УДК 517.977

© 1995 г. В. Н. БУРКОВ, д-р техн. наук,
С. И. ДЗЮБКО, канд. техн. наук
(Институт проблем управления РАН, Москва)

ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА ДЛЯ ПОЛИНОМОВ

Рассматриваются полиномы степени n, определенные на отрезке $[a,b]$. Описана процедура разбиения отрезка на m подмножеств, таких, что площади, ограничиваемые полиномом, равны для всех подмножеств независимо от конкретного вида полинома.

Введение

Во многих задачах теории расписаний, теории массового обслуживания, классификации требуется разбить множество объектов на конечное число подмножеств, обладающих в определенном смысле одинаковыми свойствами (равные времена выполнения операций подмножества, одинаковая загрузка обслуживающих устройств, одинаковые характеристики выделенных классов и т.д.).

В непрерывном варианте задачу можно представить как задачу разбиения области определения некоторой функции на m подмножеств с равными интегралами по подмножествам. Для каждой конкретной функции, очевидно, можно предложить алгоритм определения этих подмножеств. Однако столь же очевидно, что с изменением функции, вообще говоря, изменится и разбиение на подмножества. Возникает вопрос, нет ли некоторой инвариантной системы подмножеств, сохраняющей равенство интегралов для достаточно широкого класса функций. В статье доказано существование такой системы подмножеств для полиномиальных функций.

1. Основные теоремы

На отрезке $[a,b]$ задан полином $f(x)$ степени n (n – целое число):

$$f_n(x) = d_0 + d_1 x + \ldots + d_n x^n.$$

Теорема 1. Для любого полинома степени n существует разбиение отрезка $[a,b]$ на m подмножеств $\{Q_j(m,n)\}$, не зависящих от коэффициентов полинома, такое, что интегралы

$$S_j(m,n) = \int\limits_{Q_j(m,n)} f_n(x)dx, \quad j = \overline{1,m}$$

равны между собой.

Условия равенства интегралов на инвариантных множествах $Q_j(m,n)$ являются в определенном смысле достаточными для того, чтобы $f(x)$ была полиномом степени n. Более того, имеет место

Теорема 2. Пусть $f(x)$ разложима в ряд Тейлора и для системы инвариантных множеств $\{Q_j(2,n)\}$ разность

$$\Delta = S_2(2,n,u) - S_1(2,n,u)$$

не зависит от u. Тогда $f(x)$ – полином степени n.

Теорема 2 позволяет восстанавливать коэффициенты полинома по его значениям в граничных точках отрезков системы $\{Q_j(m,n)\}$. Если для некоторого n разность $\Delta(m, n-1)$ не зависит от u, то по величине $\Delta(m, n-1)$ однозначно определяется коэффициент d_n. Вычитая слагаемое $d_n x^n$ из $f(x)$, получим полином степени $(n-1)$. Затем определяется коэффициент d_{n-1} и т.д. Заметим, что описанный подход можно применить и для приближенного представления в виде полиномов произвольных функций, в том числе заданных в конечном числе точек.

2. Построение инвариантных множеств

Доказательство теоремы 1 является конструктивным, т.е. позволяет строить совокупность инвариантных множеств $J(m,n) = \{Q_j(m,n)\}$ для любых m и n последовательно, начиная с $n = 1$. При увеличении n на 1 число отрезков разбиения отрезка $[a,b]$ увеличивается в m раз. Поэтому число отрезков, на которые разбивается отрезок $[a,b]$, составляет $2m^n$. Алгоритм построения совокупности инвариантных множеств покажем на примере $m = 3$, $n = 2$. Для $n = 1$ необходимо разбить отрезок $[a,b]$ на $2m = 6$ равных отрезков и образовать три множества:

$$J(3,1) = [1,\ 2,\ 3,\ 3,\ 2,\ 1].$$

В этой последовательности числа указывают номер множества, которому принадлежит соответствующий отрезок. Из полученной последовательности образуем новую, заменяя 1 на 2, 2 на 3 и 3 на 1:

$$[2,\ 3,\ 1,\ 1,\ 3,\ 2],$$

а из этой еще одну, с той же заменой 1 на 2, 2 на 3, 3 на 1:

$$[3,\ 1,\ 2,\ 2,\ 1,\ 3].$$

Объединяя все три последовательности, получаем систему инвариантных множеств для $n = 2$ в виде

$$J(3,2) = [1,\ 2,\ 3,\ 3,\ 2,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 1,\ 3,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 2,\ 1,\ 3].$$

Для построения системы инвариантных множеств для $n = 3$ следует из полученной последовательности $J(3,2)$ для $n = 2$ образовать еще 2, последовательно заменяя 1 на 2, 2 на 3, 3 на 1, и объединить все три вместе и т.д. Для случая $m = 2$ процедура построения еще проще. Начиная с последовательности $J(2,2) = [1,2,2,1]$ (или $[2,1,1,2]$) для случая $n = 1$, строим систему множеств для $n = 2$, заменяя 1 на пару $(1,2)$, а 2 на пару $(2,1)$:

$$J(2,2) = [1,\ 2,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 2].$$

Продолжая таким же образом, последовательно получаем $J(2,3)$ и т.д.

3. Многомерный случай

Теоремы, очевидно, обобщаются на случай p-мерных полиномов. Пусть $f(x)$ – полином степени n_k по переменной $x_k \in [a_k, b_k]$, $k = \overline{1,p}$. Образуем инвариантные множества $\{Q_j(m_k, n_k)\}$ отрезка $[a_k, b_k]$, как для одномерного случая. Эти множества разбивают область определения полинома на $\prod\limits_k m_k$ множеств, таких, что интегралы по этим множествам равны между собой независимо от коэффициентов полинома.

4. Заключение

Доказанные теоремы позволяют весьма эффективно решать ряд задач. Так, для задач обслуживания инвариантные множества обеспечивают равномерную загрузку обслуживающих устройств. Для задач классификации инвариантные множества обеспечивают разбиение на классы с одинаковыми средними характеристиками по всем учитываемым факторам. Для задач статистического анализа выборки из инвариантных множеств хорошо использовать для оценки средних значений, конечно, все это при условии, что соответствующие зависимости хорошо описываются полиномами, что практически всегда можно предполагать для достаточно "гладких" совокупностей данных.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Для случая $n = 0$ теорема очевидна (достаточно разбить отрезок $[a, b]$ на m равных отрезков). Легко доказать справедливость теоремы для $n = 1$. Для этого достаточно разбить отрезок $[a, b]$ на $2m$ равных отрезков. Множества $Q_j(m, 1)$ состоят из двух отрезков, одинаково удаленных от середины отрезка $[a, b]$. Предположим, что теорема справедлива для полиномов степени не выше n. Рассмотрим полином степени $(n + 1)$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на m равных отрезков и для каждого из них построим систему из m множеств $\{Q_j(m, n)\}$ (всего получаем m множеств). Заметим, что если $x \in Q_j(m, n)$ для первого отрезка, то $(a_k + x) \in Q_j(m, n)$ для k-го отрезка, где a_k – его левая граница. Обозначим

$$S_j(m, n + 1, a_k) = \int\limits_{Q_j(m,n)} (a_k + x)^{n+1} dx$$

и оценим разность

$$\Delta_{jk}(m, n) = S_j(m, n + 1, a_k) - S_1(m, n + 1, a_k) =$$

$$= \sum_{q=0}^{n} C_{n+1}^{q} a_k^q \left[\int\limits_{Q_j(m,n)} x^{n-q} dx - \int\limits_{Q_1(m,n)} x^{n-q} dx \right] +$$

$$+ \left[\int\limits_{Q_j(m,n)} x^{n+1} dx - \int\limits_{Q_1(m,n)} x^{n+1} dx \right],$$

где C_{n+1}^q – число сочетаний из $n + 1$ по q.

Первое слагаемое равно 0 в силу сделанного предположения, поэтому полученное выражение не зависит от a_k (от выбранного отрезка). Образуем теперь из полученных m^2 множеств m множество $Q_j(m, n + 1)$ так, чтобы в каждое из них попало одно и только одно из множеств $Q_j(m, n)j$-го типа. Для любого множества $Q_j(m, n)$ имеем

$$\int\limits_{Q_j(m,n+1)} f_{n+1}(x) dx = \int\limits_{Q_j(m,n+1)} f_n(x) dx + d_{n+1} \sum_{k=1}^{m} S_1(m, n+1, a_k) + \sum_{k=1}^{m} \Delta_j(m, n).$$

Следовательно, для всех полученных множеств интегралы равны. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим разложение $f(x)$ в ряде Тейлора на отрезке $[u, u+\varepsilon]$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k, \quad \text{где} \quad d_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(u).$$

Рассмотрим систему инвариантных множеств $\{Q_j(2,n)\}$ на отрезке $[u, u+\varepsilon]$ и оценим разность

$$\int\limits_{Q_2(2,n-1)} f(x)dx - \int\limits_{Q_1(2,n-1)} f(x)dx = \Delta(2,n)d_n$$

по условию теоремы 1, если $f(x)$ – полином степени n, то последнее выражение не зависит от u и $\Delta(2,n) = \text{const}$, но, с другой стороны, так как функция разложима в ряд Тейлора, имеем:

$$\int\limits_{Q_2(2,n-1)} f(x)dx - \int\limits_{Q_1(2,n-1)} f(x)dx = \frac{1}{n!} f^{(n)}(u)\delta(u) + o\left(\varepsilon^{n+1}\right).$$

Нетрудно показать, что $\delta(u)$ имеет порядок малости ε^{n+1}. Отсюда следует, что

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(n) = \text{const},$$

а значит, $f(x)$ – полином степени n.

Поступила в редакцию 23.02.95