

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ АГРЕГИРОВАНИИ

АДИЛОВ Г. Р., ОПОЙЦЕВ В. И.

(Москва)

Изучаются системы, в которых агрегирование при увеличении размерности асимптотически идеально, т. е. ошибки упрощенного макроописания, понимаемые в среднестатистическом смысле, стремятся к нулю.

1. Введение

Описание сложных технических и экономических систем, как правило, опирается на использование агрегированных переменных. Причины очевидны — детальное описание громоздко и необозримо, не помещается в память ЭВМ, большая размерность не позволяет решать возникающие задачи в приемлемое время и т. п. Есть и другая, более веская причина. Детальное микроописание обычно не нужно, бесполезно. Предположим, например, что речь идет об оптимизационной задаче большой размерности. Даже если получено ее точное решение, это часто мало что дает. Дело в том, что при реализации вычисленного решения на практике возникают различные неувязки, случайные сбои, несогласованность. В результате система все равно функционирует в неоптимальном режиме.

Исследование методов агрегирования идет в основном по двум путям. На первом из них занимаются поисками систем, в которых оказывается возможно идеальное агрегирование без каких бы то ни было информационных потерь. Естественно, что такие системы уникальны, редки, и их изучение ничего не дает для стандартных ситуаций. Второй путь более прагматичен. Здесь изучаются, если можно так выразиться, «методы насильственного агрегирования», которые сводятся к принудительному выделению агрегатов и последующим оценкам потерь в качестве описания [1].

В данной статье, как и в [2], проблема агрегирования рассматривается в совершенно ином ракурсе. Изучаются системы, в которых агрегирование при увеличении размерности асимптотически идеально. Существенно, что под асимптотической идеальностью агрегирования здесь подразумевается стремление к нулю (с ростом размерности) ошибок упрощенного макроописания, которые понимаются в среднестатистическом смысле.

Подчеркнем, что приводимые далее примеры носят сугубо модельный характер, служат иллюстрацией общей идеи и не претендуют на непосредственные практические применения.

2. Агрегирование производственной функции Кобба — Дугласа

Для описания производства часто используется производственная функция Кобба — Дугласа

$$(1) \quad s(\mathbf{x}) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n},$$

где

$$(2) \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

При больших размерностях возникает потребность оценить значение $s(\mathbf{x})$ по нескольким агрегатам типа $X^i = \sum_j a_{ij} x_j$. Рассмотрим для простоты задачу оценки $s(\mathbf{x})$ с помощью лишь одного агрегата

$$(3) \quad X = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

На первый взгляд, представляется невероятным, чтобы значение лишь величины X позволяло сколько-нибудь точно оценить значение $s(\mathbf{x})$. И тем не менее, для систем достаточно большой размерности это так. Забегая вперед и игнорируя некоторые детали, соответствующий результат можно сформулировать следующим образом.

При достаточно больших n почти для всех векторов \mathbf{x} сколько угодно точно выполняется равенство

$$(4) \quad s(\mathbf{x}) = e^{-c} X = e^{-c} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

где C — постоянная Эйлера. Обозначим через Q симплекс

$$Q = \{x | x_1 + x_2 + \dots + x_n = h, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}\},$$

площадь которого равна

$$S = \int \dots \int_{\mathbf{x} \in Q} dS = \frac{\sqrt{n} h^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Опираясь на формулу Дирихле

$$\int \dots \int_{\substack{x_1 + \dots + x_n \leq 1 \\ x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0}} x_1^{p_1-1} \dots x_n^{p_n-1} dx_1 \dots dx_n = \frac{\Gamma(p_1) \dots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + \dots + p_n)}$$

легко вычислить поверхностный интеграл

$$(5) \quad \int \dots \int_{\mathbf{x} \in Q} s(\mathbf{x}) dS = \frac{\sqrt{n} A_n h^n}{n!},$$

где

$$A_n = \Gamma(\alpha_1 + 1) \dots \Gamma(\alpha_n + 1).$$

В (5) $s(\mathbf{x})$ определяется по формуле (1), причем учитывается условие (2).

Среднее значение $s(\mathbf{x})$ на симплексе Q будет равно

$$(6) \quad \bar{s}(\mathbf{x}) = \frac{1}{S} \int \dots \int_{\mathbf{x} \in Q} s(\mathbf{x}) dS = A_n \frac{h}{n} = A_n X.$$

Лемма 1. Пусть $n \rightarrow \infty$ и при этом

$$(7) \quad \max_j \alpha_j < \frac{M}{n} < 1.$$

Тогда $A_n \rightarrow e^{-C}$.

Остановимся сначала на простой ситуации, когда все $\alpha_i = 1/n$. Тогда

$$\ln A_n = n \ln \Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right) = n \left\{ \Gamma'(1) \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right\}.$$

Учитывая, что $\Gamma'(1) = -C$, получаем $A_n \rightarrow e^{-C}$.

В общем случае

$$\begin{aligned} \ln A_n &= \sum_{i=1}^n \ln \Gamma(1 + \alpha_i) = \Gamma'(1) \sum_{i=1}^n \alpha_i + o\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2\right) = \\ &= \Gamma'(1) + o\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right) \end{aligned}$$

и вывод получается тот же самый, что доказывает лемму.

Условие (7) здесь обеспечивает

$$(8) \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = o\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right),$$

что, собственно, и требуется. Поэтому (7) можно заменить любым другим условием, которое приводит к (8).

Проверим теперь, что среднее значение (6) довольно точно оценивает функцию $s(x)$ для большинства векторов $\mathbf{x} \in Q$. Для этого убедимся, что относительная среднеквадратичная ошибка такой оценки при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю.

Определим сначала «дисперсию»

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= \frac{1}{S} \int \dots \int_{\mathbf{x} \in Q} \left\{ x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} - \frac{A_n h}{n} \right\}^2 dS = \\ &= \frac{1}{S} \int \dots \int_{\mathbf{x} \in Q} x_1^{2\alpha_1} \dots x_n^{2\alpha_n} dS - \frac{A_n^2 h^2}{n^2} = \left\{ \frac{\bar{A}_n}{n(n+1)} - \frac{A_n^2}{n^2} \right\} h^2, \end{aligned}$$

где

$$\bar{A}_n = \Gamma(1+2\alpha_1) \dots \Gamma(1+2\alpha_n).$$

Квадрат относительной ошибки получается равным

$$\frac{\sigma_n^2}{\bar{s}^2(\mathbf{x})} = \frac{n}{n+1} \frac{\bar{A}_n}{A_n^2} - 1.$$

При условии (8) имеем

$$\ln \bar{A}_n = -C \sum_i 2\alpha_i + o\left(\sum_i \alpha_i\right) = -2C + o\left(\sum_i \alpha_i\right),$$

$$\ln A_n^2 = 2 \ln A_n = -2C + o\left(\sum_i \alpha_i\right).$$

Эти разложения с учетом приведенных выше формул легко позволяют прийти к следующему заключению.

Теорема 1. Пусть $n \rightarrow \infty$ и при этом выполняется (например) условие (7). Тогда среднее значение (6) функции $s(x)$ дает в пределе точное значение $s(x)$ почти для всех x в следующем смысле. Относительная среднеквадратическая ошибка $s(x) - \bar{s}(x)$ стремится к нулю.

Теорема 1 представляет определенный интерес сама по себе, поскольку функции Кобба — Дугласа довольно широко распространены на практике. Однако в первую очередь она имеет эталонное значение, демонстрируя ошибочность широко распространенного мнения об обязательном усложнении задач при увеличении размерности. Здесь ситуация обратная. Чем размерность больше, тем функцию $s(x)$ проще вычислять. При этом не надо вникать в детальное описание используемых ресурсов — достаточно знать лишь один агрегат.

3. Распределение ресурса

Рассмотрим с прежних позиций задачу распределения одномерного ресурса

$$(9) \quad \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i) \rightarrow \max, \quad \sum_{i=1}^n x_i = R.$$

Для определенности положим $\varphi_i(x_i) = r_i \sqrt{x_i}$. Посчитаем сначала средний эффект

$$s(x) = \sum_{i=1}^n r_i \sqrt{x_i},$$

если векторы x равномерно распределены на гиперплоскости $\sum_i x_i = R$.

Очевидно ($x \geq 0$ везде подразумевается),

$$\begin{aligned} \int_{x_1 + \dots + x_n \leq R} \dots \int \sqrt{x_1} dx_1 \dots dx_n &= \int \left\{ \int_{x_1 + \dots + x_n \leq R - x_1} \dots \int \sqrt{x_1} dx_2 \dots dx_n \right\} dx_1 = \\ &= \int_0^R \frac{(R - x_1)^{n-1}}{(n-1)!} dx_1 = \frac{R^{n+1/2}}{(n-1)!} \int_0^1 z^{1/2} (1-z)^{n-1} dz = \\ &= \frac{R^{n+1/2}}{(n-1)!} B\left(\frac{3}{2}, n\right) = \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(n+3/2)} R^{n+1/2}. \end{aligned}$$

Выписывая теперь подобный интеграл по области $x_1 + \dots + x_n \leq \lambda R$, вычитая его из предыдущего, деля разность на высоту слоя и устремляя $\lambda \rightarrow 1$,

получим

$$(10) \quad \int_{x_1+\dots+x_n=R} \dots \int \sqrt{x_1} dS = \frac{\Gamma(3/2) (n+1/2)}{\Gamma(n+3/2) \sqrt{n}} R^{n-1/2}.$$

Учитывая теперь, что

$$\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

и деля (10) на площадь симплекса $x_1+\dots+x_n=R$, получаем

$$\frac{1}{S} \int_{x_1+\dots+x_n=R} \dots \int \sqrt{x_1} dS = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+1/2)} R^{1/2}.$$

Далее легко получаем среднее значение

$$\begin{aligned} \bar{s} &= \frac{1}{S} \int_{x_1+\dots+x_n=R} \dots \int \sum_i r_i \sqrt{x_i} dS = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+1/2)} \sum_{i=1}^n r_i R^{1/2} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(n) \sqrt{n}}{\Gamma(n+1/2)} \sum_{i=1}^n r_i \sqrt{X}, \end{aligned}$$

где, как и прежде, $X=(x_1+\dots+x_n)/n$.

Разложение Стирлинга гамма-функции легко позволяет установить

$$\Gamma(n) \sqrt{n} / \Gamma(n+1/2) \rightarrow 1 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, при достаточно больших n средний эффект распределения ресурса сколь угодно точно определяется формулой

$$(11) \quad \bar{s} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{i=1}^n r_i \sqrt{X}.$$

Здесь, как и в предыдущем разделе, при естественных предположениях с коэффициентах r_i можно установить стремление к нулю при $n \rightarrow \infty$ относительной среднеквадратической ошибки. Таким образом, при большой размерности эффект произвольного распределения x с подавляющей вероятностью будет определяться правой частью формулы (11).

Интересно определить отличие (11) от оптимального значения (максимально возможного эффекта). Решением задачи (9) является

$$x_i = \frac{r_i^2}{r_1^2 + \dots + r_n^2} R.$$

При таком распределении ресурса эффект получается равным

$$s^* = \sqrt{r_1^2 + \dots + r_n^2} \sqrt{R} = \sqrt{r_1^2 + \dots + r_n^2} \sqrt{n} \sqrt{X}.$$

В простейшей ситуации, когда все r_i равны между собой, отношение оказывается равным

$$(12) \quad \frac{\bar{s}}{s^*} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0,89.$$

Соотношение (12) сохраняет силу и в более общих ситуациях, например когда все r_i одного порядка.

Из (12) и вышесказанного следует, что при большой размерности произвольное распределение хуже оптимального примерно на 10%. Отношение, аналогичное (12), для предыдущей задачи несколько хуже — около 0,6.

Подобные цифры заставляют задуматься вообще о целесообразности оптимизации сложных систем, по крайней мере о целесообразности детальной оптимизации. Конечно, выигрыш в 10% может быть достаточно весом. Однако, если даже оптимальное решение известно, реализовать его в сложной системе не так легко. На практике возникают различные непредвиденные обстоятельства (ресурс может испортиться или задержаться в дороге, из-за аварии или несогласованности можно не получить ожидаемого эффекта, ошибки при обработке и передаче информации и т. д.).

Разумеется, сказанное не следует воспринимать как лозунг против оптимизации. Малая эффективность оптимизации — лишь один из феноменов, которые могут проявляться в сложных системах. Для оценки роли этого феномена необходим конкретный подход к анализу конкретных решаемых задач.

Возвращаясь к задаче распределения ресурса, необходимо отметить следующее. Для задач малой размерности отношение среднего эффекта к оптимальному отлично от (12), но оно также достаточно близко к единице. Тем не менее в задачах малой размерности ситуация качественно иная. Пик оптимального эффекта здесь менее острый, и поэтому мера множества тех x , для которых эффект оказывается ниже среднего, довольно велика.

4. Оптимизация по агрегатам

В тех системах, где из-за большой размерности, неточности модельного описания, потерь при реализации и прочего детальная оптимизация невозможна, целесообразна оптимизация по агрегатам.

Рассмотрим простой пример. Пусть решается задача распределения ресурса (9), но производители разбиты на две группы и на верхнем уровне необходимо принять сначала решение о дележе ресурса между этими группами. Другими словами, перед системой стоит задача

$$(13) \quad \sum_{i=1}^n q_i \sqrt{x_i} + \sum_{i=1}^n r_i \sqrt{y_i} \rightarrow \max, \quad \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^m y_i = R,$$

но из-за иерархии управления на первом этапе ресурс делится на две части:

$$X = \sum_{i=1}^n x_i, \quad Y = \sum_{j=1}^m y_j,$$

после чего каждая группа распределяет выделенный ей ресурс самостоятельно.

Перед управляющим органом возникает проблема выбора из двух альтернатив: решать ли задачу

$$(14) \quad \sqrt{q_1^2 + \dots + q_n^2} \sqrt{X} + \sqrt{r_1^2 + \dots + r_m^2} \sqrt{Y} \rightarrow \max, \quad X + Y = R$$

или же задачу

$$(15) \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} (q_1 + \dots + q_n) \sqrt{X} + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{m}} (r_1 + \dots + r_m) \sqrt{Y}, \quad X+Y=R.$$

С точки зрения оптимизации (13) управляющему органу необходимо решать задачу (14). Но это разумно лишь в предположении, что внутри групп ресурс впоследствии будет распределяться оптимально. Если же группы будут делить ресурс неоптимально, то решение (14) может быть далеко от наилучшего. Здесь управляющему органу целесообразнее ориентироваться на агрегированные функции суммарного эффекта (11) и решать вместо (14) задачу (15).

Этот пример лишний раз подчеркивает то важное обстоятельство, что агрегированные описания подсистем нужны не только для упрощения вычислений. При поэтапном решении оптимизационных задач они просто необходимы.

5. Проблема выбора агрегатов

Вернемся к задаче агрегирования функции (1). Вместо агрегата (3) можно взять другой агрегат, линейный или нелинейный. Возьмем, например,

$$Q = \sqrt[n]{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Посчитаем среднее значение $s(x)$ на поверхности $x_1^2 + \dots + x_n^2 = R^2$ ($x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$).

С помощью формулы Дирихле заменой переменных легко вычисляется интеграл

$$\begin{aligned} & \int \dots \int_{x_1^2 + \dots + x_n^2 = R^2} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} dx_1 \dots dx_n = \\ & = \frac{n+1}{2^n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha_1}{2}\right) \dots \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha_n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{3}{2}\right)} R^n. \end{aligned}$$

Деля полученное выражение на площадь рассматриваемой поверхности

$$S = \frac{n\pi^{n/2}}{2^n \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} R^{n-1},$$

получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{S} \int \dots \int_{x_1^2 + \dots + x_n^2 = R^2} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} dx_1 \dots dx_n = \\ & = \frac{n+1}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha_1}{2}\right) \dots \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha_n}{2}\right)}{\pi^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{3}{2}\right)} \sqrt[n]{n} Q. \end{aligned}$$

Учитывая теперь, что при $n \rightarrow \infty$

$$\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) / \Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{3}{2}\right) \rightarrow 1 / \sqrt{\frac{n}{2} + 1} \rightarrow \sqrt{\frac{2}{n}},$$

$$\begin{aligned} & \ln\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha_1}{2}\right) \dots \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha_n}{2}\right) / \pi^{n/2}\right\} \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{1}{2} \Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{C}{2} - \ln 2, \end{aligned}$$

приходим к асимптотической оценке

$$\bar{s}(\mathbf{x}) \rightarrow \frac{e^{-C/2}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

Далее, так же как во втором разделе, можно показать, что относительная среднеквадратическая ошибка здесь стремится к нулю. Поэтому при больших размерностях с успехом можно пользоваться формулой

$$(16) \quad s(\mathbf{x}) \approx \frac{e^{-C/2}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

Ранее для той же цели нами была выведена формула (4). Возникает естественный вопрос: какая из формул лучше? Ответ зависит от дополнительных условий. Если при многократных вычислениях векторы \mathbf{x} равномерно распределены на плоскости $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \text{const}$, то преимущество имеет формула (4), если же векторы \mathbf{x} равномерно распределены на сфере $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \text{const}$, преимущество за формулой (16).

Проблему выбора агрегата поясняет следующий пример. Допустим, векторы \mathbf{x} равномерно распределены на евклидовой сфере, но мы принимаем «волевое решение» и хотим получить оценку $s(\mathbf{x})$ как функцию агрегата X , например

$$(17) \quad s(\mathbf{x}) = v \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

Для определения асимптотически наилучшей константы v надо вычислить интеграл

$$\frac{1}{S} \int \dots \int_{x_1^2 + \dots + x_n^2 = R^2} \frac{ns(\mathbf{x})}{x_1 + \dots + x_n} dx_1 \dots dx_n,$$

который легко вычисляется, и перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$ (учитывая $R = \sqrt{nQ}$).

В результате коэффициент v получится отличным от e^{-C} , хотя и близким к e^{-C} . Какой же оценкой пользоваться, (4) или (17)? В указанных условиях предпочтительнее будет (17), хотя ее относительная среднеквадратическая ошибка при усреднении по симплексу $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \text{const}$ уже не будет стремиться к нулю.

Дело в том, что отношение $s(\mathbf{x})/X$ строго постоянно на лучах. Выбор той или иной поверхности с равномерной мерой для усреднения порождает, вообще говоря, неравномерную меру на лучах и влияет, таким образом, на вычисляемые усредненные характеристики.

6. Численные эксперименты

В разделах 2, 3, 5 полученные результаты показывают, что при достаточно большой размерности микроописание системы довольно точно можно заменить ее макроописанием. Поскольку результаты справедливы только в пределе и скорость сходимости не оценена, выражения «достаточно большой», «довольно точно» остаются неопределенными. Чтобы показать, при какой именно размерности можно переходить к макроописанию и насколько оно точно, проведем несколько серий численных экспериментов.

1. Векторы $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_n)$ генерируются датчиком случайных чисел. Чтобы получить на симплексе $x_1+x_2+\dots+x_n=\text{const}$, $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ равномерное распределение, каждое x_i задается как независимая реализация случайной величины $-\frac{1}{\lambda} \ln \xi_i$, где ξ_i — равномерно распределенная на $[0, 1]$ случайная величина. Величины α_i задаются с помощью реализаций случайной величины $\xi_i/M+1$, что после нормировки обеспечивает справедливость (7).

Далее приводятся результаты экспериментов с $\lambda=10, M=5$.

Около тысячи раз считалось значение функции $s(\mathbf{x})=x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ для разных (нормированных) векторов \mathbf{x} . Для размерности $n=10; 50; 100; 200$ значения соотношений $\bar{s}(\mathbf{x})/X$ были равны соответственно ($e^{-c}=0,5616$)

$$\bar{s}(\mathbf{x})/X = e^{-c} + 0,0517; e^{-c} + 0,0091; e^{-c} + 0,0047; e^{-c} + 0,0017.$$

Относительная дисперсия была равна соответственно

$$\sigma_s/\bar{s}(\mathbf{x}) = 0,2731; 0,1361; 0,1006; 0,0703.$$

2. Следующий цикл экспериментов был связан с проведением тех же вычислений для агрегата $X=\sqrt{(x_1^2+\dots+x_n^2)/n}$. Чтобы получить равномерное распределение на сфере $x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2=\text{const}$, $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$, каждое x_i задается как независимая, неотрицательная реализация случайной величины, нормально распределенной на $[-\infty, +\infty]$ с параметрами $(0; \sigma)$.

Далее приводятся результаты экспериментов с $\sigma=30$.

Подобно предыдущему циклу экспериментов и на сфере значение функции $s(\mathbf{x})=x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ вычислялось порядка тысячи раз. Соответствующие величины для $n=10; 50; 100; 200$ таковы ($e^{-c/\sqrt{2}}=0,5302$):

$$\frac{\bar{s}(\mathbf{x})}{X} = \frac{e^{-c/2}}{\sqrt{2}} + 0,0485; \quad \frac{e^{-c/2}}{\sqrt{2}} + 0,0157; \quad \frac{e^{-c/2}}{\sqrt{2}} + 0,0079;$$

$$\frac{e^{-c/2}}{\sqrt{2}} + 0,0026; \quad \frac{\sigma_s}{\bar{s}(\mathbf{x})} = 0,2378; \quad 0,1123; \quad 0,0821; \quad 0,0391.$$

3. Третий цикл экспериментов связан с задачей распределения ресурсов. Векторы \mathbf{x} генерируются тем же датчиком случайных чисел, как в первом цикле экспериментов, r_i задаются как α_i . Порядка тысячи раз считалось значение функции $s(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n r_i \sqrt{x_i}$ на симплексе. Соответствующие

величины, для $n=10, 50, 100, 200$ были равны $\left(\sqrt{\pi} \sum_i r_i/2=0,8861\right)$:

$$\frac{\bar{s}(\mathbf{x})}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{\pi} \sum_i r_i}{2} + 0,0093; \quad \frac{\sqrt{\pi} \sum_i r_i}{2} + 0,0023;$$

$$\frac{\sqrt{\pi} \sum_i r_i}{2} + 0,0015; \quad \frac{\sqrt{\pi} \sum_i r_i}{2} + 0,0005;$$

$$\frac{\sigma_s}{\bar{s}(\mathbf{x})} = 0,0859; \quad 0,0343; \quad 0,0256; \quad 0,0191.$$

Итак, результаты экспериментов дают возможность, в зависимости от требований точности, оценить размерность системы, при которой макроописание становится приемлемым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Первозванский А. А., Гайцгори В. Г.* Декомпозиция, агрегирование и приближенная оптимизация. М.: Наука, 1979.
2. *Адилов Г. Р., Опоitseв В. И.* Агрегирование линейных систем // *АиТ*. 1986. № 8. С. 64-71.

Поступила в редакцию
19.XI.1987

ON ASYMPTOTIC AGGREGATION

ADILOV G. R., OPOITSEV V. I.

Systems are investigated in which aggregation is asymptotically ideal with increasing dimension, or errors of simplified macrodescription, understood in the **mean** statistical sense, tend to zero.