УДК 658.5.012.1

СИНТЕЗ СОГЛАСОВАННОЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ СТРУКТУРЫ

МЕДЕТОВ М. М., РАИМБЕКОВ Р. Д., САГЫНГАЛИЕВ К. С.

(Алма-Ата)

Сформулирована задача синтеза согласованной производственной структуры. Предложен метод ее решения. Найдены условия, при которых задача является эписогласованной. Доказано соответствующее утверждение. Показана возможность использования моделей и методов задачи агрегирования [1] для решения задачи синтеза согласованной производственной структуры. Решен пример.

1. Введение

Под производственной структурой (ПС) будем понимать совокупность производственных подразделений (ПП), их состав и формы взаимосвязи. Большинство подходов к решению задачи оптимизации ПС основано на том, что ПС рассматривается и полностью определяется «сверху-вниз», от предприятия к цеху, от цеха к его участкам и т. д. [2, 3]. При этом авторы используют экономические или технологические критерии, которые, как правило, выражают интересы только руководства предприятия. Будем называть его центром [4]. Но ПС представляет собой совокупность ПП, руководители которых заинтересованы в оптимальности ПС своего подразделения, что не всегда обеспечивает оптимальность ПС всего предприятия. В дальнейшем будем рассматривать задачу согласования интересов центра и руководителей групп ПП (например, начальников цехов). Назовем их элементами. Множество ПП, находящихся в подчинении одного элемента, будем называть производственным блоком (ПБ). Приведем пример, пусть имеем некоторую ПС, оптимальную с точки зрения центра. Противоречий нет: если при этом ПС отдельных ПБ полностью удовлетворяют интересам элементов (случай эписогласованности) [4]. Но на практике элементам приходится работать в разных условиях, часто их не удовлетворяющих. При этом их выигрыш, как правило, одинаков (например, оклады у начальников цехов). Нередки случаи, когда у элементов, работающих в напряженных производственных условиях, величина выигрыша ниже, чем у элементов, работающих в лучших условиях. Разная величина выигрыша объясняется тем, что у элементов, работающих в напряженных условиях вероятность срыва планов более высокая, а на производстве количество выигрыша, как известно, определяется степенью выполнения плана. Наличие подобных ситуаций позволяет утверждать, что ПС, оптимизация которых была проведена без учета целей элементов, не могут полностью отвечать требованиям, предъявляемым к ПС с позиций оптимального функционирования промышленного предприятия.

В данной работе предлагается подход к решению задачи синтеза ПС с учетом согласования интересов центра и элементов.

2. Содержательная постановка задачи

Рассмотрим производственную систему, состоящую из центра, n элементов и m ПП ($n<m$). Известно также, что центр решает задачу синтеза ПС путем оптимального назначения ПП элементам. При этом каждый из элементов стремится получить сильно связанные между собой, хорошо работающие ПП. В этом случае связи одного ПБ с другими ПБ сводятся к минимуму и, следовательно, улучшаются условиях их функционирования. Учитывая это, задачу элемента можно сформулировать следующим образом: элементу необходимо максимизировать величину собственного выигрыша путем выбора «выгодных» ПП, с учетом локальных технологических ограничений, например сумма площадей, необходимых для размещения ПП, не должна превышать производственной площади, выделенной элементу центром и других.

Центр на основе информации о результатах решения задач элементов формирует множества согласованных ПП. Учитывая это, задача синтеза согласованной ПС, в условиях полной информированности центра [4], формулируется следующим образом: центру необходимо создать ПС путем назначения каждому из элементов ПП из множества согласованных ПП так, чтобы минимизировать значение своего функционала с учетом как множества локальных технологических ограничений — ограничений на состояние элементов, так и глобальных ограничений: 1) каждое ПП должно быть назначено только одному элементу; 2) элементам могут быть назначены только те ПП, которые удовлетворяют их технологическим ограничениям; 3) сумма затрат, необходимых для реализации полученного решения не должна превышать выделенных средств.

Примеры функционалов центра приведены далее в таблице.

3. Математическая модель задачи и ее решение

Введем некоторые обозначения. $H(\mathbf{x})$ — целевая функция центра; $h_i(\mathbf{y}_i)$ — функция выигрыша i-го элемента; Y_i — множество вариантов ПП, назначение которых i-му элементу не запрещено технологией; $\mathbf{x}=(\mathbf{x}_i)$, $\mathbf{x}_i=(x_{ij})$, где $\mathbf{x}_i$ — вектор, планируемый центром i-му элементу; $\mathbf{G}_i(\mathbf{x}_i)$ — вектор-функция технологических ограничений; $\mathbf{b}_i$ — вектор-столбец; $x_{ij}=1$, если j-е ПП назначено центром i-му элементу, $x_{ij}=0$ в противном случае; $\mathbf{y}_i=(y_{ij})$, где $y_{ij}=1$, если j-е ПП предпочтительно для i-го элемента, $y_{ij}=0$ в противном случае; $\chi_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$ — функция доплат, не зависящая от величины плана; $\chi_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)=\lambda_i$, если $\mathbf{y}_i\neq\mathbf{x}_i$, $\chi_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)=0$ в противном случае; λ_i — величина доплат за реализацию решений центра, причем их сумма ограничена некоторым числом λ_0; S — множество согласованных ПП, $S=\prod_{i=1}^{n} S_i$; $Y_i=\{\mathbf{y}_i \mid \mathbf{G}_i(\mathbf{y}_i)=\mathbf{b}_i,\ i=\overline{1,n}\}$. Здесь S_i — множество согласованных ПП i-го элемента, удовлетворяющее соотношению

(1) $$S_i=\{\mathbf{x}_i \mid h_i(\mathbf{x}_i)\geqslant \max_{\mathbf{y}_i\in Y_i}[h_i(\mathbf{y}_i)-\chi_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)]\}.$$

Запишем модель задачи синтеза согласованной ПС в следующем виде:

(2) $$H(\mathbf{x})\to\min,$$

(3) $$\mathbf{G}_i(\mathbf{x}_i)=\mathbf{b}_i,\quad i=\overline{1,n},$$

Вид функционала	Принятые в источнике обозначения	Источник
$J_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{N_i} \sum_{\substack{j,\, l \in B_i \\ j \neq l}} \alpha_{jl}$	B — множество агрегатов, $B = \{B_i\}$, N_i — число объектов в агрегате B_i, α_{jl} — величина «связей» между парой (j, l); n — количество агрегатов	[9]
$J_2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j,\, l \in B_i \\ j \neq l}} (\alpha_{jl} - \alpha_i)^2$	$\alpha_i = \frac{1}{N_i^2} \sum \alpha_{jl}$ по $j, l \in B_i$, $j \neq l$, α_i — число, ближайшее ко всем связям из B_i	[9]
$J_3 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j,\, l \in B_i \\ j \neq l}} \alpha_{jl}$		[1]
$J_4 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j,\, l \in B_i \\ j \neq l}} (\alpha_{jl} - \alpha)$	α — порог, если $\alpha > \alpha_{jl}$, связь несущественная, если $\alpha < \alpha_{jl}$, связь существенна	[10]
$J_5 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{N_i (N_i - 1)} \sum_{\substack{j,\, l \in B_i \\ j \neq l}} \alpha_{jl}$	Считается, что если $N_i = 1$, то $\frac{1}{N_i - 1} \sum_{\substack{j,\, l \in B_i \\ j \neq l}} \alpha_{jl} = 0$	[1]
$J_6 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{N_i - 1} \sum_{\substack{j,\, l \in B_i \\ j \neq l}} \alpha_{jl}$	m — число элементов, группируемых в агрегаты	[1]

(4) $$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, m},$$

(5) $$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \geqslant 1, \quad i = \overline{1, n},$$

(6) $$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m},$$

(7) $$h_i(\mathbf{x}_i) \geqslant \max_{\mathbf{y}_i \in \mathbf{Y}_i} h_i(\mathbf{y}_i) - \lambda_i, \quad i = \overline{1, n},$$

(8) $$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \leqslant \lambda_0.$$

Ограничения (7) получены из выражения (1) с учетом структуры $\chi_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$ [4]; уравнение (4) означает, что каждое ПП назначается только одному элементу; соотношение (3) — технологические ограничения элементов; неравенство (5) означает, что каждому элементу назначается хотя бы одно ПП.

Для решения задачи (2)—(8) предлагается алгоритм, схема которого **позволяет для каждой конкретной задачи** использовать подалгоритмы, учитывающие специфику задачи. Заметим, что точность алгоритма зависит от используемого подалгоритма.

Обозначим через X множество, определяемое ограничениями (3)—(6). Приведем описание k-го шага алгоритма, предварительно приняв $k=1$, $R_k=\emptyset$.

1°. Определить $h_i^*=\max h_i(\mathbf{y}_i)$ по $\mathbf{y}_i\in Y_i$, $i=\overline{1, n}$.

2°. Найти $\mathbf{x}^*=\operatorname{argmin} H(\mathbf{x})$ по $\mathbf{x}\in X\setminus R_k$, используя один из известных методов, например приведенный в [5]. $R_{k+1}=R_k\cup\{\mathbf{x}^*\}$.

3°. Определить λ_i по формуле

$$\lambda_i=h_i^*-h_i(\mathbf{x}_i^*),\quad i=\overline{1, n}. \tag{9}$$

4°. Проверить ограничение (8), если оно выполняется, то конец, иначе $k=k+1$, и перейти к шагу 2°.

Рассмотрим задачу (2)—(8), но при условии, что выполняется

$$H(\mathbf{x})\to\max \tag{10}$$

и функция $H'(\mathbf{x}^*)=\sum_{i=1}^{n} h_i(\mathbf{x}_i^*)$, где $\mathbf{x}^*=(\mathbf{x}_i^*)$ есть решение задачи (10), (3)—(6). Очевидно, что $H(\mathbf{x})$ и $H'(\mathbf{x})$ определяются на одном и том же частично упорядоченном множестве X.

Для задачи (10), (3)—(8) справедливо следующее

Утверждение. Пусть функция $H'(\mathbf{x})$ монотонно связана с функцией $H(\mathbf{x})$ [6]. Тогда если задача (10), (3)—(8) имеет решение, то она является эписогласованной.

Доказательство утверждения приведено в приложении.

Примеры задач и функций, обладающих свойством монотонности, приведены в следующем разделе.

Необходимо отметить, что:

1) одновременно с согласованным планом задачи (10), (3)—(8) определяется минимальная сумма необходимых доплат;

2) утверждение также справедливо, когда задача (10), (3)—(8) заключается в одновременном определении минимальных значений целевых функций центра и элементов;

3) утверждение справедливо и в том случае, когда задача элемента есть задача о рюкзаке, которая является наиболее общей задачей целочисленного программирования [7];

4) полученные результаты справедливы и для задачи (2)—(4), (6)—(8). Пусть существует ее решение и для некоторых элементов $\sum_{j=1}^{m} x_{ij}=0$, $i\in I_1$, $|I_1|<n$. Это соответствует случаю, когда в ПС нужно сократить число ПБ;

5) задача

$$H(\mathbf{x})\to\max, \tag{11}$$

$$g_i(\mathbf{x}_i)\leqslant \mathbf{b}_i,\quad i=\overline{1, n}, \tag{12}$$

$$h_i(\mathbf{x}_i)\geqslant\max_{\mathbf{y}_i\in Y_i}(h_i(\mathbf{y}_i)-\chi_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)),\quad i=\overline{1, n}, \tag{13}$$

где Y_i определяется ограничением (12), $g_i(\mathbf{x}_i)$ — функция технологических ограничений i-го элемента, а $\mathbf{x}$ — могут быть и непрерывными, является эписогласованной в следующих случаях:

а) $H'(\mathbf{x})$ монотонно связана с $H(\mathbf{x})$, $\chi_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$ — штрафы типы НП [4];

б) $h_i(\mathbf{x}_i)$ монотонно связаны с $g_i(\mathbf{x}_i)$, а ограничение (12) активное для оптимального решения задачи (11)—(12) и $\chi_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$ — любые функции штрафов.

4. Связь с задачами агрегирования

При решении задачи синтеза ПС и организационных структур часто используются модели и методы некоторых задач агрегирования. Задачу синтеза можно переформулировать в терминах задачи агрегирования и использовать методы их решения. Особенностью является то, что каждая пара ПП (j, l) характеризуется числом α_{jl}, трактуемым как величина «связи» или мера «близости» между этими ПП, т. е. рассматриваемое множество ПП характеризуется матрицей $\mathbf{A}=(\alpha_{jl})_{j,l=1}^{m}$, которую называют матрицей связи.

Математическая модель задачи, записанная в виде задачи булевого программирования, совпадает с математической моделью (2)—(8). Для ее решения предлагается алгоритм, отличающийся от алгоритма, приведенного в разделе 3 тем, что на шаге 2° $\mathbf{x}^*$ определяется одним из методов решения задач агрегирования.

Если элемент определяет h_i^* на собственной матрице связи, то центр, решая задачу синтеза ПС, сначала разбивает все множество ПП на ПБ, а только потом ищет лучшее назначение ПБ каждому из элементов. Задача назначения ПБ элементам с дополнительными ограничениями имеет следующий вид:

(14) $$H(\mathbf{z})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\lambda_{ir}z_{ir}\to\min,$$

(15) $$\sum_{i=1}^{n}z_{ir}=1,\quad r=\overline{1,n},$$

(16) $$\sum_{r=1}^{n}z_{ir}=1,\quad i=\overline{1,n},$$

(17) $$\mathbf{G}_i'(\mathbf{z}_i)\leqslant\mathbf{b}_i,\quad i=\overline{1,n},$$

(18) $$z_{ir}\in\{0,1\},\quad r=\overline{1,n},\quad i=\overline{1,n},$$

где $\lambda_i=(\lambda_{ir})$, λ_{ir} — величина доплат i-му элементу за назначение ему r-го ПБ; $\mathbf{z}=(\mathbf{z}_i)$, $\mathbf{z}_i=(z_{ir})$, где $z_{ir}=1$, если r-й ПБ назначен i-му элементу, $z_{ir}=0$ в противном случае; $\mathbf{G}_i'(\mathbf{z}_i)$ — вектор-функция технологических ограничений.

Приведем **описание k-го шага алгоритма**, предварительно приняв $k=1$, $R_k=\varnothing$.

1°. Определить $h_i^*=\max h_i(\mathbf{y}_i)$ по $\mathbf{y}_i\in Y_i$, $i=\overline{1,n}$.

2°. Используя один из методов решения задач агрегирования, найти $\mathbf{x}^*=\operatorname{argmin} H(\mathbf{x})$ по $\mathbf{x}\in X\setminus R_k$, $R_{k+1}=R_k\cup\{\mathbf{x}^*\}$. Под i понимается номер ПБ.

3°. Решить задачу (14)—(18). Проверить ограничение. Если оно выполняется, то конец. Иначе $k=k+1$, перейти на шаг 2°.

Большинство методов, используемых для решения задач агрегирования, являются эвристическими. Поэтому точность предложенного алгоритма может возрасти только за счет увеличения количества вариантов перебора. Направленность перебора заключается в выборе таких вершин для ветвления, которым соответствуют наилучшие значения целевой функции. Число вершин ветвления для случая $n=2$ определяется по формуле $2^{m-1}-1$. Ускорить работу алгоритма можно, если на шаге 3° выбирать только те решения, для которых выполняется ограничение (17).

В таблице приведены некоторые функционалы, используемые при решении задач агрегирования. Проанализируем их. Понятно, что если функционалы J_1, J_3, J_4, J_5, J_6 принимают значения на одном и том же частично упорядоченном множестве X, то они являются монотонно связанными, так как любой из них можно получить из другого путем монотонных преобразований [6]. Например: а) функционал J_4 преобразуется в функционал J_3 вычитанием некоторого числа α (порог) из каждого элемента матрицы связи и, наоборот, J_3 из J_4 — прибавлением числа α к каждому элементу матрицы связи; б) разложим на слагаемые функционал J_3. Каждое из его слагаемых является монотонной функцией. Если теперь взять линейную комбинацию слагаемых с коэффициентами k_i, то вновь получаемые функции также обладают свойством монотонности. Путем таких преобразований из функционала J_3 можно получить: а) функционал J_5, если $k_i=$ $=1/N_i(N_i-1)$; б) функционал J_1, если $k_i=1/N_i$ и т. д. Аналогично можно провести и другие преобразования. Необходимо подчеркнуть, что для рассматриваемых функционалов свойство монотонности симметрично.

Таким образом, использование одного из функционалов в качестве целевой функции центра, а слагаемых другого в качестве целевых функций элементов позволяет утверждать, что если задача (10), (3)—(8) имеет решение, то она эписогласована.

Функционал J_2 не является монотонно связанным с другими функционалами таблицы. При его использовании в паре с любым из функционалов J_1, $J_3 \div J_6$ необходимо решать задачи (2)—(8) или (10), (3)—(8) приведенным алгоритмом.

Отметим, что полученные результаты можно использовать при синтезе согласованной ПС с подетальной специализацией ПБ и ПП, основанной на методе групповой обработки деталей и организации группового производства [2].

Результаты, приведенные в данной работе, предполагается использовать для синтеза ПС подразделений одного из приборостроительных предприятий.

5. Заключение

В данной работе для решения задачи синтеза ПС использован принцип согласованного планирования. Полученные результаты можно обобщить и для синтеза ПС многоуровневых систем. Другой возможной областью их применения является синтез согласованных организационных структур [8]. Для решения рассматриваемой задачи применимы методы решения более общей задачи согласованного планирования с булевыми переменными, что явилось предметом дальнейших исследований и требует специального рассмотрения.

1. *Доказательство утверждения.* Пусть $\mathbf{x}^*$ есть оптимальное решение задачи (10), (3)–(6), а λ^* определено по формуле (9). Тогда для доказательства утверждения достаточно показать, что если при $\mathbf{x}^*$ и λ^* ограничение (8) не выполняется, то задача (10), (3)–(8) решения не имеет.

Просуммировав (7) по всем i, получим

$$\text{(П.1)}\qquad \sum_{i=1}^{n} \max_{\mathbf{y}_i \in Y_i} h_i(\mathbf{y}_i) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} h_i(\mathbf{x}_i).$$

Так как $H'(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} h_i(\mathbf{x}_i)$ монотонно связана с $H(\mathbf{x})$, то при переходе от $\mathbf{x}^*$ к любому назначению $\mathbf{x}'$ будем иметь $\sum_{i=1}^{n} h_i(\mathbf{x}_i^*) \geqslant \sum_{i=1}^{n} h_i(\mathbf{x}_i')$, так как $H(\mathbf{x}^*) \geqslant H(\mathbf{x}')$. Отсюда ввиду того, что первое слагаемое в левой части выражения (П.1) величина постоянная, ограничение (8) для $\mathbf{x}'$ тем более выполняться не будет. Утверждение доказано.

2. *Решение задачи синтеза согласованной ПС.* Рассмотрим следующий пример:

$$\text{(П.2)}\qquad H(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{\substack{l=1\\ l>j}}^{m} \alpha_{lj} x_{ij} x_{il} \to \max,$$

$$\text{(П.3)}\qquad 1 \leqslant \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leqslant \mathrm{b}_i, \qquad i=\overline{1,n},$$

$$\text{(П.4)}\qquad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j=\overline{1,m},$$

$$\text{(П.5)}\qquad x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad i=\overline{1,n}, \qquad j=\overline{1,m},$$

$$\text{(П.6)}\qquad \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} r_{lj}^{i} x_{ij} x_{il} = \max_{\mathbf{y}_i \in Y_i} \sum_{j=1}^{m} \sum_{\substack{l=1\\ l>j}}^{m} r_{lj}^{i} y_{ij} y_{il} - \lambda_i, \qquad i=\overline{1,n},$$

$$\text{(П.7)}\qquad y_{ij} \in \{0,1\}, \qquad i=\overline{1,n}, \qquad j=\overline{1,m},$$

$$\text{(П.8)}\qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \leqslant \lambda_0,$$

где $Y_i = \left\{ \mathbf{y}_i / 1 \leqslant \sum_{j=1}^{m} y_{ij} \leqslant \mathrm{b}_i \right\}$, $b_i=3$, $i=\overline{1,n}$, $n=2$, $m=5$, $\lambda_0=40$. Матрицы связей между ПП примем в виде

$$\mathbf{A} = (\alpha_{lj}) = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 20 & 15 & 8 & 15 \\ 0 & 0 & 31 & 15 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad R_1 = (r_{lj}^1) = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 15 & 20 & 11 & 13 \\ 0 & 0 & 8 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$R_2 = (r_{ij}^2) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 20 & 11 & 15 & 16 \\ 0 & 0 & 8 & 13 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Предварительно положим $k=1$, $R_1=\phi$.

I итерация.

1°. Решим задачи $h_i^* = \max \sum_{j=1}^{m} \sum_{\substack{l=1 \\ l>j}}^{m} r_{lj}{}^i y_{ij} y_{il}$ по $y_i \in Y_i$. Имеем $h_1^*=48$, $y_{11}=$ $=y_{12}=y_{15}=1$, $h_2^*=61$, $y_{21}=y_{22}=y_{25}=1$.

2°. Решаем задачу (П.2) – (П.5) при $H(\mathrm{x}) \to \max$ по $\mathrm{x} \in X \backslash R_1$, используя метод «объединение» [1]. Промежуточные результаты представлены матрицами A_{11} и A_{12}, где A_{11} означает, что матрица связи получена на первой итерации после первого шага. Для получения A_{11} был выбран α_{23}. Для получения A_{12} был выбран $\alpha_{1,(2,3)}$. Нумерация столбцов и строк в этих матрицах может быть многоиндексной, что означает объединение строк и столбцов, соответствующих выбранному на предыдущей итерации элементу матрицы:

$$A_{11} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2,3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2,3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 17,5 & 8 & 15 \\ 0 & 0 & 14,5 & 6,5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$A_{12} = \begin{array}{c} \\ 1,2,3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1,2,3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 12,3 & 8,3 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

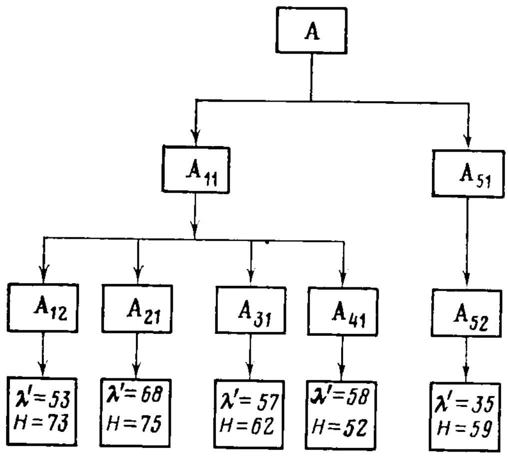

Схема решения примера

Окончательно имеем следующий состав производственных блоков: ПБ1$=\{1, 2, 3\}$, ПБ2$=\{4, 5\}$, $x_{11}^*=$ $=x_{12}^*=x_{13}^*=x_{24}^*=x_{25}^*=1$, $H=74$, $R_2=$ $=R_1 \cup \{\mathrm{x}^*\}$. Остальные $x_{ij}^*=0$. В дальнейшем x_{ij}^* будем опускать. Процесс ветвления из A в A_{11} и из A_{11} в A_{12} показан на рисунке, где $\lambda' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

3°. Решаем задачу назначения ПБ. В результате первому элементу нужно назначить ПБ1, второму – ПБ2, при $\lambda_1+\lambda_2=53$. Так как $53>\lambda_0$, то переходим на шаг 2°, приняв $k=2$.

II итерация.

2°. Решаем задачу (П.2) – (П.5) при $H(\mathrm{x}) \to \max$ по $\mathrm{x} \in X \backslash R_2$. Для этого достаточно начать ветвление с A_{11} (рисунок). Выберем α_{15}, получим A_{21}. В результате имеем

$$A_{21} = \begin{array}{c} \\ 1,5 \\ 2,3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1,5 & 2,3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 12 & 8 \\ 0 & 0 & 14,5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad A_{31} = \begin{array}{c} \\ 1,4 \\ 2,3 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1,4 & 2,3 & 0 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 16 & 11,5 \\ 0 & 0 & 6,5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Окончательно: ПБ1$=\{1, 5\}$, ПБ2$=\{2, 3, 4\}$, $H=75$, $R_3=R_2 \cup \{\mathrm{x}^*\}$.

3°. Первому элементу нужно назначить ПБ2, второму – ПБ1. Определим $\lambda_1+\lambda_2=$ $=68>\lambda_0$, приняв $k=3$, перейдем на шаг 2°.

III итерация.

2°. Решаем задачу (П.2)–(П.5) при $H(\mathrm{x})\to\max$ по $\mathrm{x}\in X\setminus R_3$. Выберем $\alpha_{1,4}$ в A_{11}. Получим вершину, которой соответствует матрица A_{31} (рисунок). Окончательно: ПБ1$=\{1, 4, 5\}$, ПБ2$=\{2, 3\}$, $H=62$, $R_4=R_3\cup\{\mathrm{x}^*\}$.

3°. Первому элементу нужно назначить ПБ2, второму – ПБ1. Получаем $\lambda_1+\lambda_2=57>\lambda_0$. Приняв $k=4$, перейдем на шаг 2°.

IV итерация.

2°. Решаем задачу (П.2)–(П.5) при $H(\mathrm{x})\to\max$ по $\mathrm{x}\in X\setminus R_4$. Выберем $\alpha_{(2,3),5}$ в A_{11}. Получим вершину, которой соответствует матрица A_{41} (рисунок). Окончательно: ПБ1$=\{2, 3, 5\}$, ПБ2$=\{1, 4\}$, $H=52$, $R_5=R_4\cup\{\mathrm{x}^*\}$. Матрица A_{41} имеет вид

$$A_{41}=\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2,3,5 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 21,5 & 8 \\ 2,3,5 & 0 & 0 & 18,5 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

3°. Первому элементу нужно назначить ПБ1, второму – ПБ2. Определим $\lambda_1+\lambda_2=58>\lambda_0$. Принимая $k=5$, перейдем на шаг 2°.

V итерация.

2°. Решаем задачу (П.2)–(П.5) при $H(\mathrm{x})\to\max$ по $\mathrm{x}\in X\setminus R_5$. Выберем α_{12} в А, получим вершину, которой соответствует матрица A_{51}. В A_{51} выберем α_{34}, получим вершину, которой соответствует матрица A_{52}. Окончательно: ПБ1$=\{1, 2, 5\}$, ПБ2$=\{3, 4\}$, $H=59$, $R_6=R_5\cup\{\mathrm{x}^*\}$. Матрицы имеют вид

$$A_{51}=\begin{array}{c|cccc} & 1,2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1,2 & 0 & 23 & 11,5 & 12,5 \\ 3 & 0 & 0 & 14 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array},\quad A_{52}=\begin{array}{c|ccc} & 1,2 & 3,4 & 5 \\ \hline 1,2 & 0 & 17,2 & 12,5 \\ 3,4 & 0 & 0 & 5,5 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

3°. Первому элементу нужно назначить ПБ2, второму – ПБ1. Получим $\lambda_1+\lambda_2=35<\lambda_0$. Найдена согласованная ПС.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Браверман Э. М., Мучник И. Б.* Структурные методы обработки эмпирических данных. М.: Наука, 1983.
2. *Митрофанов С. П.* Групповая технология машиностроительного производства. Т. 1. Л.: Машиностроение, 1983.
3. *Сатановский Р. Л.* Организация и планирование внутризаводской специализации. Л.: Машиностроение, 1974.
4. *Бурков В. Н., Кондратьев В. В.* Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981.
5. *Martello S., Toth P.* An algorithm for the generalized assigment problem // Operation research. Proceedings 9th IFORS International Conference, Amsterdam, 1981. P. 589–603.
6. *Месарович М., Мако Д., Такахара И.* Теория иерархических многоуровневых систем. М.: Мир, 1973.
7. *Ковалев М. М.* Дискретная оптимизация (целочисленное программирование). Минск: Изд-во БГУ, 1977.
8. *Цвиркун А. Д.* Основы синтеза структуры сложных систем. М.: Наука, 1982.
9. *Кузнецов Е. Н., Мучник И. Б.* Структурные методы анализа организационных систем // АиТ. 1983. № 5. С. 5—27.
10. *Миркин Б. Г.* Анализ качественных признаков и структур. М.: Статистика, 1980.

Поступила в редакцию
27.I.1986

DESIGNING A COORDINATED INDUSTRIAL STRUCTURE

MEDETOV M. M., RAIMBEKOV R. D., SAGYNGALIEV K. S.

A coordinated manufacturing structure is developed. Conditions are determined under which the structure is epi-coordinated. The relevant theorems are proved. The aggregation models and methods [1] are shown applicable to designing a coordinated manufacturing structure. An example is provided.