УДК 62-505.5:658.314.7

РАНГОВЫЕ СИСТЕМЫ СТИМУЛИРОВАНИЯ

ЦЫГАНОВ В. В.

(Москва)

Даны определения и постановки задач оптимального синтеза ранговой системы стимулирования (РСС) и ее подсистем (процедур классификации и поощрения) на основе теории активных систем. Установлены взаимосвязи между числом рангов и эффективностью РСС, необходимостью (ценностью) классификации, прогрессивностью шкалы поощрения и эффективностью РСС. Развитый подход к задаче оптимального синтеза проиллюстрирован на примере нормативных РСС.

1. Введение

Как правило, управление (стимулирование) в многоуровневых активных системах осуществляется в условиях неполной информированности центра о состояниях элементов, характеризующихся множеством показателей. На практике это приводит к тому, что центр не в состоянии строго упорядочить все элементы по степени достижения ими установленных целей и ограничивается при этом лишь классификацией, т. е. делением их на качественно (как правило, вербально) различимые классы [1—3]. После этого все элементы, вошедшие в один класс, управляются (поощряются) одинаково, причем обычно чем выше классное место, тем выше это поощрение. Соответствующую систему стимулирования будем называть ранговой системой стимулирования (РСС). В качестве примеров реальных РСС в цикле «исследование — производство» [4] можно привести систему стимулирования отраслевых организаций по результатам автоматизированной количественной комплексной оценки результатов деятельности (АККОРД), по итогам социалистического соревнования и т. д. [5—7]. Однако важной особенностью классификации в организационных системах является необходимость учета активности их элементов. Информированность активного элемента о процедуре классификации позволяет ему предсказывать в той или иной степени будущие управляющие решения центра (присваиваемые ему классы и соответствующие поощрения) в зависимости от выбираемого элементом решения. Следовательно, активный элемент может путем выбора своего состояния влиять на результаты классификации. Возникающие здесь проблемы можно назвать проблемами «активной классификации».

В настоящей статье исследуются задачи активной классификации, приводятся постановки задач оптимального синтеза и ее подсистем, найдены достаточные условия, упрощающие их решение. Введены понятия и определения, характеризующие процедуры классификации и поощрения, установлены взаимосвязи между ними. В качестве примера применения развиваемого подхода рассмотрена задача синтеза нормативных РСС.

2. Постановка задачи

Рассмотрим двухуровневую систему, содержащую управляющий орган — центр и n элементов нижнего уровня. Состояние каждого элемента i, $i=\overline{1, n}$ описывается m показателями $y_i=(y_{i1}, \ldots, y_{im})$ в компактном подмножестве Y_i евклидового векторного пространства E_+^m. Некоторые элементы системы могут быть неразличимы с точки зрения центра (например, в условиях неполной информированности последнего). Будем предполагать заранее заданной некоторую первичную классификацию всех элементов нижнего уровня на N групп неразличимых элементов $\Gamma(k)$, $k=\overline{1, N}$, $\bigcup\limits_{k=1}^{N} \Gamma(k)=\{1, \ldots, n\}$, причем в k-й группе $\Gamma(k)$ содержится p_k элементов, $k=\overline{1, N}$.

Ранговая систем стимулирования $s=(J, e, \omega)$. Здесь J — число рангов (или размерность) РСС, $J\leqslant N$; e — процедура классификации элементов в зависимости от выбираемых ими состояний, представляющая собой совокупность N однозначных отображений $e=\{e_1, \ldots, e_N\}$:

(1) $$e_k\colon Y_i\to Q,\ i\in\Gamma(k),\ k=\overline{1, N},\ Q=\{j\,|\,j=\overline{1, J}\},$$

где Q — множество возможных рангов РСС; ω — процедура (шкала) поощрения элементов в зависимости от присвоенных им рангов; эта процедура — однозначное отображение

(2) $$\omega\colon Q\to C,\ C\in R_+,$$

где C — компактное множество возможных стимулов. Предполагается, что $e_k(y_i)$ — кусочно-непрерывная функция на Y_i, причем $e_k(y_i')=e_k(y_i'+0)$, $y_i'\in Y_i^k$, Y_i^k — множество точек разрыва первого рода функции $e_k(y_i)$. Содержательно $e_k(y_i)$ — место элемента $i\in\Gamma(k)$ в РСС при его показателе y_i, $i=\overline{1, n}$; $\omega(j)$ — стимулы для элементов, которым присвоен ранг j, $j=\overline{1, J}$. В результате процедуры (1) образуется, вообще говоря, менее точная (более грубая) по сравнению с первичной классификация элементов на $J\leqslant N$ непересекающихся групп $E_J^N(j)$, $j=\overline{1, J}$, $\bigcup\limits_{j=1}^{J} E_J^N(j)=\{1, \ldots, n\}$, $E_J^N(b)\cap E_J^N(c)=\varnothing$, $1\leqslant c$, $b\leqslant J$, $c\neq b$. Если $e_k(y_i)=e(y_i)$, $k=\overline{1, N}$, то РСС называется универсальной. Множество РСС с какой-либо фиксированной компонентой (x) будем обозначать S^x. В частности, множество РСС размерности J есть S^J и т. д.

Состояние системы в целом описывается вектором $y=(y_1, \ldots, y_n)$ на множестве состояний $Y=\prod\limits_{i=1}^{n} Y_i$.

Целевая функция элемента i имеет вид

(3) $$f_i(y_i)=w_i(y_i)-З_i(y_i),\ w_i(y_i)=\omega(e_k(y_i)),\quad i\in\Gamma(k),\ k=\overline{1, N},$$

где $s=(J, e, \omega)$ — поощрение элементу i при состоянии y_i, $З_i(y_i)$ — функция затрат i-го элемента, монотонно возрастающая и непрерывная по y_i, $З_i(0)=0$. Каждый элемент выбирает свое состояние с целью максимизации (3). В результате множество решений игры элементов имеет вид

(4) $$R(s)=\{y^*=(y_1^*, \ldots, y_n^*)\,|\,f_i(y_i^*)\geqslant f_i(y_i),\ \forall y_i\in Y_i,\ i=\overline{1, n}\},$$

где $s=(J, e, \omega)$. Нетрудно показать, что в принятых предположениях $R(s)$ непусто и компактно. Здесь необходимо сделать важное замечание, связанное с наличием у элементов системы свойства активности [1—3].

Содержательно (1) означает, что элементы из $\Gamma(k)$, $k=\overline{1, N}$ вследствие их неразличимости для центра классифицируются последним в зависимости от их состояний y_i, $i\in\Gamma(k)$ по одинаковой процедуре e_k, $k=\overline{1, N}$. При этом, однако, в результате выбора элементами решений из множества (4) при заданной РСС неразличимым с точки зрения центра элемента могут быть присвоены разные ранги. Причина этого, на первый взгляд, противоречивого положения заключается в неполной информированности центра относительно возможных состояний элементов. Возникает вопрос — каковы условия присвоения неразличимым элементам одного и того же ранга?

Заметим, что если $З_i(y_i)=З_e(y_i)$, $\forall i$, $l\in\Gamma(k)$, $k=\overline{1, N}$ и $y_i^*=\arg\max_{y_i\in Y_i} f_i(y_i)$ единствен, $i=\overline{1, n}$, то $\exists j$, $1\leqslant j\leqslant N$, такой, что $\forall i\in\Gamma(k)$ следует $i\in E_J^N(j)$. Действительно, в силу (1), (2), (4), $R(s)=y^*=(y_1^*,\ldots,y_n^*)$, где $y_i^*=y_l^*$, $\forall i$, $l\in\Gamma(k)$, $k=\overline{1, N}$. Учитывая однозначность отображения (1), получаем $\forall i$, $l\in\Gamma(k)e_k(y_i^*)=e_k(y_l^*)$, $k=\overline{1, N}$, т. е. $i\in E_J^N(j)$.

Содержательно это означает, что неразличимые, с точки зрения центра, элементы имеют один и тот же ранг, если достаточно близки их функции затрат. Везде ниже мы будем предполагать это условие выполненным.

В этом случае в результате процедуры классификации (e) число элементов ранга j есть $n_j(e)=\sum_{k\in E_J^N(j)} p_k$, $j=\overline{1, J}$. Обозначим через $\Psi(y)$ целевую функцию центра.

В качестве критерия эффективности РСС принимаем, как обычно [1–3], гарантированное значение целевой функции центра на множестве решений игры элементов:

$$K(s)=\min_{y\in R(s)} \Psi(y) \tag{5}$$

(предполагается, что $\Psi(y)$ непрерывна по $y\in Y$, так что $K(s)$ всегда существует). Задача оптимального синтеза ранговой системы стимулирования имеет вид

$$K(s)\xrightarrow[s\in S]{} \max, \tag{6}$$

где S — множество возможных РСС.

Во многих практически важных случаях множество возможных РСС определяется величиной ограниченного суммарного фонда поощрения (Φ):

$$S_\Phi=\left\{s=(J, e, \omega)\mid \sum_{j=1}^{J}\omega(j)\,n_j(e)\leqslant\Phi,\ n_j(e)=\sum_{k\in E_J^N(j)} p_k.\right. \tag{7}$$

Множество S_Φ будем называть множеством Φ-ограниченных РСС (а ее элементы — Φ-ограниченными РСС).

В соответствии с (5) могут быть сформулированы и задачи оптимального синтеза подсистем РСС. В частности, задача оптимального синтеза РСС размерности j имеет вид

$$K(s)\xrightarrow[s\in S^j]{} \max. \tag{8}$$

Задача оптимального синтеза шкалы поощрения (при заданных размерности РСС J и процедуре классификации e) имеет вид

$$K(s)\xrightarrow[s\in S^{J,e}]{} \max$$

и т. д. Для простоты везде ниже предполагается существование максимумов в задачах оптимального синтеза (6), (8).

3. Размерность и эффективность РСС

Рассмотрим, как влияет на эффективность РСС изменение ее размерности. Важную роль в дальнейшем изложении играет следующая

Лемма. Пусть ранговые системы стимулирования $S^\alpha=(J^\alpha, e^\alpha, \omega^\alpha)$, $\alpha=1, 2$, $N\geqslant J^1>J^2$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $e_k^1(y_i)\in E_{J^2}^{J^1}(e_k^2(y_i))$ $\quad\forall y_i\in Y_i$, $i\in E_{J^1}^N(k)$, $k=\overline{1, J^1}$,

2) $\omega^1(l)=\omega^2(h)$, $l\in E_{J^2}^{J^1}(h)$.

Тогда $K(s^1)=K(s^2)$.

Доказательство леммы и последующих теорем приведены в приложении.

Локально-оптимальной РСС размерности j будем называть наиболее эффективную РСС размерности j:

$$\tilde{s}=(j, \tilde{e}, \tilde{\omega}) \in \operatorname{Arg} \max_{s \in S} K(s).$$

Соответственно $\tilde{\omega}$ назовем оптимальной шкалой поощрения размерности j. В дальнейшем нам потребуется

Утверждение 1. Эффективность локально-оптимальной РСС не убывает с ростом ее размерности:

$$\max_{s \in S^{j+1}} K(s) \geqslant \max_{s \in S^j} K(s). \tag{9}$$

Доказательство этого основано на использовании леммы и не приводится ввиду простоты.

Содержательно смысл полученного результата заключается в том, что эффективность системы стимулирования может быть повышена (или, по меньшей мере, не убывает) при более полном использовании имеющейся априорной информации, т. е. при увеличении размерности РСС. Если при этом в (9) имеет место равенство, то РСС размерности $j+1$ тривиальна (неэффективна) в том смысле, что ее можно заменить более простой (размерности j) без ущерба для эффективности.

Соответственно в случае

$$\max_{s \in S^j} K(s) > \max_{s \in S^{j-1}} K(s) \tag{10}$$

будем говорить, что РСС размерности j эффективна.

РСС максимальной размерности $(J=N)$ будем называть точной, а соответствующую шкалу поощрения — полной. Тогда справедливо

Следствие. Эффективность произвольной локально-оптимальной РСС не выше эффективности точной локально-оптимальной РСС.

Таким образом, для решения задачи оптимального синтеза РСС достаточно решить задачу оптимального синтеза точной РСС.

4. Ценность и необходимость классификации

Назовем первичной классификацию с числом рангов N. Выше было показано, что с ростом размерности РСС, т. е. точности классификации, эффективность РСС, по меньшей мере, не убывает. Однако при этом могут возрастать и затраты центра на реализацию РСС, поскольку на практике нередко процедура классификации является дорогостоящей и трудоемкой. Так, для проведения более точной первичной классификации требуется проведение дополнительных аналитических исследований, изучение сходства и различия элементов системы, условий их функционирования и т. д. В связи с этим возникают вопросы: насколько необходима классификация элементов с данной степенью точности? Нельзя ли заменить ее более грубой классификацией с меньшим числом рангов без ущерба для эффективности РСС? С целью решения этих вопросов введем, во-первых, понятие точности классификации как числа содержащихся в ней рангов. Во-вторых, зададим показатель, оценивающий изменение эффективности функционирования системы при изменении точности классификации, в виде

$$P(\tilde{s}^{\beta}, \tilde{s}^{\alpha}) = K(\tilde{s}^{\beta}) - K(\tilde{s}^{\alpha},) \quad K(\tilde{s}^{j}) = \max_{s \in S^j} K(s), \quad j=\alpha, \beta.$$

Этот показатель будем называть ценностью (β, α)-переклассификации. Он определяет изменение эффективности функционирования системы при переходе от РСС, являющейся оптимальной при одной точности классификации (α), к РСС, оптимальной при другой точности классификации (β). В силу теоремы 1 $P(\tilde{s}^\beta, \tilde{s}^\alpha)$ неотрицателен (неположителен) при $\beta>\alpha(\beta<\alpha)$. В частности, в случае отсутствия классификации ($\alpha=1$)

$$P(\tilde{s}^\beta, \tilde{s}^1)=K(\tilde{s}^\beta)-K(\tilde{s}^1).$$

Этот показатель будем называть ценностью классификации β. Ценность классификации показывает, насколько увеличивается эффективность функционирования при оптимальной системе стимулирования с заданной точностью классификации.

В соответствии с вышесказанным представляет интерес определение условий, при которых ценность классификации не возрастает при увеличении ее точности (при этом ценность переклассификации равна нулю).

Необходимой будем называть классификацию минимальной точности I, такую, что при $\tilde{s}=(I, \tilde{e}, \tilde{\omega})$

$$K(\tilde{s})=\max_{s\in S^l} K(s), \quad l=\overline{I,J} \tag{11}$$

Очевидно, цена (J, I) — переклассификации равна нулю при $J>I$, $J\leqslant N$. Поэтому любая классификация с точностью выше необходимой избыточна с точки зрения синтеза оптимальной системы стимулирования. Представляет интерес случай совпадения первичной классификации с необходимой, поскольку в этом и только в этом случае первичная классификация не является избыточной с точки зрения оптимизации системы стимулирования. Сравнивая (10) и (11), нетрудно показать, что справедливо

Утверждение 2. Первичная классификация необходима тогда и только тогда, когда точная РСС эффективна.

В более общем случае можно показать, что РСС размерности $I\leqslant N$ эффективна, если классификация точности I необходима (обратное, вообще говоря, неверно).

5. Прогрессивные шкалы поощрения

Как указывалось выше, для многих реальных ранговых систем стимулирования (например, нормативных [4], соревновательных [5]) характерно возрастание поощрения определенного вида (чаще всего материального) с повышением ранга, присваиваемого элементу. Будем считать, что величина указанного поощрения (стимула) может быть охарактеризована скаляром из множества $C\in R_+$ (см. (2)). Тогда без ограничения общности можно полагать, что

$$\omega(1)\geqslant\omega(2)\geqslant\ldots\geqslant\omega(J) \tag{12}$$

(этого всегда можно добиться путем соответствующей перенумерации классов из множества Q). Введем следующее

Определение. Шкала поощрения ω называется прогрессивной, если

$$\omega(j)>\omega(j+1), \quad j=\overline{1,J}. \tag{13}$$

Системы стимулирования с прогрессивными шкалами поощрения занимают центральное место в теории организационного управления в условиях неопределенности [1—3]. В частности, показано, что такие системы обеспечивают повышение эффективности функционирования элементов и возможность идентификации их структуры за счет соответствующего увеличения их поощрения.

Взаимосвязь между характеристиками процедур классификации и поощрения в локально-оптимальной РСС устанавливает

Теорема 1. Если точность необходимой классификации равна I, то любая оптимальная шкала размерности I является прогрессивной. Заметим, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Более сильное утверждение этого типа может быть получено в отношении точной РСС.

Теорема 2. Первичная классификация является необходимой, если и только если любая полная оптимальная шкала поощрения является прогрессивной.

Таким образом, условие прогрессивности шкалы поощрения тесно связано с условиями минимальности первичной классификации и точности РСС. Исходя из формулировок утверждения 2 и теоремы 2, получаем следующий результат.

Теорема 3. Точная РСС эффективна тогда и только тогда, когда любая полная оптимальная шкала поощрения является прогрессивной.

6. Нормативно-ранговые системы стимулирования

Рассмотрим в качестве примера постановку и решение задачи оптимального синтеза нормативной Ф-ограниченной универсальной РСС, характерной особенностью которой является, во-первых, наличие нормативов отнесения элементов к различным рангам (типа РСС на основе АККОРД [4, 6, 7]) и, во-вторых, ограниченность множества возможных стимулов — элементов (см. (7)). Предполагается, что $m=1$. Обозначим $Z=\{z_j|j=\overline{1, J}\}$ совокупность указанных нормативов, причем $z_{j+1}<z_j$, $j=\overline{1, J-1}$, $z_J=0$. Универсальная процедура классификации (1) в рассматриваемом случае

$$e(y_i)=\begin{cases}1, & y_i\geqslant z_1,\\ j+1, & z_{j+1}\leqslant y_i<z_j,\ j=\overline{1, J-1}.\end{cases}$$

При этом элемент i попадает в ранг 1 при $y_i\geqslant z_1$ и в ранг $j+1$, если $z_{j+1}\leqslant y_i<z_j$, $j=\overline{1, J-1}$, $z_J=0$. Если $З_i(y_i)$ строго монотонна по y_i, $i=\overline{1, n}$, то согласно (3), (4) $\forall i\in E_J{}^N(j)$ $y_i^*=z_j$, $j=\overline{1, J}$, так что $y_i^*\in Z$.

Рассмотрим задачу оптимального синтеза РСС (6) на множестве Ф-ограниченных РСС (7) в случае целевой функции центра, аддитивной по показателям состояний элементов $\left(\Psi(y)=\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)$. Положим $З_i(y_i)=$ $=a_k y_i^{\alpha}$, $\alpha>0$, $i\in\Gamma(k)$, $k=\overline{1, N}$, $a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_N$. Будем искать решение на множестве прогрессивных РСС, таких, что $\omega(j)=qz_i^{\alpha}$, $j=\overline{1, J}$, $J\leqslant N$.

Будем предполагать, что элемент выбирает наибольший из показателей, обеспечивающих ему максимальный выигрыш. Содержательно это соответствует благожелательности элемента по отношению к центру (т. е. элемент выбирает из множества показателей, максимизирующих его собственную целевую функцию, тот, при котором целевая функция центра максимальна). Тогда нетрудно получить, что

$$y_i^*=\begin{cases}0, & q<a_k,\\ z_1, & q\geqslant a_k,\quad i\in\Gamma(k),\ k=\overline{1, N}.\end{cases}$$

Отметим, что при этом справедливо утверждение 1, так что

$$K(s)=\sum_{j=1}^{J} z_j n_j(e), \tag{14}$$

где $n_j(e)$ определяется согласно (7). Легко видеть, что точность необходимой классификации равна двум ($I=2$), а ценность (J, 2)-переклассификации равна нулю при $2<J\leqslant N$. Учитывая (6), (7), (14), получаем, что искомая РСС определяется решением задачи

$$K(s)=n_1(e)z_1\xrightarrow[s]{}\max,\quad n_1(e)\,\omega(1)\leqslant \Phi. \tag{15}$$

Очевидно, что последнее неравенство в (15) выполняется как равенство.

Если $\alpha=1$, то $K(s)=\Phi/q$, так что решение (15) есть $q^*=a_1$, $n_1^*(e)=p_1$, $z_1=\Phi/a_1p_1$ и в первый ранг попадают наиболее эффективные элементы, а во второй — все остальные.

Если $\alpha\neq 1$, то (15) сводится к задаче

$$K(s)=[n_1(e)]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}q^{-\frac{1}{\alpha}}\xrightarrow[q]{}\max.$$

При $\alpha\gg 1$ $K(s)\sim n_1$, так что $n_1^*(e)=n$, $q^*=a_N$, $z_1^*=(\Phi/a_N\cdot n)^{1/\alpha}$, и в первый ранг попадают все претенденты. Если $\alpha\ll 1$, то $K(s)\simeq\simeq[n_1(e)q]^{-1/\alpha}\sim z_1$, так что $q^*=a_1$, $n_1^*(e)=p_1$, $z_1^*=(\Phi/a_1p_1)^{1/\alpha}$, т. е. стимулируются наиболее эффективные элементы.

7. Заключение

Выше был рассмотрен подход к исследованию и построению ранговых систем стимулирования, использующий методологию теории активных систем [1—3] и ориентированный на потребности практики [4—7]. Последние определяют необходимость, во-первых, введения адекватных формализованных понятий и определений, характеризующих как основной объект исследований — РСС в целом (эффективность, размерность и т. д.), так и основные его подсистемы — процедуру классификации (точность, ценность, необходимость) и шкалу поощрения (прогрессивность), и, во-вторых, установления взаимосвязей между ними. Если утверждение 1 и его следствие носят конструктивный характер (приведены достаточные условия, обеспечивающие решение задачи оптимального синтеза), то теоремы 1—3 устанавливают указанные взаимосвязи между основными понятиями, используемыми в задаче синтеза оптимальной РСС и ее подсистем. Исследование и разработка ранговых систем стимулирования разного типа (с прогрессивной шкалой поощрения, нормативных, Ф-ограниченных и других) представляет большой интерес, в частности, при реализации комплексного подхода к управлению научно-техническим прогрессом в отрасли приборостроения на основе методики АККОРД [6, 7].

В заключение отметим, что при доказательстве леммы, утверждений и теорем, по существу, не использовалось предположение о независимости элементов. Поэтому все полученные результаты остаются справедливыми и в гораздо более общем случае взаимосвязанных (например, соревнующихся [1, 2, 5]) элементов, когда процедура классификации в зависимости от выбираемых ими состояний есть совокупность N однозначных отображений $e=(e_1,\ldots,e_N)$:

$$e_k:Y\to Q,\quad Y=\prod_{i=1}^{n}Y_i,\quad k=\overline{1,N},\quad Q=\{j\,|\,j=\overline{1,J}\}.$$

Достаточно лишь, чтобы существовало непустое компактное множество решений игры элементов типа (4). Например, это имеет место, если целевая функция i-го элемента

$$f_i(y)=w_i(y)-З_i(y_i),\quad w_i(y)=\omega(e_k(y)),\quad i\in\Gamma(k),\quad k=\overline{1,N},$$

где $w_i(y)$ — поощрение элементу i при состоянии системы $y=(y_1,\ldots,y_n)$, и существует непустое множество

$$R(s)=\{y^*=(y_1^*,\ldots,y_n^*)\in Y\,|\,f_i(y^*)\geqslant f_i(y)\quad\forall y\in Y,\ i=\overline{1,n}\},$$

являющееся компактом.

Это обстоятельство расширяет область применения полученных результатов в задачах оптимального синтеза ранговых систем стимулирования.

Автор выражает благодарность Буркову В. Н. за обсуждение результатов работы.

1. *Доказательство леммы.* Достаточно показать, что $R(s^1)=R(s^2)$. Прежде всего, в силу условия 1) леммы $\forall y_i \in Y_i$ $e_k^1(y_i) \in E(e_k^2(y_i))$, а в силу условия 2) $\omega^1(e_k^1(y_i)) = \omega^2(e_k^2(y_i))$ $\forall i \in E_{J^1}{}^N(k)$, $k=\overline{1, J^1}$, так что согласно (3) при $\forall y \in Y$ $f_i^1(y)=w_i^1(y_i)-З_i(y_i)=w_i^2(y_i)-З_i(y_i)=f_i^2(y)$. Тогда, согласно определению $R(s)$ (4), имеем для любого $y^\alpha \in R(s^\alpha)$ $f_i^1(y^\alpha)=f_i^2(y^\alpha) \geqslant f_i^1(z)=f_i^2(z)$ $\forall z \in Y$, $\alpha=1, 2$. Таким образом, из $y^1 \in R(s^1)$ следует $y^1 \in R(s^2)$ и, наоборот, для любого $y^2 \in R(s^2)$ должно быть $y^2 \in R(s^1)$, т. е. $R(s^1)=R(s^2)$ и, согласно (5), $K(s^1)=K(s^2)$, что и требовалось доказать.

2. *Доказательство теоремы 1.* Пусть классификация точности I минимальна. Тогда в соответствии с определением (11)

$$K(\tilde{s}) = \max_{S \in s^I} K(s) > \max_{S \in s^j} K(s), \quad j=\overline{1, I-1}. \tag{П.1}$$

Предположим теперь, что найдется РСС $\tilde{s}=(I, e, \omega) \in \operatorname{Argmax}_{s \in S} K(s)$, такая, что шкала ω, удовлетворяющая (12), не является прогрессивной. Тогда найдется по меньшей мере одно целое число l, $2 \leqslant l \leqslant I$, такое, что $\omega(l-1)=\omega(l)$. Положим

$$E_{I-1}^{I}(h) = \begin{cases} \Gamma(h), & h=\overline{1, l-2}, \\ \Gamma(l-1) \cup \Gamma(l), & h=l-1, \\ \Gamma(h+1), & h=\overline{l, I-1} \end{cases}$$

и рассмотрим РСС $s'=(I-1, e', \omega')$, такую, что $\omega(l)=\omega'(h)$, $l \in E_{I-1}{}^I(h)$, $h=\overline{1, I-1}$, $e_k(y_i) \in E_{I-1}{}^I(e_k'(y_i))$, $y_i \in Y_i$, $i \in \Gamma(k)$, $k=\overline{1, I}$. Согласно лемме, имеем $K(\tilde{s}) = K(s') \leqslant \max_{s \in S^{I-1}} K(s)$, что противоречит (П.1). Теорема доказана.

3. *Доказательство теоремы 2.*

Необходимость следует из теоремы 1 при $I=N$.

Достаточность доказывается от противного. Пусть в множестве оптимальных согласно (5) РСС содержится подмножество точных РСС, так что найдется хотя бы одна полная оптимальная шкала поощрения, причем всякая такая шкала является прогрессивной. Если первичная классификация не является минимальной, то, по определению (10), найдется $I<N$, такое, что $K(\tilde{s}) = \max_{s \in S^l} K(s), l=\overline{I, N}$, $S=(I, \tilde{e}, \tilde{\omega})$. Учитывая, что $\max_{s \in S^l} K(s)$ $\max_{1 \leqslant j \leqslant N}$ $\max_{s \in S^j} K(s)$, и имея в виду (9), получаем $K(\tilde{s}) = \max_{s \in S} K(s)$.

Рассмотрим РСС с полной шкалой поощрения $s'=(N, e', \omega')$, такую, что $\omega'(l)=\tilde{\omega}(h)$, $l \in E_I{}^N(h)$, $e_k'(y_i) \in E_I{}^N(\tilde{e}_k(y_i))$, $y_i \in Y_i$, $h=\overline{1, I}$, $i \in \Gamma(k)$, $k=\overline{1, N}$. Тогда, согласно лемме, $K(s')=K(\tilde{s})$, откуда $K(s') = \max_{s \in S} K(s)$. Следовательно, ω' – полная оптимальная шкала поощрения. Однако поскольку $I<N$, то существует по меньшей мере одно целое число l, $2 \leqslant l \leqslant N$, такое, что $\omega'(l-1)=\omega'(l)$. Таким образом, для ω' не выполняется (13), т. е. существует полная оптимальная шкала поощрения ω', не являющаяся прогрессивной, что противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бурков В. Н.* Математические основы теории активных систем. М.: Наука, 1977.
2. *Бурков В. Н., Кондратьев В. В.* Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981.
3. *Бурков В. Н., Кондратьев В. В., Цыганов В. В., Черкашин А. М.* Теория активных систем и совершенствование хозяйственного механизма. М.: Наука, 1984.
4. *Трапезников В. А., Бурков В. Н., Гореликов Н. И. и др.* Комплексный подход к управлению научно-техническим прогрессом в отрасли.– Вестн. АН СССР, 1983, № 3, с. 33–43.
5. *Цыганов В. В., Рапацкая С. Т., Татарко И. В.* Методы подведения итогов социалистического соревнования НИИ и КБ.– В кн.: Интенсификация научной деятельности. М.: МДНТП, 1983, с. 89–93.
6. *Бурков В. Н., Гореликов Н. И., Черкашин А. М.* Принципы оценки деятельности предприятий Союзэлектроприбора.– Приборы и системы управления, 1982, № 10, с. 18–23.

7. *Бурков В. Н., Зимоха В. А., Цыганов В. В.* Методология и принципы автоматизированной комплексной оценки результатов деятельности научно-исследовательских, проектно-конструкторских и технологических организаций.– Приборы и системы управления, 1984, № 3, с. 41–43.

Поступила в редакцию
10.XI.1984

RANKING INCENTIVE SYSTEMS

TSYGANOV V. V.

Definitions are provided and problems of an optimal ranking incentive system (RIS) and its subsystems are stated. The relationship of the number of ranks (dimension) and effectiveness is established. The notions of classification value and minimality are defined. The necessary and sufficient conditions for minimality of primary classification are found, in particular, in the case of progressive RISs. The approach to optimal design is illustrated with normative RISs as an example.