УДК 339:06.063

КОАЛИЦИИ ПРИ КОНКУРСНОМ МЕХАНИЗМЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

БУРКОВ В. Н., ЕНАЛЕЕВ А. К., КАЛЕНЧУК В. Ф.

(Москва)

В работе [1] исследовался конкурсный механизм распределения ресурса между n потребителями. Было показано, во-первых, что при данном механизме в системе существует равновесие по Нэшу, которое определяется стратегией поведения «лучшего» из проигравших в конкурсе, во-вторых, что распределение ресурса при конкурсном механизме является близким к оптимальному. Однако в [1] предполагалось, что в системе не образуются коалиции между победителями и проигравшими. В данной работе исследуются условия образования таких коалиций и их влияние на эффективность функционирования системы.

1. Введение

Подробное описание активной системы с конкурсным механизмом распределения ресурса приведено в [1], поэтому напомним лишь основные обозначения.

Рассматривается система, состоящая из центра и n элементов. Каждый элемент характеризуется своей производственной функцией $\varphi_i(x_i)$, которая удовлетворяет следующим условиям: 1) $\varphi_i(0)=0$, $i=1,\ldots,n$; 2) функция $\varphi_i(x_i)$ является вогнутой, непрерывно дифференцируемой и возрастает по x_i, где x_i — количество ресурса, получаемое i-м элементом.

Будем считать, что центр имеет ресурс R и не знает точного вида функций $\varphi_i(\cdot)$.

Предполагается следующая схема функционирования системы. Элементы сообщают центру заявки на ресурс s_i и оценки эффективности использования ресурса ξ_i, где $\xi_i=w_i/s_i$, w_i — оценка выпуска продукта. Центр упорядочивает оценки ξ_i по убыванию

$$(1)\qquad \xi_{i_1}\geqslant\xi_{i_2}\geqslant\ldots\geqslant\xi_{i_{n-1}}\geqslant\xi_{i_n},$$

и первые $n-1$ элементы объявляются победителями конкурса. $Q=\{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}\}$ — множество победителей (для простоты будем считать, что в конкурсе всего один проигравший).

Распределение ресурса осуществляется согласно следующей процедуре планирования:

$$(2)\qquad x_i(s_i,\xi_i)=\begin{cases} s_i, & \text{если } i\in Q,\\ c, & \text{если } i\notin Q,\end{cases}$$

величина c выбирается с помощью некоторой итерационной процедуры из условия баланса

$$(3) \qquad \sum_{i\in Q} s_i + c = R.$$

Предполагается, что центр и элементы стремятся максимизировать свои целевые функции

$$W_{\text{ц}} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i), \quad W_{i_n} = \varphi_{i_n}(c),$$

$$W_i = \varphi_i(s_i) - \psi_i(\xi_i s_i - \varphi_i(s_i)), \; \psi_i(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \leqslant 0, \\ \alpha y, & \text{если } y > 0. \end{cases}$$

Определим следующие функции:

$$s_i(\xi_i) \in \operatorname{Arg}\max_{i} [\varphi_i(s_i) - \psi_i(\xi_i s_i - \varphi_i(s_i))],$$

$$h_i(\xi_i) = \max_{s_i} [\varphi_i(s_i) - \psi_i(\xi_i s_i - \varphi_i(s_i))],$$

$$v_i(c) : h_i(v_i(c)) = \varphi_i(c).$$

Учитывая свойства функций $\varphi_i(\cdot)$, можно утверждать (см. лемму в приложении), что $s_i(\xi_i)$ убывает по ξ_i для любого $i = 1, \ldots, n$.

Доказано [1], что в системе существует равновесие Нэша $\xi_i^* = \xi_{i_n}$, т. е. величина ξ_{i_n} полностью определяет распределение ресурса. Поэтому важным является вопрос о выборе проигравшим величины ξ_{i_n}, в частности о влиянии коалиции между победителями и проигравшим на ξ_{i_n}.

2. Коалиции между победителями и проигравшим и их влияние на эффективность функционирования системы

Очевидно, что проигравшему невыгодно сообщать оценку $\xi_{i_n} > v_{i_{n-1}}(c)$. Поскольку с увеличением ξ_{i_n} увеличивается количество ресурса c, которое получает проигравший, то он будет сообщать оценку $\xi_{i_n} = v_{i_{n-1}}(c)$ и, следовательно, максимальное количество ресурса, которое может получить проигравший, определяется из условия

$$(4) \qquad \sum_{i\in Q} s_i(v_{i_{n-1}}(c_{\max})) + c_{\max} = R.$$

Обозначим $\xi_{i_n}^{\max} = v_{i_{n-1}}(c_{\max})$.

Предположим теперь, что победители вступают в коалицию с проигравшим, и он начинает снижать оценку ξ_{i_n}. В результате победители получают дополнительный ресурс. Но, чтобы коалиция была выгодна проигравшему, победители должны компенсировать уменьшение его целевой функции (из-за уменьшения величины c).

Возможны два способа такой компенсации.

Случай А. Победители передают проигравшему часть своего ресурса.

Случай Б. Победители передают проигравшему часть выиграша.

Рассмотрим каждый случай.

Пусть проигравший сообщает некоторую оценку $\tilde{\xi}_{i_n} < \xi_{i_n}^{\max}$ и получает ресурс (в соответствии с условием (3)) в количестве $\tilde{c} < c_{\max}$, т. е.

$$(5) \qquad \sum_{i\in Q} s_i(\tilde{\xi}_{i_n}) + \tilde{c} = R.$$

В случае A победители должны передавать проигравшему ресурс $\Delta \geqslant c_{\max} - \tilde{c}$ (иначе коалиция будет невыгодна для проигравшего), иными словами, должно выполняться условие

$$(6) \qquad \sum_{i\in Q} \Delta_i \geqslant c_{\max} - \tilde{c},$$

где Δ_i — количество ресурса, которое i-й победитель передает проигравшему.

Учитывая результат работы [1] о том, что $\{s_i(\xi_{i_n}^{\max})\}$ является оптимальным распределением ресурса $R - c_{\max}$ среди победителей, и условие (6), можно утверждать, что описанная коалиция между победителями и проигравшим в случае А, вообще говоря, может снизить эффективность функционирования системы. В частном случае, когда выполнены условия $\sum_{i\in Q} \Delta_i = c_{\max} - \tilde{c}$, $\Delta_i = s_i(\tilde{\xi}_{i_n}) - s_i(\xi_{i_n}^{\max})$ $i \in Q$, распределения ресурса до и после образования коалиции совпадают, следовательно, эффективность в обоих случаях одна и та же. Однако ниже будет показано, что в случае А коалиция между победителями и проигравшим не образуется и, тем самым, снижения эффективности функционирования системы не происходит.

Будем предполагать, что коалиция между победителями и проигравшим не образуется, если хотя бы один победитель получает, после образования коалиции, выигрыш, который меньше его выигрыша до образования коалиции.

Теорема 1. В случае А коалиция между победителями и проигравшим не образуется.

Доказательство теоремы приведено в приложении.

Заметим, что аналогичным образом легко показать, что в случае А не образуется коалиция между проигравшим и частью победителей.

Итак, победителям невыгодно образовывать коалицию с проигравшим, передавая ему часть своего ресурса.

Однако возможен иной механизм образования коалиции, при котором победители передают проигравшему часть своих выигрышей (случай Б).

Будем, как и прежде, считать, что проигравший сообщает некоторую оценку $\tilde{\xi}_{i_n} < \xi_{i_n}^{\max}$ и получает, согласно условию (5), ресурс $\tilde{c}$. Выигрыш проигравшего до образования коалиции равен

$$\overline{W}_{i_n} = \varphi_{i_n}(c_{\max}),$$

а после образования

$$\tilde{W}_{i_n} = \varphi_{i_n}(\tilde{c}).$$

Следовательно, чтобы коалиция была выгодна проигравшему, необходимо, чтобы победители передали ему выигрыш $\Delta \geqslant \varphi_{i_n}(c_{\max}) - \varphi_{i_n}(\tilde{c})$, поэтому выигрыши победителей до и после образования коалиции равны

$$\overline{W}_i=\varphi_i(s_i(\xi_{i_n}^{\max}))-\psi_i(\xi_{i_n}^{\max}s_i(\xi_{i_n}^{\max})-\varphi_i(s_i(\xi_{i_n}^{\max}))),$$

$$\tilde{W}_i=\varphi_i(s_i(\tilde{\xi}_{i_n}))-\psi_i(\tilde{\xi}_{i_n}s_i(\tilde{\xi}_{i_n})-\varphi_i(s_i(\tilde{\xi}_{i_n})))-\Delta_i,\ i\in Q$$

соответственно, где $\sum_{i\in Q}\Delta_i=\Delta$.

Естественно по-прежнему считать, что коалиция не образуется, если хотя бы для одного из победителей выполняется условие

$$(7)\qquad \tilde{W}_i<\overline{W}_i.$$

Исследование более конкретных примеров показало, что в случае Б коалиция между победителями и проигравшим возможна. Однако справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. В случае Б коалиция между победителями и проигравшим не уменьшает эффективности функционирования системы, если:

1) в системе действуют «сильные» штрафы;
2) при «слабых» штрафах выполняется условие

$$(1+\alpha)s_i\varphi_i''(s_i)+\varphi_i'(s_i)\geqslant 0$$

для всех $i\in Q$.

Условие 2) теоремы 2 можно рассматривать как ограничение, определяющее некоторое множество значений параметра α. Получим оценку этого множества.

Определим значение $\xi_{i_n}^{\min}$, такое, что

$$\sum_{i\in Q}s_i(\xi_{i_n}^{\min})=R,$$

т. е. проигравший получит $c=0$, если сообщит оценку $\xi_{i_n}^{\min}$.

Следствие. Условие 2) теоремы 2 выполняется для всех α, удовлетворяющих неравенствам

$$0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_{\text{в}},$$

где

$$\alpha_{\text{в}}=-\max_{i\in Q}\ \max_{s_i(\xi_{i_n}^{\max})\leqslant s_i\leqslant s_i(\xi_{i_n}^{\min})}\frac{s_i\varphi_i''(s_i)+\varphi_i'(s_i)}{s_i\varphi_i''(s_i)}>0.$$

Доказательство теоремы 2 и следствия приведено в приложении.

Далее, в случае Б возможна коалиция между проигравшим и частью (даже одним из) победителей. Теорема 2 справедлива и в этом случае.

К сожалению, не удалось получить достаточно общих условий образования коалиции в случае Б, поэтому в качестве иллюстрации рассмотрим следующий пример.

3. Пример

Рассматривается система, состоящая из центра и n элементов, производственные функции которых имеют вид $\varphi_i(x_i)=\sqrt{r_ix_i}$, r_i — параметры. Для определенности будем считать, что выполняются неравенства $r_1\geqslant\ldots\geqslant r_{n-1}>r_n$.

Используя определения функций $s_i(\xi_i)$, $h_i(\xi_i)$ и $v_i(c)$, легко показать, что

$$s_i(\xi_i)=\begin{cases}\dfrac{(1+\alpha)^3 r_i}{4\alpha^2\xi_i^2}, & \text{если } \alpha\leqslant 1,\\[2mm] \dfrac{r_i}{\xi_i^2}, & \text{если } \alpha\geqslant 1;\end{cases}$$

$$h_i(\xi_i)=\begin{cases}\dfrac{(1+\alpha)^2 r_i}{4\alpha\xi_i}, & \text{если } \alpha\leqslant 1,\\[2mm] \dfrac{r_i}{\xi} & \text{если } \alpha\geqslant 1;\end{cases}$$

$$v_i(c)=\begin{cases}\dfrac{(1+\alpha)^2}{4\alpha}\sqrt{\dfrac{r_i}{c}}, & \text{если } \alpha\leqslant 1,\\[2mm] \sqrt{\dfrac{r_i}{c}}, & \text{если } \alpha\geqslant 1.\end{cases}$$

Из выражения для $v_i(c)$ видно, что проигравшим в конкурсе будет элемент с номером n, так как $v_n(c)<v_i(c)$, $i=1,\ldots,n-1$.

Исследуем модель при $\alpha\geqslant 1$.

Из условия (4) находим

$$c_{\max}=R-H/\xi_{i_n}^{\max 2}=R\Big/\left(1+\frac{H}{r_{n-1}}\right),\quad\text{где } H=\sum_{i=1}^{n-1} r_i,$$

$$\xi_{i_n}^{\max}=\sqrt{\frac{H}{R-c_{\max}}}=\sqrt{\frac{H+r_{n-1}}{R}}.$$

Аналогично

$$\tilde\xi_{i_n}=\sqrt{\frac{H}{R-\tilde c}},$$

поэтому

$$h_i(\tilde\xi_{i_n})=r_i\sqrt{\frac{R-\tilde c}{H}},\qquad h_i(\xi_{i_n}^{\max})=r_i\sqrt{\frac{R-c_{\max}}{H}},\quad i=1,\ldots,n-1.$$

Из выражения для $\tilde W_i$, $\overline{W}_i$, Δ и условия (7) следует, что коалиция выгодна для всех элементов, если выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{n-1}[h_i(\tilde\xi_{i_n})-h_i(\xi_{i_n}^{\max})]\geqslant\varphi_{i_n}(c_{\max})-\varphi_{i_n}(\tilde c)$$

или

$$\sqrt{H(R-c_{\max})}\left[\sqrt{\frac{R-\tilde c}{R-c_{\max}}}-1\right]\geqslant\sqrt{r_n c_{\max}}-\sqrt{r_n\tilde c}. \tag{8}$$

Рассмотрим предельный случай, когда $r_{n-1}\gg r_n$ или $H\gg r_n$. Обозначим

$\delta = c_{\max} - \tilde{c}$. Так как

$$R - c_{\max} = R\frac{H}{H + r_{n-1}},$$

то с учетом формулы Тейлора

$$\sqrt{H(R - c_{\max})}\left[\sqrt{\frac{R - \tilde{c}}{R - c_{\max}}} - 1\right] \simeq \frac{\delta}{2}\sqrt{\frac{H + r_{n-1}}{R}}$$

и, следовательно, при достаточно большом H неравенство (8) выполняется.

Покажем, что возможна и обратная ситуация, когда коалиция не образуется.

Пусть $r_{n-1} = r_n$ и $n = 2$, тогда

$$h_1(\xi_2) - h_1(\xi_2^{\max}) = \sqrt{r_1(R - c_{\max})}\left[\sqrt{\frac{R - \tilde{c}}{R - c_{\max}}} - 1\right] \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{r_1}{2R}}\,(c_{\max} - \tilde{c}) < \sqrt{\frac{2c_{\max} r_1}{R}}\,(\sqrt{c_{\max}} - \sqrt{\tilde{c}}) =$$

$$= \sqrt{r_1}(\sqrt{c_{\max}} - \sqrt{\tilde{c}}) = \sqrt{r_2}(\sqrt{c_{\max}} - \sqrt{\tilde{c}}) = \varphi_2(c_{\max}) - \varphi_2(\tilde{c}),$$

следовательно, коалиция не образуется.

В случае $\alpha \leqslant 1$ результаты принципиально не отличаются от случая $\alpha \geqslant 1$.

4. Заключение

Проведенное в работе исследование показывает, что в случае конкурсного механизма распределения ресурса коалиция между победителями и проигравшим возможна лишь в случае, когда победители передают проигравшему часть своих выигрышей. Такая коалиция, однако, в ряде случаев (теорема 2) не приводят к снижению эффективности функционирования системы. Если победители передают проигравшему часть своего ресурса, то коалиция между ними не образуется.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Лемма. Для любого $i = 1, \ldots, n$ функция $s_i(\xi_i)$ убывает по ξ_i.

Доказательство. Определим величину $\tilde{s}_i(\xi_i)$ из условия $\xi_i \tilde{s}_i(\xi_i) = \varphi_i(\tilde{s}_i(\xi_i))$. Очевидно, что $s_i(\xi_i) \geqslant \tilde{s}_i(\xi_i)$, т. е. выполняется неравенство

$$\xi_i s_i(\xi_i) \geqslant \varphi_i(s_i(\xi_i)). \tag{П.1}$$

Доказательство леммы будем проводить от противного, т. е. предположим, что для некоторых ξ_i' и ξ_i''. $\xi_i' < \xi_i''$ выполняется неравенство

$$s_i(\xi_i') \leqslant s_i(\xi_i''). \tag{П.2}$$

Из определения функции $s_i(\xi_i)$ имеем:

$$\varphi_i(s_i(\xi_i')) - \psi_i(\xi_i' s_i(\xi_i') - \varphi_i(s_i(\xi_i'))) >$$
$$> \varphi_i(s_i(\xi_i'')) - \psi_i(\xi_i' s_i(\xi_i'') - \varphi_i(s_i(\xi_i''))),$$

$$\varphi_i(s_i(\xi_i')) - \psi_i(\xi_i'' s_i(\xi_i') - \varphi_i(s_i(\xi_i'))) <$$
$$< \varphi_i(s_i(\xi_i'')) - \varphi_i(\xi_i'' s_i(\xi_i'') - \varphi_i(s_i(\xi_i''))),$$

откуда получаем

$$\psi_i(\xi_i'' s_i(\xi_i') - \varphi_i(s_i(\xi_i'))) - \psi_i(\xi_i' s_i(\xi_i') - \varphi_i(s_i(\xi_i'))) > \tag{П.3}$$
$$> \psi_i(\xi_i'' s_i(\xi_i'') - \varphi_i(s_i(\xi_i''))) - \psi_i(\xi_i' s_i(\xi_i'') - \varphi_i(s_i(\xi_i''))).$$

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $\xi_i' s_i(\xi_i') > \varphi_i(s_i(\xi_i'))$. Тогда, используя предположение (П.2) и свойства функции $\varphi_i(s_i)$, легко показать, что $\xi_i'' s_i(\xi_i') > \varphi_i(s_i(\xi_i'))$, $\xi_i' s_i(\xi_i'') > \varphi_i(s_i(\xi_i''))$, $\xi_i'' s_i(\xi_i'') > \varphi_i(s_i(\xi_i''))$ и, следовательно,

$$\alpha(\xi_i'' s_i(\xi_i') - \varphi_i(s_i(\xi_i'))) - \alpha(\xi_i' s_i(\xi_i') - \varphi_i(s_i(\xi_i'))) >$$
$$> \alpha(\xi_i'' s_i(\xi_i'') - \varphi_i(s_i(\xi_i''))) - \alpha(\xi_i' s_i(\xi_i'') - \varphi_i(s_i(\xi_i''))).$$

Окончательно получаем неравенство

$$\text{(П.4)} \qquad \alpha(\xi_i'' - \xi_i')(s_i(\xi_i') - s_i(\xi_i'')) > 0,$$

которое противоречит (П.2).

2. Если $\xi_i' s_i(\xi_i') = \varphi_i(s_i(\xi_i'))$, то $\xi_i'' s_i(\xi_i') > \varphi_i(s_i(\xi_i'))$, $\xi_i' s_i(\xi_i'') > \varphi_i(s_i(\xi_i''))$, $\xi_i'' s_i(\xi_i'') > \varphi_i(s_i(\xi_i''))$, и аналогично случаю 1 получаем, что выполнено неравенство (П.4), противоречащее (П.2).

Таким образом лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Покажем сначала, что найдется хотя бы один победитель, такой, что выполняется неравенство

$$\text{(П.5)} \qquad \Delta_i \geqslant s_i(\tilde{\xi}_{i_n}) - s_i(\xi_{i_n}^{\max}).$$

Предположим противное, т. е. пусть для всех $i \in Q$

$$\Delta_i < s_i(\tilde{\xi}_{i_n}) - s_i(\xi_{i_n}^{\max}).$$

Тогда справедливо условие

$$\text{(П.6)} \qquad \sum_{i \in Q} \Delta_i < \sum_{i \in Q} [s_i(\tilde{\xi}_{i_n}) - s_i(\xi_{i_n}^{\max})].$$

С другой стороны (согласно (4) и (5)),

$$\sum_{i \in Q} [s_i(\tilde{\xi}_{i_n}) - s_i(\xi_{i_n}^{\max})] = c_{\max} - \tilde{c}.$$

Следовательно, выполняется неравенство

$$\sum_{i \in Q} \Delta_i < c_{\max} - \tilde{c},$$

которое противоречит условию (6). Таким образом, хотя бы для одного потребителя выполняется (П.5).

Запишем теперь для этого потребителя выигрыш до и после образования коалиции:

$$\overline{W}_i = \varphi_i(s_i(\xi_{i_n}^{\max})) - \psi_i(\xi_{i_n}^{\max} s_i(\xi_{i_n}^{\max}) - \varphi_i(s_i(\xi_{i_n}^{\max}))),$$

$$\tilde{W}_i = \varphi_i(s_i(\tilde{\xi}_{i_n}) - \Delta_i) - \psi_i(\tilde{\xi}_{i_n} s_i(\tilde{\xi}_{i_n}) - \varphi_i(s_i(\tilde{\xi}_{i_n}) - \Delta_i)).$$

Из этих выражений (с учетом (П.5)) видно, что i-му потребителю невыгодно вступать в коалицию, если выполняется условие

$$\text{(П.7)} \qquad \psi_i(\xi_{i_n}^{\max} s_i(\xi_{i_n}^{\max}) - \varphi_i(s_i(\xi_{i_n}^{\max}))) < \psi_i(\tilde{\xi}_{i_n} s_i(\tilde{\xi}_{i_n}) - \varphi_i(s_i(\tilde{\xi}_{i_n}) - \Delta_i)).$$

Покажем сначала, что функция $\xi_i s_i(\xi_i)$ убывает по ξ_i. Рассмотрим произвольные ξ_i' и ξ_i'', $\xi_i' > \xi_i''$. Согласно лемме, $s_i(\xi_i') < s_i(\xi_i'')$, а согласно (П.1),

$$\xi_i s_i(\xi_i) \geqslant \varphi_i(s_i(\xi_i)).$$

1. Пусть $\xi_i' s_i(\xi_i') = \varphi_i(s_i(\xi_i'))$, тогда

$$\xi_i'' s_i(\xi_i'') \geqslant \varphi_i(s_i(\xi_i'')) > \varphi_i(s_i(\xi_i')),$$

т. е. $\xi_i' s_i(\xi_i') < \xi_i'' s_i(\xi_i'')$.

2. Пусть $\xi_i' s_i(\xi_i') > \varphi_i(s_i(\xi_i'))$ и $\xi_i'' s_i(\xi_i'') > \varphi_i(s_i(\xi_i''))$. Поскольку функция $\varphi_i(s_i)$ является непрерывно дифференцируемой, то выполняются условия:

$$\left.\frac{d\varphi_i}{ds_i}\right|_{s_i(\xi_i')} = \frac{\alpha}{1+\alpha}\,\xi_i',$$

$$\left.\frac{d\varphi_i}{ds_i}\right|_{s_i(\xi_i'')} = \frac{\alpha}{1+\alpha}\,\xi_i'',$$

и, для того чтобы было справедливо неравенство $\xi_i' s_i(\xi_i') < \xi_i'' s_i(\xi_i'')$, необходимо выполнение условия

$$\text{(П.8)}\qquad \left.\frac{d\varphi_i}{ds_i}\right|_{s(\xi_i'')} \Big/ \left.\frac{d\varphi_i}{ds_i}\right|_{s_i(\xi_i')} > \frac{s_i(\xi_i')}{s_i(\xi_i'')}.$$

Поскольку

$$\left.\frac{d\varphi_i}{ds_i}\right|_{s_i(\xi_i'')} \leqslant \frac{\varphi_i(s_i(\xi_i''))}{s_i(\xi_i'')},$$

$$\left.\frac{d\varphi_i}{ds_i}\right|_{s_i(\xi_i')} \geqslant \frac{\varphi_i(s_i(\xi_i''))-\varphi_i(s_i(\xi_i'))}{s_i(\xi_i'')-s_i(\xi_i')},$$

$$\frac{\varphi_i(s_i(\xi_i''))-\varphi_i(s_i(\xi_i'))}{s_i(\xi_i'')-s_i(\xi_i')} \leqslant \frac{\varphi_i(s_i(\xi_i''))}{s_i(\xi_i'')} < \frac{\varphi_i(s_i(\xi_i''))}{s_i(\xi_i')},$$

то неравенство (П.8) выполняется и, следовательно, $\xi_i' s_i(\xi_i') < \xi_i'' s_i(\xi_i'')$.

3. Пусть $\xi_i' s_i(\xi_i') > \varphi_i(s_i(\xi_i'))$ и $\xi_i'' s_i(\xi_i'') = \varphi_i(s_i(\xi_i''))$. Определим $\bar{s}_i(\xi_i'')$ из условия

$$\bar{s}_i(\xi_i'') \in \operatorname{Arg}\max_{s_i}[(1+\alpha)\varphi_i(s_i) - \alpha\xi_i'' s_i].$$

Очевидно, что $\bar{s}_i(\xi_i'') \leqslant s_i(\xi_i'')$, поэтому

$$\xi_i' s_i(\xi_i') < \xi_i'' \bar{s}_i(\xi_i'') \leqslant \xi_i'' s_i(\xi_i'').$$

Таким образом, поскольку $\xi_{i_n}^{\max} s_i(\xi_{i_n}^{\max}) < \tilde{\xi}_{i_n} s_i(\tilde{\xi}_{i_n})$, $\varphi_i(s_i(\xi_{i_n}^{\max})) \geqslant \varphi_i(s_i(\tilde{\xi}_{i_n}) - \Delta_i)$, то справедливо неравенство (П.7), тем самым теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Запишем значения целевой функции центра до образования коалиции $\overline{W}_ц$ и после образования – $\tilde{W}_ц$:

$$\overline{W}_ц = \sum_{i\in Q} \varphi_i(s_i(\xi_{i_n}^{\max})) + \varphi_{i_n}(c_{\max}),$$

$$\tilde{W}_ц = \sum_{i\in Q} \varphi_i(s_i(\tilde{\xi}_{i_n})) + \varphi_{i_n}(\tilde{c}).$$

Если в системе действуют «сильные» штрафы, то $\psi_i(\tilde{\xi}_{i_n} s_i(\tilde{\xi}_{i_n}) - \varphi_i(s_i(\tilde{\xi}_{i_n}))) = 0$, $\psi_i(\xi_{i_n}^{\max} s_i(\xi_{i_n}^{\max}) - \varphi_i(s_i(\xi_{i_n}^{\max}))) = 0$, поэтому, учитывая неравенство $\sum_{i\in Q} \Delta_i \geqslant \varphi_{i_n}(c_{\max}) - \varphi_{i_n}(\tilde{c})$, имеем

$$\tilde{W}_ц - \overline{W}_ц = \sum_{i\in Q} [\varphi_i(s_i(\tilde{\xi}_{i_n})) - \varphi_i(s_i(\xi_{i_n}^{\max}))] - [\varphi_{i_n}(c_{\max}) - \varphi_{i_n}(\tilde{c})] \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i\in Q} [\varphi_i(s_i(\tilde{\xi}_{i_n})) - \varphi_i(s_i(\xi_{i_n}^{\max}))] - \sum_{i\in Q} \Delta_i = \sum_{i\in Q} [\tilde{W}_i - \overline{W}_i].$$

Поскольку, по предположению, коалиция между победителями и проигравшим образуется лишь в том случае, если для всех $i \in Q$ выполняется условие $\tilde{W}_i \geqslant \overline{W}_i$, то окончательно получим

$$\tilde{W}_\text{ц} \geqslant \overline{W}_\text{ц}.$$

В случае «слабых» штрафов для доказательства теоремы достаточно показать, что выполняется неравенство

$$\psi_i(\tilde{\xi}_{i_n} s_i(\tilde{\xi}_{i_n}) - \varphi_i(s_i(\tilde{\xi}_{i_n}))) \geqslant \psi_i(\overset{\max}{\xi_{i_n}} s_i(\overset{\max}{\xi_{i_n}}) - \varphi_i(s_i(\overset{\max}{\xi_{i_n}}))).$$

Если $\psi_i(\overset{\max}{\xi_{i_n}} s_i(\overset{\max}{\xi_{i_n}}) - \varphi_i(s_i(\overset{\max}{\xi_{i_n}}))) = 0$, то неравенство очевидно.

Пусть $\psi_i(\overset{\max}{\xi_{i_n}} s_i(\overset{\max}{\xi_{i_n}}) - \varphi_i(s_i(\overset{\max}{\xi_{i_n}}))) > 0$. Нужно показать, что функция $\alpha(\xi_i \cdot s_i(\xi_i) - \varphi_i(s_i(\xi_i)))$ возрастает по $s_i(\xi_i)$ (что то же самое, убывает по ξ_i).

Поскольку

$$\xi_i = \frac{1+\alpha}{\alpha} \varphi_i'(s_i)\,|_{s_i = s_i(\xi_i)},$$

то

$$\alpha(\xi_i s_i(\xi_i) - \varphi_i(s_i(\xi_i))) = (1+\alpha) s_i(\xi_i) \varphi_i'(s_i(\xi_i)) - \alpha\varphi_i(s_i(\xi_i)).$$

Условие возрастания функции $\alpha(\xi_i s_i(\xi_i) - \varphi_i(s_i(\xi_i)))$ имеет, таким образом, следующий вид:

$$(1+\alpha) s_i(\xi_i) \varphi_i''(s_i(\xi_i)) + \varphi_i'(s_i(\xi_i)) \geqslant 0.$$

Учитывая доказанное неравенство, имеем

$$\tilde{W}_\text{ц} - \overline{W}_\text{ц} = \sum_{i \in Q} [\varphi_i(s_i(\tilde{\xi}_{i_n})) - \varphi_i(s_i(\overset{\max}{\xi_{i_n}}))] - [\varphi_{i_n}(c_{\max}) - \varphi_{i_n}(\tilde{c})] \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i \in Q} [\varphi_i(s_i(\tilde{\xi}_{i_n})) - \psi_i(\tilde{\xi}_{i_n} s_i(\tilde{\xi}_{i_n}) - \varphi_i(s_i(\tilde{\xi}_{i_n}))) - \varphi_i(s_i(\overset{\max}{\xi_{i_n}})) +$$

$$+ \psi_i(\overset{\max}{\xi_{i_n}} s_i(\overset{\max}{\xi_{i_n}}) - \varphi_i(s_i(\overset{\max}{\xi_{i_n}})))] - \sum_{i \in Q} \Delta_i = \sum_{i \in Q} [\tilde{W}_i - \overline{W}_i].$$

Окончательно получаем

$$\tilde{W}_\text{ц} \geqslant \overline{W}_\text{ц},$$

и тем самым теорема доказана.

Получим теперь оценку множества допустимых значений α.

Неравенство $\alpha \geqslant 0$ выполняется по предположению.

Из неравенства $(1+\alpha) s_i \varphi_i''(s_i) + \varphi_i'(s_i) \geqslant 0$ имеем

$$\alpha \leqslant -\frac{s_i \varphi_i''(s_i) + \varphi_i'(s_i)}{s_i \varphi_i''(s_i)}.$$

Поскольку $s_i(\overset{\max}{\xi_{i_n}}) \leqslant s_i \leqslant s_i(\overset{\min}{\xi_{i_n}})$ в процессе функционирования системы, то $\alpha \leqslant \leqslant \alpha_\text{в}$.

Неравенство $\alpha_\text{в} > 0$ следует из того, что

$$s_i \varphi_i''(s_i) < 0, \quad s_i \varphi_i''(s_i) + \varphi_i'(s_i) = \frac{\alpha}{1+\alpha} [\xi_i s_i(\xi_i)]_{s_i(\xi_i)} > 0$$

(см. доказательство теоремы 1).

Теорема и следствие доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бурков В. Н., Данев Б., Еналеев А. К. и др.* Конкурсные механизмы в задачах распределения ограниченных ресурсов//АиТ. 1988. № 11. С. 142–153.

Поступила в редакцию
2.III.1988

COALITIONS IN A COMPETITION MECHANISM OF RESOURCE ALLOCATION

BURKOV V. N., YENALEEV A. K., KALENCHUK V. F.

In analyzing the competion mechanism of respurce allocation among n users it has been found [1] that (1) a Nash equilibrium exists which is determined by the behavioral strategy of the «best» loser and (2) that the resource allocation is near-optimal. Unlike [1] which assumed that the winners and losers do not make coalitions, the conditions for such coalitions and the impact made by the coalitions on the system efficiency are analyzed.