УДК 519.86


**В. Н. БУРКОВ, д-р техн. наук; В. П. ФИЛИППОВ**

**(Институт проблем управления, Москва)**

# СИНТЕЗ СОГЛАСОВАННЫХ МЕХАНИЗМОВ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ АКТИВНЫХ СИСТЕМ

Рассматривается задача построения согласованных механизмов управления в активных системах для дискретных множеств возможных состояний. Находятся решения для всех видов согласования на основе использования аппарата теории графов. Приводятся необходимые и достаточные условия существования решения задачи построения согласованных механизмов для дискретного случая.

## 1. Введение

В условиях перехода от директивных методов управления к хозрасчетным центральное значение в теории и практике управления в социально-экономических системах приобретает задача согласования интересов органов управления (центра) и хозрасчетных организаций. В теории активных систем разработаны механизмы управления, обеспечивающие тот или иной тип согласования интересов, и тем самым стимулирующие требуемое поведение элементов. Так, механизмы открытого управления («честной игры») обеспечивают достоверность информации, получаемой центром от элементов [1]. Механизмы согласованного выбора (согласованные механизмы) обеспечивают желательный для центра выбор элементами состояний при заданном плане (например, гарантируют выполнение и перевыполнение планов) [1—3]. В последние годы получено существенное развитие в разработке методов оптимального синтеза согласованных механизмов [4, 5]. Однако результаты получены в основном для случая непрерывных множеств возможных состояний и планов элементов. В работе рассматривается задача синтеза согласованных механизмов для дискретных множеств возможных состояний и планов. При этом оказывается эффективным для решения задачи применение аппарата теории графов. Ряд известных результатов доказан более просто. Получено полное решение задачи синтеза согласованных механизмов для дискретного случая.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим сначала случай активной системы с одним элементом. Обозначим $Y=\{y_j,\ j=1\div p\}$ — дискретное множество возможных состояний элемента, $X=\{x_i,\ i=1\div m\}$ — дискретное множество планов, $f_{ij}=h_j-\chi_{ij}$ — целевая функция элемента при плане $x_i$ и состоянии $y_j$, где $h_i$ — функция дохода, $\chi_{ij}$ — функция штрафа ($\chi_{ii}=0$ для всех $i$), $L_i$ — множество согласованного выбора при плане $x_i$. Примем, что значения $h_i$, $\chi_{ij}$ удовлетворяют ограничениям

$$(1)\quad \begin{aligned} &l_i \leqslant h_i \leqslant b_i, \quad i=1\div m; \\ &d_{ij} \leqslant \chi_{ij} \leqslant c_{ij}, \quad i=1\div m,\ j=1\div p, \end{aligned}$$

где $l_i$, $b_i$ — соответственно минимальный и максимальный доход элемента в состоянии $i$. $d_{ij}$, $c_{ij}$ — минимально и максимально допустимые штрафы за отклонение от планируемого состояния $i$.

Задача синтеза согласованной на множестве $X$ системы стимулирования заключается в определении величин $h_i$, $\chi_{ij}$ $(i=1\div m,\ j=1\div p)$, удовлетворяющих (1) и таких, что выбор любого $y_i \in L_i$ предпочтительнее для элемента, чем выбор любого $y_k \notin L_i$. В формальной записи получаем следующее условие согласованного выбора:

$$(2)\quad \begin{aligned} &\forall x_i \in X, \quad y_j \in L_i: \\ &h_i - \chi_{ij} \geqslant \max_k (h_i - \chi_{ik}) \quad \forall i, j. \end{aligned}$$

Заметим, что условия (2) отличаются от обычно рассматриваемых условий согласованного выбора, в которых требуется выполнение (2) не для всех $y_j \in L_i$, а хотя бы для одного. Рассматриваемые нами условия (2) соответствуют случаю неопределенности, когда реализуемым может оказаться любое состояние $y_j \in L_i$.

## 3. Согласование по точному выполнению плана ($X$-согласование)

Термин $X$-согласование означает, что множество согласованного выбора содержит единственный элемент $y_i = x_i$. Задача, таким образом, заключается в синтезе системы стимулирования, удовлетворяющей (1) и обеспечивающей точное выполнение любого плана $x_i \in X$.

Запишем условия $X$-согласования на множестве $X$ $(X \subset Y)$:

$$h_i \geqslant h_j - \chi_{ij} \quad \forall i, j$$

или

$$(3)\quad h_j - h_i \leqslant \chi_{ij} \quad \forall i, j.$$

Очевидно, что для проверки разрешимости системы (3) следует положить $\chi_{ij} = c_{ij}$. Тогда условия (3) принимают вид

$$h_j - h_i \leqslant c_{ij} \quad \forall i, j.$$

При $j \notin X$, очевидно, следует взять $h_j = a_j$. Получаем

$$h_i \geqslant \tilde{l}_i = \max_{j \in X} (a_j - c_{ij}), \quad i \in X.$$

Обозначим $a_i = \max(l_i, \tilde{l}_i)$, $i \in X$.

Окончательно задача (1) свелась к определению $h_i$, удовлетворяющих системе неравенств

$$(4)\quad \begin{aligned} &a_i \leqslant h_i \leqslant b_i \quad \forall i; \\ &h_j - h_i \leqslant c_{ij} \quad \forall i, j. \end{aligned}$$

Определим полный без петель граф $\Gamma(X)$ с $p$-вершинами, где $p$ — число элементов множества $X$, и длинами дуг $c_{ij}$. Задача определения $h_i$, удовлетворяющих (4), известна в теории графов как задача о потенциалах вершин графа [6—8]. Двойственной к ней является задача нахождения кратчайших путей в графе [6, 8]. Известны необходимые и достаточные условия разрешимости обеих задач, которые (модифицируя их применительно к данной задаче) можно записать в виде теоремы.

*Теорема 1.* Для разрешимости системы (4) необходимо и достаточно отсутствия в графе $\Gamma(X)$ контуров отрицательной длины и выполнения условий

$$(5) \qquad \mathscr{L}_{ij} \geqslant a_j - b_i, \quad i, j \in X,$$

где $\mathscr{L}_{ij}$ — длина кратчайшего пути, соединяющего вершины $i$ и $j$.

Доказательства теоремы 1, а также теоремы 2 сравнительно несложно выводятся на основе доказательств условий существования решения задачи о кратчайших путях в графе [6, 8], с использованием представления задачи в виде задачи линейного программирования и применения теорем двойственности.

Если все $c_{ij} \geqslant 0$, то граф $\Gamma(X)$ заведомо не имеет контуров отрицательной длины и неравенства (5) являются необходимыми и достаточными условиями существования $X$-согласованной системы стимулирования на множестве $X$.

Рассмотрим следующий алгоритм определения $X$-согласованной системы стимулирования.

1-й шаг. Полагаем $h_i^0 = a_i \quad \forall i \in X$ и вычисляем

$$h_i^1 = \max_j [a_j - c_{ij}], \quad i = 1 \div p,$$

где $c_{ii} = 0$ по определению;

$k$-й шаг. Вычисляем $\quad h_i^k = \max\limits_j [h_j^{k-1} - c_{ij}], \quad i = 1 \div p.$

Если выполнены условия теоремы 1, то за конечное число итераций будет получена система стимулирования $\{h_i^*\}$, удовлетворяющая (4). Оказывается, что в определенном смысле эта система является минимальной.

*Теорема 2.* Не существует $X$-согласованной системы стимулирования на множестве $X$ с значениями, меньшими чем $\{h_i^*\}$.

Заметим также, что решение задачи (при условии его существования) всегда существует на множестве сильно согласованных механизмов, т. е механизмов с функцией штрафа, удовлетворяющих неравенству треугольника

$$\chi_{ij} + \chi_{jk} \geqslant \chi_{ik}, \quad i, j, k \in X.$$

Для того чтобы убедиться в этом, достаточно взять $\chi_{ij} = \mathscr{L}_{ij}$, $i, j \in X$. Подобный результат для непрерывных множеств планов $X$ был получен в [5] с помощью введения понятия $T$-оболочки (аналога длины кратчайшего пути $\mathscr{L}_{ij}$ в дискретном случае).

Используя методы решения задачи о ближайших потенциалах [6], можно получить оптимальную систему стимулирования, максимально близкую к любой заданной системе $\{\hat{h}_i\}$. В качестве начальных значений в описанном выше алгоритме в этом случае берутся значения заданной системы стимулирования

$$h_i^0 = \hat{h}_i, \quad i \in X.$$

Возможна также такая постановка задачи $X$-согласования, при которой ограничения устанавливаются непосредственно на функцию стимулирования

(6) $$d_{ij} \leqslant f_{ij} = h_j - \chi_{ij} \leqslant c_{ij}.$$

В этом случае задача решается следующим образом: из условия $X$-согласования и (6) получаем

$$h_j - h_i \leqslant \chi_{ij} \leqslant h_j - d_{ij},$$

откуда необходимые и достаточные условия выражаются в виде $h_i \geqslant d_{ij}$, $i \in X$, $j \in Y$. Таким образом, если $b_i \geqslant \max\limits_{j \neq i} d_{ij}$, то задача имеет решение

$$h_i^{\min} = \max[l_i;\ \max_{j \neq i} d_{ij}], \quad i \in X;$$

$$h_i^{\min} = l_i, \quad i \in X$$

с функциями штрафов

$$\chi_{ij}^* = h_j^{\min} - d_{ij}, \quad i \in X, \quad j \notin X;$$

$$h_i^{\min} - c_{ij} \leqslant \chi_{ij}^* \leqslant h_j^{\min} - d_{ij}, \quad i \notin X, \quad j \in X.$$

Полученный результат аналогичен необходимым и достаточным условиям $X$-согласованности систем стимулирования для непрерывных множеств $X$ и $Y$, полученным в [4].

## 4. Согласование по целевым ограничениям ($L$-согласование)

Согласование по целевым ограничениям является согласованием интересов в более широком понимании, чем согласование по точному выполнению плана. Задание области согласованных состояний $L_i$ усложняет модель, но зато вносит в нее дополнительное разнообразие, зависящее от вида $L_i$.

Рассмотрим относительно простой случай построения $L$-согласованного механизма, когда множество согласованных значений $L_i$ соответствует выполнению и перевыполнению плана $x_i$.

Тогда наряду с $x_i \in L_i$ имеет место $y_j \in L_i$ при перевыполнении плана и $y_j \notin L_i$ при его недовыполнении.

Очевидно, что условия $L$-согласования при этом записываются в виде

$$h_i \geqslant h_j - \chi_{ij}, \quad j \notin L_i;$$

$$h_i \geqslant h_j - \chi_{ij}, \quad j \in L_i$$

или

$$h_j - h_i \leqslant \chi_{ij}, \quad j \notin L_i;$$

(7)

$$h_j - h_i \geqslant \chi_{ij}, \quad j \in L_i.$$

Учитывая, что $d_{ij} \leqslant \chi_{ij} \leqslant c_{ij}$, следует взять $\chi_{ij} = c_{ij}$ для $j \notin L_i$ и $\chi_{ij} = d_{ij}$ для $j \in L_i$.

Заметим, что, поскольку каждое состояние $j$ имеет свою область согласования $L_j$ и к тому же соотносится с планом $x_i$ и областью $L_i$, необходимо рассмотреть случаи $j \notin L_i$, $i \in L_j$; $j \in L_i$, $i \in L_j$; $j \notin L_i$, $i \in L_j$; $j \in L_i$, $i \notin L_j$.

Выпишем последовательно условия $L$-согласования для каждого случая:

$$1.\ h_j-h_i\leqslant c_{ij},\quad j\notin L_i \cup h_i-h_j\leqslant c_{ij},\quad i\notin L_j;$$

$$2.\ h_j-h_i\geqslant d_{ij},\quad j\in L_i \cup h_i-h_j\geqslant d_{ji},\quad i\in L_j;$$

$$3.\ h_j-h_i\leqslant c_{ij},\ j\notin L_i \cup h_i-h_j\geqslant d_{ji},\ i\in L_j;$$

$$4.\ h_j-h_i\geqslant d_{ij},\ j\in L_i \cup h_i-h_j\leqslant c_{ji},\ i\notin L_j;$$

приводя неравенства (где это возможно) к виду $h_j-h_i\leqslant\chi_{ij}$, получим:

$$1.\ h_j-h_i\leqslant c_{ij},\ j\notin L_i \cup h_i-h_j\leqslant c_{ji},\quad i\notin L_j;$$

$$2.\ h_j-h_i\geqslant d_{ij},\ j\in L_i \cup h_j-h_i\leqslant -d_{ji},\ i\in L_j;$$

$$3.\ h_j-h_i\leqslant c_{ij},\ j\notin L_i \cup h_j-h_i\leqslant -d_{ji},\ i\in L_j;$$

$$4.\ h_j-h_i\geqslant d_{ij},\ j\in L_i \cup h_j-h_i\geqslant c_{ji},\quad i\notin L_j.$$

Отсюда после выполнения операции $\cup$ получаем окончательно:

$$1.\ h_j-h_i\leqslant c_{ij},\quad j\notin L_i,\ i\in L_j;$$

$$2.\ h_j-h_i\leqslant -d_{ji},\ j\in L_i,\ i\in L_j;$$

$$3.\ h_j-h_i\leqslant \min(c_{ij}, -d_{ji}),\ j\notin L_i\ i\in L_j;$$

$$4.\ h_j-h_i\leqslant \infty,\ j\in L_i,\ i\notin L_j.$$

Рассмотрим граф $\Gamma(Y)$ с длинами дуг $l_{ij}$ в виде

$$l_{ij}=\begin{cases} c_{ij}, & \text{если } j\notin L_i,\ i\notin L_j,\\ -d_{ij}, & \text{если } j\in L_i,\ i\in L_j,\\ \min(c_{ij}, -d_{ij}), & \text{если } j\notin L_i,\ i\in L_j,\\ \infty, & \text{если } j\in L_i,\ i\notin L_j.\end{cases}$$

Поскольку условия (7) теперь можно привести к виду

$$h_j-h_i\leqslant l_{ij}\quad \forall i, j\in Y,$$

задача синтеза системы стимулирования снова свелась к задаче о потенциалах вершин графа. Если же граф не имеет контуров отрицательной длины, то необходимые и достаточные условия существования согласованного механизма на множестве $Y$ записываются в виде (5).

Рассмотрим теперь произвольный $L$-согласованный механизм. Для каждого плана $x_i$ задано множество $L_i=L(x_i)$ предпочтительных состояний, т. е. имеем

$$(8)\qquad h_j-\chi_{ij}\geqslant h_k-\chi_{ik}\quad \forall j\in L_i,\quad k\notin L_i,\quad i=1\div m,$$

или, другими словами, при заданном плане элементу всегда выгодней выбирать некоторое состояние из $L_i$, причем в случае равенства в выражении (8) это произойдет в силу благожелательного отношения элемента к центру.

Для существования такого механизма необходимо и достаточно, чтобы система линейных неравенств (8) имела решение в области

$$a_i\leqslant h_i\leqslant b_i,\quad d_{ij}\leqslant\chi_{ij}\leqslant c_{ij},\quad i, j=1\div m.$$

Очевидно, что из (8) сразу следует, что $\chi_{ij}=d_{ij}$ для $j\in L_i$ и $\chi_{ik}=c_{ik}$ для $k\notin L_i$. Теперь выражение (8) можно переписать в виде

$$h_k-h_j\leqslant c_{ik}-d_{ij}.$$

Проведя преобразования аналогично предыдущему случаю, переходим к полному без петель графу $\Gamma(Y)$ с длинами дуг $l_{jk}$ в виде

$$l_{jk}=\begin{cases} \min\limits_{i\in Q_{jk}} (c_{ik}-d_{ij}), & \text{если } Q_{jk}\neq\varnothing, \\ \infty, & \text{если } Q_{jk}=\varnothing, \end{cases}$$

где $Q_{ij}=\{i:j\in L_i,\ k\notin L_i\}$ – множество планов, при которых состояние $j$ предпочтительнее состояния $k$. Система неравенств снова приводится к стандартной форме задачи о потенциалах вершин графа

$$h_k-h_j\leqslant l_{jk},\quad j,k\in Y,$$

алгоритмы решения которой описаны в [6, 8, 9].

## 5. Возможное развитие применяемого подхода

Рассмотренный в предыдущем разделе случай активной системы с одним активным элементом можно распространить на задачу разработки $L$-согласованных механизмов для активных систем веерного типа с $n$ независимыми элементами. Действительно, имея для каждого элемента $i$ $(i=1\div n)$ минимальные величины функций дохода $\{h_j^i\}$ для возможных планов $\{x_j^i\}$, можно определить минимальную величину стимулирования при любом плане системы $x=\{x^i_{j(i)},\ i=1\div n\}$ как сумму соответствующих минимальных величин $M(x)=\sum\limits_{i=1}^{n} h^i_{j(i)}$.

Описанный подход дает достаточно эффективный метод решения широкого класса задач построения (синтеза) согласованных механизмов.

Рассмотрим также обобщение метода на случай неопределенности, связанной с учетом таких трудноизмеримых факторов, как затраты или усилия элемента по реализации состояния.

Пусть $\Delta_i$ – максимально возможное отклонение фактического значения $h_i^\Phi$ от установленной величины, т. е. $h_i^\Phi\in h_i\pm\Delta_i$.

В этом случае рассматривается задача построения $L$-согласованного механизма, учитывающего все возможные $h_i^\Phi$. Изложенный выше метод применим при этом путем замены условий (4) или им подобных на условия

$$h_k-h_j\leqslant l_{jk}-\Delta_k-\Delta_j.$$

Следующее обобщение связано с построением $L$-согласованных механизмов с несколькими связанными активными элементами с зависимыми ограничениями $L_i(x)$. В этом случае для рассматриваемого элемента $q$ обозначим $L_q(x^{-q})=L(x^q,\ x^{-q})$, где $x^{-q}=(x^1,\ x^2,\dots,x^{q-1},\ x^{q+1},\dots,x^n)$ – совокупность планов всех элементов, кроме $q$-го.

Рассмотрим произвольную пару состояний $y_k$, $y_j$ элемента $q$. Будем считать, что $y_k\succcurlyeq_i y_j$ ($y_k$ предпочтительнее $y_j$ при плане $x_i$), если существует $x^{-q}$, такой, что $y_k\in L_q(x^{-q})$, $y_j\notin L_q(x^{-q})$.

Для $\forall k, j$, таких, что $y_k \succcurlyeq_i y_j$, имеет место

$$h_k - \chi_{ik} \geqslant h_j - \chi_{ij}$$

или

$$h_j - h_k \leqslant \chi_{ij} - \chi_{ik} \leqslant c_{ij} - d_{ik},$$

причем из определения графа $\Gamma(Y)$ следует: $c_{jj}=0$ и $d_{kk}=0$.

Обозначим через $Q_{kj}$ множество планов, таких, что $y_k \succcurlyeq_i y_j$,

$$r_{kj} = \min_{x_i \in Q_{kj}} (c_{ij} - d_{ik}),$$

откуда получаем систему

$$h_j - h_k \leqslant r_{kj}, \quad k, j \in Y_i;$$

$$a_j \leqslant h_j \leqslant b_j, \quad j \in Y_i.$$

Таким образом, в случае дискретных множеств $X$ и $Y$ для зависимых элементов, используя вышеприведенные ограничения, можно получить «минимальную» систему стимулирования, обеспечивающую $L$-согласованный выбор.

Если $L$-согласованного механизма при заданных условиях не существует, то следует либо расширить область возможных функций стимулирования ($[a_i, b_i]$ и $[d_{ij}, c_{ij}]$), либо уменьшить множество планов $X$, на котором требуется выполнение условий согласования.

В последнем случае задача сводится к решению задачи разрыва контуров отрицательной длины [6].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Бурков В. Н., Кондратьев В. В.* Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981.
2. *Бурков В. Н.* Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977.
3. *Андреев С. П., Бурков В. Н., Кондратьев В. В., Черкашин А. М.* Механизмы функционирования организационных систем. Синтез процедур оценки деятельности и стимулирования. М.: Ин-т проблем управления, 1984.
4. *Ашимов А. А., Бурков В. Н., Джапаров Б. А., Кондратьев В. В.* Согласованное управление активными производственными системами. М.: Наука, 1986.
5. *Арсланов М. З., Динова Н. И.* Синтез согласованной системы стимулирования при ограничении штрафов // Неопределенность, риск, динамика в организационных системах. М.: Ин-т проблем управления, 1984. С. 61–68.
6. *Бурков В. Н., Горгидзе И. А., Ловецкий С. Е.* Прикладные задачи теории графов. Тбилиси: ВЦ АН ГССР, 1974.
7. *Гроппен В. О.* Модели и алгоритмы комбинаторного программирования. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1983.
8. *Пападимитриу Х., Стайнглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1985.
9. *Кристофидес Н.* Теория графов: алгоритмический подход. М.: Мир, 1978.



**Поступила в редакцию 26.06.89**