УДК 519.854.2

© 1995 г. В.Н. БУРКОВ, д-р техн. наук,
С.И. ДЗЮБКО, канд. техн. наук
(Институт проблем управления РАН, Москва),
А.А. ЯГУПОВ
(АО "Руссинко", Москва)

ЭФФЕКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОДНОГО ЧАСТНОГО СЛУЧАЯ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ О КАМНЯХ

Рассматривается эффективный метод решения частного случая классической "задачи о камнях". Задача заключается в распределении n различных объектов (камней) на m групп (куч) так, чтобы суммарные объемы всех групп были по возможности равны. Рассматривается случай, когда объемы упорядочены так, что объем j-го объекта описывается многочленом степени α. Предлагается алгоритм решения для случая $n \equiv 0 \pmod{2m^\alpha}$ с оценкой времени счета $O(n)$. Рассматривается также ряд обобщений этой задачи.

Введение

В работе рассматривается одна из классических задач теории расписаний и дискретного программирования, так называемая "задача о камнях", имеющая многочисленные приложения в программировании, исследовании операций и управлении [1, 2].

Предлагаемый в настоящей работе алгоритм может быть полезен при оптимальном планировании работ одинаковых единиц оборудования, вычислительных средств при решении задач упаковки периодически повторяющихся партий различных по объему изделий в одинаковые контейнеры, а также при решении любых других задач, обладающих свойствами, необходимыми для применения предлагаемого алгоритма.

1. Постановка задачи

Формально задача представляет собой следующее: есть n различных объектов (камней) и задано множество их объемов $\{v_j\}$, $j = \overline{1,n}$. Необходимо распределить всю совокупность камней на m частей (куч) так, чтобы суммарные объемы всех частей были по возможности равны. Сложность задачи определяется ее дискретным характером (камни нельзя дробить), т.е. необходимо определить множество переменных $\{x_{jk}\}$, $j = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,m}$, такое, что $x_{jk} = 1$, если j-й камень распределен в k-ю кучу, $x_{jk} = 0$ в противном случае. После этого имеем следующую модель:

$$(1)\qquad \begin{gathered}\prod_j \sum_k x_{jk} = 1,\\ \max_k \sum_j v_j x_{jk} \longrightarrow \min.\end{gathered}$$

Поставленная задача дискретного программирования принадлежит классу NP-полных задач, сложных с вычислительной точки зрения [1, 2]. Из [3] известно, что для каждой конкретной задачи существует такой многочлен:

$$(2)\qquad f(x) = d_\alpha x^\alpha + d_{\alpha-1} x^{\alpha-1} + \ldots + d_0,$$

что все объемы могут быть упорядочены так, что

$$(3)\qquad v_j = f(j), \quad j = \overline{1,n},$$

причем коэффициенты $d_\alpha, d_{\alpha-1}, \ldots, d_0$ могут быть любыми действительными числами, а α – целым.

Рассматриваемый далее частный случай отличается от задачи в общем случае тем, что необходимо выполнение условия

$$n \equiv 0 \pmod{2m^\alpha}. \tag{4}$$

2. Описание метода решения

Вначале рассмотрим случай, когда выполняется условие $V_j = j^\alpha$, для этого введем функцию распределения объемов $\varphi(i,k)$, где i – внутренний номер камня в куче, а k – номер кучи. В рассматриваемом случае в каждую кучу будет помещено одинаковое число камней, которое обозначим через Q. Пусть i-м камнем в k-й куче будет j-й по порядку камень, тогда $\varphi(i,k) = j$.

При $\alpha = 1$ значения функций можно определить в явном виде, а при $\alpha > 1$ индуктивно.

Для $\alpha = 1$, рассмотрим последовательность из любых $2m$ камней. Тогда имеем $Q = 2$, $V_j = j$, а в k-ю кучу попадут камни с номерами k и $2m - k + 1$. Поэтому

$$\varphi(1,k) = k,$$
$$\varphi(2,k) = 2m - k + 1.$$

Докажем, что при таком распределении суммарные объемы всех куч равны.

Действительно, согласно распределению суммарный объем k-й кучи V_k равен:

$$V_k = \varphi(1,k) + \varphi(2,k),$$

тогда имеем:

$$V_k - V_{k+1} = \sum_{i=1}^{2} \varphi(i,k) - \sum_{i=1}^{2} \varphi(i,k+1) = k + 2m - k + 1 - (k+1) - (2m-k) = 0, \tag{5}$$

и так как k произвольно, то суммарные объемы всех частей равны.

Для определения функции распределения в общем случае нам понадобится параметр u, который будет входить в виде дополнительного слагаемого в каждое слагаемое левой части. Тогда из (5) следует

$$\sum_{i=1}^{2} \left[\varphi(i,k) + u\right] - \sum_{i=1}^{2} \left[\varphi(i,k+1) + u\right] = 0$$

для любого значения u.

Из последнего равенства следует, что вид функции распределения не зависит от точки отсчета, поэтому при $n > 2m$ задачу можно решать независимо для любой последовательности из $2m$ объемов, а для точного решения достаточно выполнения условия (4).

Теперь докажем по индукции существование такой функции для любого произвольного α. Для этого предположим, что существует функция для любой целой положительной степени α, аналогичная функции для степени $\alpha = 1$, т.е. справедливо выражение

$$\sum_{i=1}^{Q} \left\{ \left[\varphi(i,k) + u\right]^\alpha - \left[\varphi(i,k+1) + u\right]^\alpha \right\} = 0, \tag{6}$$

где Q – необходимое минимальное число камней в одной куче для степени α, когда выполняется равенство (6). Из выражения (6) следует

$$\sum_{i=1}^{Q}\sum_{\beta=0}^{\alpha} C_{\alpha}^{\alpha-\beta} u^{\alpha-\beta}\left[\varphi^{\beta}(i,k)-\varphi^{\beta}(i,k+1)\right] =$$

$$= \sum_{\beta=0}^{\alpha} C_{\alpha}^{\alpha-\beta} u^{\alpha-\beta} \sum_{i=1}^{Q}\left[\varphi^{\beta}(i,k)-\varphi^{\beta}(i,k+1)\right] = 0.$$

Пусть далее

$$f(\beta) = C_{\alpha}^{\alpha-\beta}\sum_{i=1}^{Q}\left[\varphi^{\beta}(i,k)-\varphi^{\beta}(i,k+1)\right].$$

Заметим, что $f(0) = 0$. Тогда с учетом последних обозначений имеем

(7) $$\sum_{\beta=1}^{\alpha} u^{\alpha-\beta} f(\beta) = 0.$$

Заметим далее, что так как по предположению последнее равенство равно нулю для любых u, то оно должно быть равно нулю и для $u = 1$, т.е. справедливо

(8) $$\sum_{\beta=1}^{\alpha} f(\beta) = 0.$$

Докажем, что из предположения (7) следует
Утверждение 1:

(9) $$f(\beta) = 0, \quad \beta = \overline{1,\alpha}.$$

Доказательство. Докажем данное утверждение от противного. Действительно, пусть существует β, такое, что

(10) $$f(\beta) \neq 0.$$

Теперь заметим, что так как значения функций $f(\beta)$ представляют собой разности некоторых подмножеств объемов, то, умножив все объемы на одно достаточно большое число, всегда можно добиться того, чтобы выполнялось неравенство

(11) $$|f(\beta)| \geqslant 2.$$

Заметим, что в этом случае свойство (3) для всех объемов остается справедливым, а вид функции $\varphi^{\alpha}(i,k)$ остается прежним. Заметим далее, что если ненулевое слагаемое только одно, то выполнение условия (7) невозможно. Поэтому в этом случае часть слагаемых должна быть положительна, а часть отрицательна, т.е. если A – множество всех слагаемых, не равных нулю, то $|A| \geqslant 2$. Пусть $A_0 \subset A$ – подмножество слагаемых, для которых $f(\beta) < 0$, а $A_p \subset A$ – подмножество, для каждого элемента которого $f(\beta) > 0$. Тогда $A_p \cup A_0 = A$.

В этом случае, исходя из предположения (10), сумма абсолютных величин всех отрицательных слагаемых должна быть равна сумме всех положительных слагаемых, т.е. должно быть справедливо

(12) $$\sum_{\beta\in A_0} u^{\alpha-\beta}|f(\beta)| = \sum_{\beta\in A_p} u^{\alpha-\beta}|f(\beta)|.$$

Но так как (9) по предположению должно выполняться для любых u, то оно должно быть справедливо и для $u = \max\limits_{\beta} f^2(\beta)$. Пусть далее $f^2_{\max} = \max\limits_{\beta} f^2(\beta)$, а $u = f^2_{\max}$.

Заметим, что сумма членов геометрической прогрессии S_α со знаменателем u равна [4]

$$S_\alpha = \sum_{\beta=0}^{\alpha} u^{\alpha-\beta} = \frac{1-u^{\alpha+1}}{1-u},$$

отсюда получаем следующее выражение:

$$u^{\alpha+1} = 1 + S_\alpha(u-1),$$

но тогда для любого $u \geqslant 2$ справедливо неравенство

$$u^{\alpha+1} > S_\alpha.$$

Исходя из последнего неравенства, имеем

$$f^{2\alpha-2}_{\max} > \sum_{l=1}^{2\alpha-3} f^{l}_{\max}.$$

Кроме того, заметим, что

$$\sum_{\beta=2}^{\alpha} |f(\beta)| f^{2(\alpha-\beta)}_{\max} < \sum_{\beta=2}^{\alpha} f^{2\alpha-2\beta+1}_{\max},$$

а

$$\sum_{l=1}^{2\alpha-3} f^{l}_{\max} > \sum_{\beta=2}^{\alpha} f^{2\alpha-2\beta+1}_{\max},$$

так как в правой части неравенства присутствуют только нечетные слагаемые из всех слагаемых левой части. Таким образом, $f^{2\alpha-2}_{\max} > \sum\limits_{\beta=2}^{\alpha} |f(\beta)|\, f^{2(\alpha-\beta)}_{\max}$, но тогда

$$u^{\alpha-1}|f(1)| > \sum_{\beta=2}^{\alpha} u^{\alpha-\beta}|f(\beta)|.$$

Это означает, что, исходя из предположения (10), всегда можно найти такое достаточно большое u, что одно из слагаемых будет больше суммы абсолютных величин всех остальных слагаемых, но в этом случае равенство (12) невозможно, поэтому предположение (10) неверно, а утверждение 1 справедливо, что и требовалось доказать.

Заметим далее, что из утверждения 1 следует

$$f(\beta) = C_\alpha^{\alpha-\beta} \sum_{i=1}^{Q} \left[\varphi^\beta(i,k) - \varphi^\beta(i,k+1)\right] = 0, \quad \beta = \overline{1,\alpha}, \tag{13}$$

но $C_\alpha^{\alpha-\beta} > 0$ для $\beta = \overline{1,\alpha}$, поэтому совокупность равенств (13) может быть справедлива, только если имеет место следующее:

$$\sum_{i=1}^{Q} \left[\varphi^\beta(i,k) - \varphi^\beta(i,k+1)\right] = 0, \quad \forall\beta = \overline{1,\alpha}. \tag{14}$$

Теперь рассмотрим выражение (6) для степени $\alpha+1$:

$$\sum_{i=1}^{Q}\Big\{\big[\varphi(i,k)+u\big]^{\alpha+1}-\big[\varphi(i,k+1)+u\big]^{\alpha+1}\Big\}=$$
$$=\sum_{\beta=0}^{\alpha}C_{\alpha+1}^{\alpha-\beta+1}u^{\alpha-\beta+1}\sum_{i=1}^{Q}\big[\varphi^{\beta}(i,k)-\varphi^{\beta}(i,k+1)\big]+$$
$$+\sum_{i=1}^{Q}\big[\varphi^{\alpha+1}(i,k)-\varphi^{\alpha+1}(i,k+1)\big],$$

и, так как (14) справедливо, то последнее выражение равно

$$\sum_{i=1}^{Q}\big[\varphi^{\alpha+1}(i,k)-\varphi^{\alpha+1}(i,k+1)\big],$$

но оно не зависит от u, поэтому если существует функция $\varphi^{\alpha}(i,k)$ для степени α, такая, что можно построить все разности между суммарными объемами, равными нулю, то, применяя эту функцию для решения задачи степени $\alpha+1$, получим для любых наборов чисел, необходимых для решения задачи степени α, один и тот же набор разностей.

Пусть далее

$$\Delta(k,\alpha+1)=\sum_{i=1}^{Q}\big[\varphi^{\alpha+1}(i,k)-\varphi^{\alpha+1}(i,k+1)\big],$$

после этого имеем:

$$\begin{aligned}
&V_1-V_2=\Delta(1,\alpha+1),\\
&V_2-V_3=\Delta(2,\alpha+1),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&V_k-V_{k+1}=\Delta(k,\alpha+1),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&V_{m-1}-V_m=\Delta(m-1,\alpha+1)
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
&V_1=V_m+\sum_{j=1}^{m-1}\Delta(j,\alpha+1),\\
&V_2=V_m+\sum_{j=2}^{m-1}\Delta(j,\alpha+1),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&V_k=V_m+\sum_{j=k}^{m-1}\Delta(j,\alpha+1),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&V_{m-1}=V_m+\Delta(m-1,\alpha+1).
\end{aligned}$$

Тогда, перенумеровывая m раз номера частей так, чтобы каждый раз номер части увеличивался на единицу, если $k<m$, и считая его равным единице, если $k=m$, определим суммарный объем k-й части:

$$V_k = \sum_{q=k+1}^{m}\left[V_m + \sum_{j=q}^{m-1}\Delta(j,\alpha+1)\right] + \sum_{q=1}^{k}\left[V_m + \sum_{j=q}^{m-1}\Delta(j,\alpha+1)\right] =$$

$$= \sum_{q=1}^{m}\left[V_m + \sum_{j=q}^{m-1}\Delta(j,\alpha+1)\right] = mV_m + \sum_{q=1}^{m}\sum_{j=q}^{m-1}\Delta(j,\alpha+1),$$

но полученное выражение не зависит от k, поэтому суммарные объемы всех частей равны: $V_1 = V_2 = \ldots = V_m$, а все разности равны нулю.

Таким образом, имея функцию $\varphi^{\alpha}(i,k)$ для степени α и применяя ее m раз для решения задачи степени $\alpha+1$, меняя при этом по кругу номера частей, построим функции $\varphi^{\alpha+1}(i,k)$ для решения задачи степени $\alpha+1$, что и требовалось доказать.

Тогда минимальное число камней, необходимое для решения задачи степени $\alpha+1$, равно mQ, но так как для $\alpha = 1$ камней необходимо $2m$, то для степени α их надо $2m^{\alpha}$, т.е. необходимо выполнение условия (4).

3. Описание алгоритма

В дальнейшем при описании алгоритма будем считать, что выполняется условие (12), множество объемов $\{v_i\}$ определяется из выражения (2), а $\{A_j\}$ и $\{P_j\}$ – множества вспомогательных переменных для определения индексов.

Алгоритм 1

1. Ввод α, m, n, $\{v_i\}$, $V=0$, $k=\overline{1,m}$, $i=\overline{1,n}$, $S=0$.
2. $i=k=0$, $q=r=1$, $\beta=\alpha$, $P_j=A_j=0$, $j=\overline{1,2m^{\alpha}}$.
3. $j=0$.
4. $j=j+1$.
5. $i=i+1$, $k=k+1$.
6. Если $P_j<m$, то $P_j=P_j+1$, иначе $P_j=1$.
7. $A_i=P_j$.
8. $l=S+P_j$, $h=S+2m-P_j+1$.
9. $x_{lk}=1$, $x_{hk}=1$.
10. $V_k=V_k+v_l+v_h$.
11. Если $k=m$, то $k=0$, $S=S+2m$.
12. Если $j<q$, то переход к шагу 4.
13. $r=r+1$.
14. Если $r\leqslant m$, то переход к шагу 3.
15. $k=0$, $\alpha=\alpha-1$, $q=mq$, $r=2$, $P_j=A_j$, $j=\overline{1,q}$.
16. Если $\alpha>0$, то переход к шагу 3.
17. $\alpha=\beta$, $n=n-2m^{\alpha}$.
18. Если $n>0$, то переход к шагу 2.
19. Вывод $\{x_{ij}\}$, $\{V_j\}$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$.
20. Конец.

Заметим, что при решении задачи степени α алгоритмом 1 автоматически решаются все задачи степени, меньшей, чем α. Таким образом, задачи всех степеней решаются независимо. Отметим также, что на распределение не влияют константы полинома, так как в этом случае все объемы увеличиваются на одно и то же число. Поэтому если перед работой алгоритма все объемы упорядочены так, что выполняется условие (3), то алгоритм 1 гарантирует глобально-оптимальное решение, а оценка времени счета будет $O(n)$, так как алгоритм обращается к каждому объему только один раз.

Таким образом справедлива следующая теорема.

Теорема. Для обобщенной задачи о камнях (1) при условиях (3) и (4) при помощи алгоритма 1 с оценкой времени $O(n)$ всегда можно распределить камни так, что суммарные объемы всех куч будут равны

$$V_1 = V_2 = \ldots = V_m.$$

Пример. Пусть $v_i = i^2 - 10i + 25$, $m = 2$, минимальное $n = 2m^2 = 8$.

Тогда после распределения первых четырех объемов при помощи алгоритма 1 имеем:

$$x_{11} = 1, \quad x_{41} = 1, \quad x_{22} = 1, \quad x_{32} = 1,$$
$$V_1 = v_1 + v_4 = 16 + 1 = 17,$$
$$V_2 = v_2 + v_3 = 9 + 4 = 13.$$

После распределения следующих объемов окончательно получаем:

$$x_{61} = 1, \quad x_{71} = 1, \quad x_{52} = 1, \quad x_{82} = 1,$$
$$V_1 = 17 + v_6 + v_7 = 17 + 1 + 4 = 22,$$
$$V_2 = 13 + v_5 + v_8 = 13 + 0 + 9 = 22.$$

4. Обсуждение

Описанный метод можно применить для решения ряда задач. Рассмотрим одну из них. Пусть задан полином степени α на отрезке $[a, b]$. Требуется разбить отрезок на m областей так, чтобы площади, ограничиваемые полиномом, были равны для всех областей. Для решения этой задачи разбиваем отрезок на $2m^\alpha$ равных отрезков. Можно показать, что площадь, ограничиваемая полиномом, будет полиномиальной функцией номера отрезка степени α. Применяя описанный алгоритм, получаем решение задачи. Интересно отметить, что решение не зависит от вида полинома (лишь бы его степень была не выше α).

Рассмотрим еще одно обобщение. Пусть ставится задача: распределить камни по k кучам так, чтобы соотношения объемов куч были по возможности близки к заданным соотношениям $a_1 : a_2 : \ldots : a_k$. Для решения задачи находим наименьшее общее кратное q всех чисел a_i. Определяем далее

$$m = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{q}$$

и решаем задачу распределения на равные кучи. Если число камней $m \equiv 0 \pmod{2m^\alpha}$, то задача решается описанным в работе алгоритмом. Более подробно эти и другие постановки будут рассмотрены в следующей статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гэри М.Р., Джонсон Д.С.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
2. Теория расписаний и вычислительные машины / Под ред. Коффмана. М.: Наука, 1984.
3. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельцов Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.
4. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974.

Поступила в редакцию 29.09.94