, $\{a\}\not\subset g_2$, то обозначим $x=C(g_1)$, $y=C(g_1\setminus\{a\})$, $z=C(\{a\})$. Имеем: $P_1=x^\beta$, $P_2=y^\beta+z^\beta$. Неравенство $P_1\ge P_2$ с учетом $x=(y^{1/\alpha}+z^{1/\alpha})^\alpha$ имеет вид: $(y^{1/\alpha}+z^{1/\alpha})^{\alpha\beta}\ge(y^{1/\alpha})^{\alpha\beta}+(z^{1/\alpha})^{\alpha\beta}$. Последнее выполнено в силу (5) при $\alpha\beta\ge 1$. В случае $C(g_1)\ge C(g_2)$ выполнение неравенства b) определения 14 доказывается аналогично с точностью до замены g_1 на g_2. Следовательно, функционал (1) при $\beta\ge 1$ и $\alpha\beta\ge 1$ – существенно выпуклый.

Утверждение 3. Функционал (2) *при* $\beta\le 1$ *вогнут, при* $\beta>1$ *и* $\alpha\ge 1$ *вогнут на наборах непересекающихся групп.*

Доказательство. Рассмотрим допустимый набор $\{f_1,\ldots,f_k\}$ и произвольный поднабор $\{g_1,\ldots,g_r\}\subset\{f_1,\ldots,f_k\}$, $2\le r<k$. Пусть $\{h_1,\ldots,h_{k-r}\}=\{f_1,\ldots,f_k\}\setminus\{g_1,\ldots,g_r\}$, $g=g_1\cup\ldots\cup g_r$. Положим $X=C(g_1)+\ldots+C(g_r)$, $Y=C(y_1)+\ldots+C(y_{k-r})$. Обозначим через P_1 левую, через P_2 – правую часть в неравенствах определения 12: $P_1=(X+Y)^\beta$, $P_2=X^\beta+(C(g)+Y)^\beta$. При $\beta\le 1$ в силу (6): $P_1\le X^\beta+Y^\beta\le P_2$. Если среди $g_1,\ldots,g_r$ нет пересекающихся групп, то $C(g)=(C(g_1)^{1/\alpha}+\ldots+C(g_r)^{1/\alpha})^\alpha$. При $\alpha\ge 1$ в силу (5): $C(g)\ge X$, следовательно, $P_2\ge(X+Y)^\beta=P_1$, что и доказывает утверждение.

Утверждение 4. Функционал (3) *– существенно выпуклый.*

Доказательство. Сначала докажем выпуклость. Рассмотрим допустимый набор $\{f_1,\ldots,f_k\}$ и поднаборы $\{g_1,g_2\}=\{f_1,f_2\}$, $\{h_1,\ldots,h_{k-2}\}=\{f_3,\ldots,f_k\}$. Без ограничения общности считаем $C(f_1) = \max(C(f_1), \ldots, C(f_k))$. Обозначим $x = C(f_1 \cup \ldots \cup f_k)$; $y = C(g)$, где $g = g_1 \cup g_2$; $z = C(f_1)$; P_1, P_2 – соответственно левая и правая части в неравенстве a) определения 12. Тогда $z \leq y \leq x$, $P_1 = x/z - 1$, $P_2 = y/z - 1 + x/y - 1$ и можно записать:

$$P_1 - P_2 = x/z - 1 - y/z + 1 - x/y + 1 = (xy + yz - y^2 - xz)/yz.$$

Обозначим $\xi(x) = xy + yz - y^2 - xz$. Продифференцируем: $\xi'(x) = y - z \geq 0$ в силу $y \geq z$. Далее $\xi(y) = y^2 + yz - y^2 - yz = 0$, следовательно, для всех $x \geq y$ выполняется $\xi(x) \geq 0$, т.е. $P_1 \geq P_2$. Таким образом, функционал (3) выпуклый.

Рассмотрим допустимый набор неэлементарных групп $\{g_1, g_2\}$. Пусть $C(g_1) \leq C(g_2)$. Обозначим $x = C(g_1 \cup g_2)$; $z = C(g_2)$; P_1, P_2 – соответственно левая и правая части неравенства a) определения 14. Имеем $P_1 = P(g_1, g_2) = x/z - 1$. Рассмотрим $a \in g_1$, тогда $P_2 = P(g_1 \setminus \{a\}, g_2) + P((g_1 \setminus \{a\}) \cup g_2, \{a\})$. Если $g_1 \setminus \{a\} \subset g_2$, то $P_2 = P(g_2, \{a\}) = P_1$. Если $g_1 \setminus \{a\} \not\subset g_2$, но $\{a\} \subset g_2$, то $P_2 = P(g_1 \setminus \{a\}, g_2) = P_1$. Если $g_1 \setminus \{a\} \not\subset g_2$, $\{a\} \not\subset g_2$, то обозначим $y = C((g_1 \setminus \{a\}) \cup g_2)$. Имеем: $P_2 = y/z - 1 + x/y - 1$. Выше было показано, что $P_1 \geq P_2$. В случае $C(g_1) \geq C(g_2)$ выполнение неравенства b) определения 14 доказывается аналогично с точностью до замены g_1 на g_2. Следовательно, функционал (3) – существенно выпуклый.

Утверждение 5. Функционал (4) – *выпуклый.*

Доказательство. Рассмотрим допустимый набор $\{f_1, \ldots, f_k\}$ и поднаборы $\{g_1, g_2\} = \{f_1, f_2\}$, $\{h_1, \ldots, h_{k-2}\} = \{f_3, \ldots, f_k\}$. Обозначим $g = g_1 \cup g_2$; $y = C(g)$; $x_i = C(f_i)$, $i = \overline{1,k}$; $x = C(f_1 \cup \ldots \cup f_k)$; P_1, P_2 – соответственно левая и правая части в неравенстве a) определения 12. Тогда $P_1 = kx - \sum_{i=\overline{1,k}} x_i$, $P_2 = 2y - x_1 - x_2 + (k-1)x - y - \sum_{i=\overline{3,k}} x_i$, $P_1 - P_2 = x - y \geq 0$. Таким образом, функционал (4) – выпуклый.

5. Управление организационной системой

В ответ на изменения внешней среды в системе могут происходить структурные изменения, требующие затрат на реорганизацию. В [3] определена стоимость реорганизации $\rho(G', G'')$ графа G' в граф G'', т.е. стоимость перестроения организации G' в организацию G'' (в частности, стоимость $\rho(\varnothing, G)$ создания организации G "с нуля"). Стоимость реорганизации вычисляется на основании известных величин: $\rho'(a, g)$ – стоимость исключения исполнителя a из произвольной группы g, $a \in g$; $\rho''(a, g)$ – стоимость включения исполнителя в произвольную группу g, $a \notin g$. Тогда G' реорганизуется в G'' путем последовательного исключения и включения исполнителей. Стоимость реорганизации $\rho(G', G'')$ равна минимальной суммарной стоимости всех исключений и включений (подробнее см. [3]). Если положить $\rho''(a, g) = C(a)$, то получим сложность $C(G) = \rho(\varnothing, G)$ организации G. Ниже рассмотрено понятие управления, от которого зависит суммарная прибыль на отрезке $\overline{1,T}$.

Считаем неизменным функционал стоимости P. Совокупность указанных во введении неизменных параметров внешней среды $I_1, \ldots, I_q$, $e_1, \ldots, e_r$, W и функционала P обозначим через E. Изменяющимися параметрами внешней среды, известными к началу единицы времени t, $t = \overline{1,T}$, являются: поведение рынка труда $\widetilde{\mathbf{A}}^t = \left\{\widetilde{A}^t, \ldots, \widetilde{A}^{t-1}\right\}$ в предшествующие периоды времени, колебания цен и объема спроса $\mathbf{p}^t = \{\mathbf{p}^1, \ldots, \mathbf{p}^t\}$, $\mathbf{v}^t = \{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^t\}$.

К началу момента t, $t = \overline{1,T}$ система располагает множеством A^{t-1} исполнителей, организованных с помощью графа G^{t-1}. Если исследуемый интервал T жестко задан, то положим $G^0 = (\varnothing, \varnothing)$ – пустой граф (начальную организацию необходимо создать "с нуля"). Если же исследуется потенциально бесконечный интервал (T много больше периода колебаний внешней среды), то положим $G^0 = G^1$ (начальная организация уже создана).

Определение 16. *Корректным набором управляемых параметров для единицы времени t, $t = \overline{1,T}$ назовем: набор исполнителей $A^t \subseteq A^{t-1} \cup \widetilde{A}^{t-1}$; корректные планы $\mathbf{y}^t$, $\mathbf{x}^t(a)$ для всех $a \in A^t$; корректный набор групп $\mathbf{f}^t$; граф организации G^t групп набора $\mathbf{f}^t$.*

Управляя системой, необходимо к началу единицы времени определить корректный набор управляемых параметров исходя из информации о внешней среде E, $\widetilde{\mathbf{A}}^t$, $\mathbf{p}^t$, $\mathbf{v}^t$, имеющейся структуры G^{t-1} и исполнителей A^{t-1}, момента t и длины исследуемого отрезка T.

Определение 17. *Управлением организационной системой назовем произвольное отображение $\Psi(E, \widetilde{\mathbf{A}}^t, \mathbf{p}^t, \mathbf{v}^t, A^{t-1}, G^{t-1}, t, T)$ своих аргументов в корректный набор управляемых параметров.*

Определение 18. *Результатом управления системой назовем величину:*

$$R\left(E, \widetilde{\mathbf{A}}^T, \mathbf{p}^T, \mathbf{v}^T, \Psi\right) = \frac{1}{T} \sum_{t=\overline{1,T}} \left[(\mathbf{p}^t, \mathbf{y}^t) - P(G^t) - \rho(G^{t-1}, G^t)\right],$$

где $(\mathbf{p}^t, \mathbf{v}^t)$ – суммарная выручка системы за единицу времени t, $\rho(G^{t-1}, G^t)$ – затраты на реорганизацию структуры G^{t-1} в G^t, $P(G^t)$ – затраты на функционирование системы со структурой G^t в течение единицы времени.

Результат управления системой – средняя прибыль на отрезке времени $\overline{1,T}$ – зависит от самого управления Ψ и от изменения параметров внешней среды E, $\widetilde{\mathbf{A}}^T$, $\mathbf{p}^T$, $\mathbf{v}^T$.

Определение 19. *Оптимальным управлением назовем управление:*

$$\Psi = \arg\max R\left(E, \widetilde{\mathbf{A}}^T, \mathbf{p}^T, \mathbf{v}^T, \Psi'\right),$$

где максимум берется по всем управлениям Ψ'.

Если некоторые из траекторий $\widetilde{\mathbf{A}}^T, \mathbf{p}^T, \mathbf{v}^T$ параметров внешней среды неизвестны, но известно их вероятностное распределение, то переопределим оптимальное управление.

Определение 20. *Оптимальным в среднем управлением назовем управление:*

$$\Psi = \arg\max \overline{R}\left(E, \widetilde{\mathbf{A}}^T, \mathbf{p}^T, \mathbf{v}^T, \Psi'\right),$$

где математическое ожидание берется по тем параметрам внешней среды, для которых известно лишь вероятностное распределение, максимум берется по всем управлениям Ψ'.

Задача об оптимальном управлении представляется весьма сложной для аналитического решения. Однако, если управление эффективно вычисляется, то результат управления системой при заданной траектории параметров внешней среды также может быть эффективно вычислен. Результат управления в среднем можно заменить выборочным средним. Таким образом, если рассматривается набор эффективно вычисляемых управлений, то среди них можно найти оптимальное. Если заданы дополнительные ограничения на выбор управления, то не удовлетворяющие им управления можно исключить, что приведет к условно оптимальному управлению. Например, при ограничениях на ресурс некоторые управления, приводящие в отдельные моменты к недопустимым убыткам, должны быть исключены из рассмотрения даже в случае их оптимальности. Определим некоторые виды управлений.

Определение 21. *Управление будем называть управлением с постоянным составом, если выполнено* $A_1 = A_2 = \ldots = A_T = A_0$.

Определение 22. *Управление будем называть управлением с тривиальным планированием, если корректные планы выпуска* $\mathbf{y}^t$ *и работ* $\mathbf{x}^t(a)$ *определяются исходя из максимизации "валовой прибыли"* $(\mathbf{p}^t, \mathbf{y}^t) - \sum\limits_{a \in A^t} p(a, \mathbf{x}^t(a))$ *в течение единицы времени* t.

Если затраты $p(a, \mathbf{x}^t(a))$ линейно зависят от компонент вектора плана работ $\mathbf{x}^t(a) = (x_1^t(a), \ldots, x_r^t(a))$, то с учетом линейных ограничений на $\mathbf{y}^t$, $\mathbf{x}^t(a)$ определение тривиального плана – задача линейного программирования.

Корректный набор групп $\mathbf{f}^t$ можно определить следующим образом. Выполненный исполнителем a объем $s_1(a)x_1^t(a)$ работы e_1 распределяем для выпуска первого изделия, при избытке – для второго, и т.д. Затем поступаем аналогичным образом с выполненным исполнителем a объемом работы e_2 и т.д. Распределив все работы исполнителя a по изделиям, переходим к следующему исполнителю.

Определение 23. *Управление будем называть управлением с тривиальной группировкой, если корректный набор групп определяется вышеуказанным способом.*

При комплексном исследовании модели в приведенной выше постановке возможен анализ влияния всех управляемых параметров на результат управления. Если цель исследования – управление структурными изменениями, то можно рассматривать лишь задачу выбора структуры. Например, можно дать следующее определение.

Определение 24. *Управление с постоянным составом, тривиальным планированием и группировкой назовем управлением структурой.*

Управления структурой различаются лишь выбором графов организации G^t, $t = \overline{1, T}$. Можно привести следующие примеры управления структурой.

Управление минимальной стоимости минимизирует среднюю стоимость функционирования $\left(\sum\limits_{t=\overline{1,T}} P(G^t)\right) / T$, т.е. находит оптимальную организацию при каждом $t = \overline{1, T}$. Если $\rho(G', G'') \equiv 0$, то управление структурой минимальной стоимости оптимально.

Управление минимальной сложности минимизирует среднюю сложность организации $\left(\sum\limits_{t=\overline{1,T}} C(G^t)\right) / T$. Одновременная организация имеет минимальную сложность среди всех организаций заданного набора групп (см. [3]). Следовательно, управление минимальной сложности имеет место, если все организации $G^1, \ldots, G^T$ одновременные.

6. Заключение

Построена модель, позволяющая сравнивать эффективность различных управлений структурными изменениями организационной системы. При оптимальном управлении структурой достигается наилучший баланс между средними затратами на функционирование системы $\left(\sum_{t=\overline{1,T}} P(G^t) \right) /T$ и средними затратами на реорганизацию $\left(\sum_{t=\overline{1,T}} \rho(G^{t-1}, G^t) \right) /T$ (последние определяются способностью структуры гибко реагировать на изменения внешней среды). Если стоимость реорганизации нулевая, то остается минимизировать затраты на функционирование, что достигается при управлении минимальной стоимости, для вычисления которого необходимо решить задачу об оптимальной организации.

Для существенно выпуклых функционалов существует оптимальная последовательная организация (см. теорему 4), найти которую позволяют алгоритмы, построенные в [2], т.е. доказанная теорема в сочетании с алгоритмами работы [2] исчерпывающим образом решает задачу об оптимальной организации для существенно выпуклых функционалов.

Для монотонных функционалов существует оптимальное дерево организации одной группы (см. теорему 1), найти которое позволяют алгоритмы, построенные в [4]. Если кроме монотонности функционал выпуклый на наборах непересекающихся групп, то существует оптимальное 2-дерево организации одной группы (см. следствие к теореме 2), и задача об оптимальном дереве упрощается (см. алгоритмы в [4]). Если кроме монотонности функционал вогнут на наборах непересекающихся групп, то одновременная организация одной группы оптимальна (см. теорему 3). Эти результаты в сочетании с алгоритмами работы [4] решают задачу об оптимальной организации одной группы для различных классов функционалов.

В работе приведены примеры функционалов стоимости (1)–(4). Доказана существенная выпуклость функционала (1) при $\beta \geq 1$, $\alpha\beta \geq 1$ (см. утверждение 2), функционала (3) при любых α (см. утверждение 4), что позволяет решать общую задачу об оптимальной организации. Следующие результаты решают вопрос об оптимальной организации одной группы для функционалов (1)–(3).

Для функционала (1) при $\beta \leq 1$ оптимальна одновременная организация одной группы (в силу его вогнутости, см. утверждение 2), при $\beta \geq 1$ оптимальна последовательная организация одной группы (см. [2]), которая найдена в [4]. Для функционала (2) при $\beta \leq 1$ либо при $\beta > 1$, $\alpha \geq 1$ оптимальна одновременная организация одной группы (в силу его вогнутости на наборах непересекающихся групп, см. утверждение 3), в оставшейся области найти оптимальную организацию одной группы можно с помощью алгоритмов поиска оптимального дерева (в силу монотонности (2)). Для функционала (3) оптимальна последовательная организация одной группы (в силу его существенной выпуклости, см. утверждение 4), которая найдена в [4].

Таким образом, анализ принадлежности функционала к различным классам позволяет, опираясь на теоремы 1–4, находить вид оптимальной организации, что проиллюстрировано на примерах функционалов (1)–(4) (см. утверждения 2–5).

Моделирование организационной системы позволяет анализировать влияние различных параметров внешней среды на эффективность управления структурой. Например, вычисление средней сложности организации $\left(\sum_{t=\overline{1,T}} C(G^t) \right) /T$ при различных управлениях из заданного набора позволяет проверить наблюдаемую на практике закономерность: при жестких (интенсивных) внешних изменениях оптимальна простая структура системы (одновременная организация), которая усложняется по мере смягчения внешних воздействий. Под интенсивностью внешних изменений можно понимать, например, евклидово расстояние между векторами цен $\mathbf{p}^{t-1}$, $\mathbf{p}^t$ или объемов спроса $\mathbf{v}^{t-1}$, $\mathbf{v}^t$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новиков Д.А.* Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. М.: Фонд "Проблемы управления", 1999.
2. *Воронин А.А., Мишин С.П.* Алгоритмы поиска оптимальной структуры организационной системы // АиТ. 2002. № 5. С. 120–132.
3. *Мишин С.П.* Стоимость реорганизации структуры системы // Тр. кафедры математ. анализа и теории функций Волг. ун-та. 2002. С. 178–198.
4. *Воронин А.А., Мишин С.П.* Моделирование структуры организационной системы. Об алгоритмах поиска оптимального дерева // Вестн. Волг. ун-та. 2001. Сер. 1: Математика. Физика. С. 78–98.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 18.03.2002