УДК 519.007

ЦЕНТРАЛИЗОВАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ АКТИВНЫМИ СИСТЕМАМИ

В. Н. БУРКОВ, И. М. МАКАРОВ, В. Б. СОКОЛОВ

(Москва)

Проводится анализ функционирования модели жесткого централизованного управления активными системами. Даются результаты сравнения качества функционирования этой модели и модели согласованного планирования.

Введение

Важнейший и наиболее интересный (теоретически и практически) класс больших систем составляют системы, включающие в себя человека или коллектив людей. Примеры таких систем чрезвычайно многообразны. Сюда относятся социологические, экономические, политические, административные и другие системы. Характерной особенностью этого класса систем является наличие подсистем, имеющих свои целевые функции, которые в общем случае не совпадают с целевой функцией всей системы. Кроме того, подсистемы, включающие в себя человека, оказываются активными в том смысле, что для максимизации своей целевой функции они стремятся использовать не только имеющиеся физические ресурсы, например производственные мощности, но и информационные каналы. По этим каналам подсистемы получают информацию о действиях других подсистем, в частности о подсистемах, являющихся управляющими по отношению к рассматриваемым, и сообщают управляющим подсистемам свои возможности, т. е. дают описание своих моделей.

Иерархическая активная система (ИАС) полностью определена, если:

1) задана ее структура, т. е. для каждой подсистемы известна управляющая подсистема и множество управляемых подсистем (выделены уровни иерархии);

2) задана модель каждой подсистемы, т. е. способ представления множества возможных планов и целевая функция, зависящая от плана данной подсистемы, планов подчиненных ей подсистем, управления, установленного управляющей подсистемой, и управления, установленного данной подсистемой для управляемых подсистем;

3) определена связь планов подсистем нижнего уровня иерархии с планами подсистем верхнего уровня, т. е. каждому набору возможных планов подсистем, подчиненных рассматриваемой, ставится в соответствие определенный план рассматриваемой подсистемы. В последнем случае естественно происходит агрегирование информации.

Активная подсистема (АП) первого уровня иерархии называется центральным планирующим органом (ЦПО), а АП последнего уровня — элементами.

Будем считать, что функционирование ИАС происходит в три этапа:

1. Сообщение информации (информационный поток идет от нижних уровней иерархии к верхним).

2. Планирование (информация о планах и управлениях идет от верхних уровней иерархии к нижним).

3. Реализация планов (информационный поток снова идет от нижних уровней иерархии к верхним; при этом на каждом уровне вычисляется доход АП по заданному правилу).

На первом этапе каждая АП нижнего уровня (активный элемент) сообщает соответствующей управляющей подсистеме более высокого уровня множество своих возможных планов. Получив множество возможных планов от всех подчиненных ей подсистем, рассматриваемая управляющая подсистема формирует множество своих возможных планов и передает его в соответствующую подсистему следующего более высокого уровня иерархии. Этап заканчивается, когда ЦПО получит множество возможных планов от непосредственно подчиненных ему подсистем.

На втором этапе ЦПО назначает планы и управления для подчиненных подсистем так, чтобы получить максимум (или минимум) своей целевой функции. Получив планы и управления от ЦПО, эти подсистемы в свою очередь назначают планы и управления для подчиненных им подсистем более низкого уровня и так далее до самого нижнего уровня.

На третьем этапе каждый элемент реализует плановое задание, а из реализации планов элементов однозначно определяются реализации планов АП более высоких уровней вплоть до ЦПО.

Введем понятие функционально централизованных ИАС. ИАС считается функционально централизованной (или просто централизованной), если все показатели, характеризующие план некоторой АП, а также управления для этой АП устанавливаются соответствующей управляющей АП, расположенной на более высоком уровне иерархии. Таким образом, в случае функциональной централизации для определенных групп АП одного уровня иерархии существуют «центры принятия решений» в виде соответствующих управляющих АП.

Заметим, что наличие таких центров вовсе не означает, что они определяют все решения и сводят к нулю активность подсистем в процессе принятия решений. Подсистемы имеют право принимать любые решения, которые не связаны непосредственно с плановыми параметрами, т. е. имеют определенную свободу действий.

Централизованные ИАС могут существенно различаться в зависимости от специфики реализации названных выше этапов функционирования. Далее мы специально будем рассматривать только различия, связанные с этапом планирования. При этом будут проанализированы два принципа планирования в централизованных ИАС:

1. Планирование без учета целевых функций подчиненных подсистем (принцип жесткой централизации).

2. Планирование с учетом целевых функций подчиненных подсистем (принцип согласованного управления).

Основное отличие второго принципа от первого состоит в том, что он допускает назначение только таких планов, которые оказываются взаимовыгодными для управляющих и подчиненных подсистем с точки зрения их целевых функций. Анализ названных принципов управления будет проведен на одной и той же модели, имитирующей процесс назначения работ исполнителям.

Описание модели

Рассматривается двухуровневая ИАС, состоящая из ЦПО и m элементов, каждый из которых может выполнить n работ.

Действительная эффективность выполнения работ i-м элементом характеризуется n-вектором r_i. Компонент r_{ij} этого вектора задает истинные возможности i-го элемента по j-й работе. На этапе сообщения информации i-й элемент может характеризовать свои возможности произвольным n-вектором s_i, называемым вектором предпочтений.

Целевая функция i-го элемента задается в виде

$$(1)\qquad \varphi_i=\sum_{j=1}^{n}\left[r_{ij}+\lambda_j-\alpha\left|r_{ij}-s_{ij}\right|\right]x_{ij},$$

где λ_j — управление по j-й работе, α — коэффициент штрафа за расхождение предпочтений и истинных возможностей, x_{ij} — булева переменная ($x_{ij}=1$, если j-я работа назначена i-му исполнителю; $x_{ij}=0$, если j-я работа не назначена i-му исполнителю).

Целевая функция ЦПО, которая в данном случае является целевой функцией всей системы, определяется действительной эффективностью выполнения всех работ и записывается в виде

$$(2)\qquad R=\sum_{i,j}r_{ij}x_{ij}.$$

Выражения (1) и (2) используются для подсчета выигрышей от реализации планов.

Планы элементов получаются на этапе планирования с помощью решения задачи назначений типа

$$(3)\qquad \sum_{i,j}s_{ij}x_{ij}\to\max,$$

$$(4)\qquad \sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1\qquad (j=1,2,\ldots,n),$$

$$(5)\qquad \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1\qquad (i=1\ 2,\ldots,n).$$

В выражении (3) возможности элементов характеризуются векторами $s_i=\{s_{ij}\}$, так как считается, что ЦПО не знает векторов действительных возможностей.

При управлении по принципу жесткой централизации задача планирования, решаемая ЦПО, полностью совпадает с описанной выше. При этом управления λ заданы и сохраняются неизменными на всех периодах планирования.

В случае принципа согласованного управления в задачу (3) – (5) вводятся дополнительные ограничения типа

$$(6)\qquad \left[\max_k(s_{ik}+\lambda_k)-(s_{ij}+\lambda_j)\right]x_{ij}=0\quad \text{для всех } i,j.$$

Эти ограничения называются условиями согласования. Смысл их состоит в том, что i-му исполнителю может быть назначена j-я работа тогда и только тогда, когда сумма его предпочтения по j-му виду работы s_{ij} и управления λ_j не меньше, чем сумма соответствующих величин по другим видам работ.

Управление λ соответствует в данном случае значениям переменных двойственной задачи.

Легко видеть, что ограничение (6) отражает факт учета интересов подсистем на этапе планирования, так как оно гарантирует назначение исполнителю только «предпочтительной» для него работы.

Анализ модели

Рассмотрим функционирование описанной модели с точки зрения теории игр. Игроками в данном случае являются активные элементы. Игра относится к типу игр n лиц с ненулевой суммой. Будем рассматривать ее как бескоалиционную. Стратегией каждого игрока является выбор вектора s_i, сообщаемого в ЦПО. Действительно, задание множества векторов $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ полностью определяет игру, т. е. позволяет определить выигрыши участников по формуле (1) (естественно, после решения в ЦПО задачи назначения работ). Под решением игры будем понимать точку равновесия в смысле Нэша, т. е. такую точку s^*, в которой для каждого игрока i стратегия s_i^* обеспечивает максимальное значение функции выигрыша при условии, что остальные игроки $j \neq i$ придерживаются стратегии s_j^*. Нас будет интересовать существование и определение таких точек равновесия.

Если задача назначения работ имеет неединственное оптимальное решение, то возникает неопределенность при подсчете выигрышей игроков. Для нашего анализа достаточно следующее правило назначения работ в случае неоднозначности решения: если это возможно, игрок (активный элемент) получает работу, назначенную ему в предыдущей партии (правило устойчивости назначений). Как будет показано ниже, это правило обеспечивает во многих случаях существование ситуации равновесия.

Принцип жесткой централизации

Поскольку при функционировании системы по принципу жесткой централизации значения λ фиксированны, можно положить их равными нулю без ограничения общности. Рассмотрим сначала случай отсутствия штрафов ($\alpha = 0$).

Заметим, во-первых, что при отсутствии ограничений на s_{ij} игра не имеет решения. Исключение составляет случай, когда существует назначение работ элементам такое, что каждый элемент получает «выгодную» работу (работу с максимальной величиной r_{ij}). Поэтому примем, что все предпочтения

$$s_{ij} \geqslant 0 \text{ и } \sum_{j=1}^{n} s_{ij} = s > 0.$$

Упорядочим работы произвольным образом $j_1, j_2, \ldots, j_n$ и определим множество стратегий $s_i^* = \{s_{ij}^*\}$, $i = 1, 2, \ldots n$:

$$s_{ij}^* = \begin{cases} s, & \text{если } j = j_i, \\ 0, & \text{если } j \neq j_i. \end{cases}$$

Теорема 1. Любая точка $s^* = (s_1^*, s_2^* \ldots s_n^*)$ является точкой равновесия.

Действительно, если $s_i = s_i^*$, то изменение любого s_i при сохранении всех $s_j (j \neq i)$ постоянными не приведет к изменению назначений работ в силу правила устойчивости назначений.

Возможное развитие игры можно проследить на простом примере.

Пример. Пусть матрица действительных возможностей игроков имеет вид

$$(r_{ij}) = \begin{array}{c|ccc} i \backslash j & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 7 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \end{array}$$

I партия. Каждый игрок сообщает максимальные предпочтения по наиболее выгодной работе. Тогда стратегии игроков записываются в виде

$$s_1 = (s, 0, 0),$$
$$s_2 = (s, 0, 0),$$
$$s_3 = (s, 0, 0).$$

Первую работу может получить любой элемент (так как в ЦПО нет другой информации, кроме векторов s_1, s_2, s_3). Пусть, например, $x_{31} = 1$, т. е. первая работа назначена третьему элементу. В силу правила устойчивости назначений первый и второй элементы уже не могут рассчитывать на получение первой работы. Поэтому они сообщают максимальные предпочтения по наиболее выгодным из оставшихся работ (в данном случае по второй). При этом стратегии имеют вид

$$s_1 = (0, s, 0),$$
$$s_2 = (0, s, 0),$$
$$s_3 = (s, 0, 0).$$

II партия. Вторая работа может быть назначена и первому, и второму элементу. Пусть, например, $x_{22} = 1$ (вторую работу получил второй элемент). Очевидно, теперь первый элемент может получить только третью работу. Окончательно стратегии записываются в виде

$$s_1 = (0, 0, s),$$
$$s_2 = (0, s, 0),$$
$$s_3 = (s, 0, 0).$$

III партия. Получили точку равновесия. Заметим, однако, что любая точка $s = (s_1, s_2, s_3) = (s_{11}, s_{12}, s_{13}; 0, s, 0; s, 0, 0)$ также является точкой равновесия. Легко видеть, что полученные назначения работ в данном случае произвольны.

Таким образом, при отсутствии штрафов принцип жесткой централизации не решает задачи оптимального планирования в том смысле, что ситуация равновесия в общем случае не соответствует оптимальным назначениям работ. При наличии штрафов ситуация несколько изменяется. Здесь нет необходимости ограничивать предпочтения. Поэтому пусть предпочтения принимают любые значения. Проведем анализ для случая так называемого правильного поведения элементов. Поведение элементов будем называть правильным, если $s_{ij} \geqslant r_{ij}$ для всех i и j (сообщаемые предпочтения не меньше действительных эффективностей).

Ситуацию равновесия будем называть устойчивой, если для любого элемента i имеет место условие: если i-й элемент получил j-ю работу, то

$$r_{ij} + \lambda_j - \alpha(s_{ij} - r_{ij}) = \max_k [r_{ik} + \lambda_k - \alpha(s_{ik} - r_{ik})] \tag{7}$$

(в рассматриваемом случае все $\lambda_j = 0$).

Теорема 2. В случае правильного поведения элементов любой устойчивой ситуации равновесия s^* соответствует оптимальный план назначения работ.

Доказательство. Обозначим

$$V_i = \max_k [r_{ik} - \alpha(s^*_{ik} - r_{ik})].$$

В силу (7) имеем для любой устойчивой ситуации равновесия s^*:

$$s^*_{ik} \geqslant r_{ik} \frac{(1+\alpha)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} V_i \quad \text{для всех } i, k, \tag{8}$$

причем если $x_{ik}=1$, то $s^*_{ik}=r_{ik}\frac{1+\alpha}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}V_i$. Обозначим $x^*=\{x^*_{ij}\}$ план назначения работ, соответствующий ситуации s^*.

Имеем

$$\sum_{i,j} s^*_{ij}x^*_{ij}=\frac{1}{1+\alpha}\sum_{i,j} r_{ij}x^*_{ij}-\frac{1}{\alpha}\sum_i V_i.$$

Следовательно, x^*_{ij} является оптимальным планом назначения работ.

Таким образом, при условии правильного поведения элементов принцип жесткой централизации со штрафами решает задачу оптимального планирования в том смысле, что любой устойчивой ситуации равновесия соответствует оптимальный план назначения работ. Если отбросить условие правильного поведения, анализ существенно усложняется. В общем случае равновесными стратегиями поведения элементов являются смешанные стратегии и получаемые планы не являются оптимальными.

Принцип согласованного управления

Рассмотрим случай без штрафов.

Теорема 3. Любая устойчивая ситуация равновесия определяет оптимальные назначения работ.

Доказательство. Для любой устойчивой ситуации равновесия должны выполняться условия

(9) $\quad$ если $x_{ij}=1$, то $r_{ij}+\lambda_j=\max\limits_k(r_{ik}+\lambda_k)$.

Обозначим

$$\max_k(r_{ik}+\lambda_k)=V_i.$$

Тогда условия (9) можно записать так:

(10) $\quad [V_i-(r_{ij}+\lambda_j)]x_{ij}=0$,

(11) $\quad V_i\geqslant r_{ij}+\lambda_j$ для всех i, j.

Заметим теперь, что условия (11) аналогичны условиям оптимальности, которые необходимы и достаточны для того, чтобы линейная форма $\sum\limits_{i,j} r_{ij}x_{ij}$ принимала максимальное значение. Это доказывает теорему.

Возможное развитие игры, приводящее к ситуации равновесия за две партии, выглядит следующим образом.

I партия. Каждый элемент сообщает $s_{ij}=r_{ij}$. После решения задачи назначения определяются оптимальные назначения и оценки λ_j работ.

II партия. Каждый элемент сообщает:

(12) $\quad s_{ij}=\max(r_{ik}+\lambda_k)-\lambda_j$.

При этом назначения остаются прежними в силу принципа устойчивости назначения. Полученная ситуация является ситуацией равновесия (доказательство элементарно). Заметим, что полученная ситуация равновесия характеризуется тем, что каждый элемент сообщает истинные оценки $s_{ij}=r_{ij}$ по работе, которую он выполняет, и завышенные оценки $s_{ij}\geqslant r_{ij}$ по остальным работам.

Легко показать, что ситуация, определяемая (12), является ситуацией равновесия и при наличии штрафов.

Таким образом, принцип согласованного управления решает задачу оптимального планирования.

Заключение

Результаты теоретического анализа двух принципов централизованного планирования и предположения о свойствах модели были проверены путем проведения деловых игр, методика которых разработана в Институте проблем управления. Предварительные результаты игр подтвердили основные выводы теории. Так, в случае жесткой централизации со штрафами оказалось обоснованным предположение о правильном поведении элементов. Проверка принципа согласованного управления показала устойчивое функционирование системы в оптимальном режиме.

Поступила в редакцию
4 мая 1972 г.

CENTRALIZED CONTROL OF ACTIVE SYSTEMS

V. N. BURKOV, I. M. MAKAROV, V. B. SOKOLOV

The functioning of a model of active system stringent centralized control is analyzed. Performances of this model and of coordinated planning model are compared.