УДК 62-50

МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ КАК РЕГУЛЯРНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. I

В. Н. БУРКОВ, А. И. ЛАЗЕБНИК, И. Л. ХРАНОВИЧ

(Москва)

Рассматривается применение метода ветвей и границ для решения дискретных и многоэкстремальных задач выпуклого программирования.

Метод ветвей и границ известен как метод решения задач дискретного программирования. Однако идея метода, заключающаяся в использовании оценок значения целевой функции на подмножествах исходного множества допустимых векторов, может быть использована также для решения многоэкстремальных задач, рассматриваемых как последовательности регулярных выпуклых задач. При этом под регулярными понимаются задачи, для решения которых существует достаточно эффективный алгоритм.

Регулярные задачи выпуклого программирования могут быть решены либо на цифровой вычислительной машине [1], либо на аналоговой [2, 3]. В последнем случае решение может быть получено практически мгновенно — сразу после окончания переходного процесса в машине. Это означает, что при применении аналоговых вычислительных машин получение требуемых в методе ветвей и границ оценок может быть осуществлено практически мгновенно после настройки машины на решение построенной при ветвлении задачи. Указанное свойство аналоговых вычислительных машин делает привлекательным их применение не только для решения многоэкстремальных задач, но и для получения оценок в методе ветвей и границ при решении дискретных задач выпуклого программирования.

Ветвление и выбор подмножеств в методе ветвей и границ — процесс дискретный и его удобно осуществлять, используя цифровую вычислительную машину, в которой также запоминаются промежуточный и конечный результаты. Сочетание дискретного процесса ветвления и запоминания границ, проводимого в цифровой вычислительной машине, и получения оценок решения регулярных задач, осуществляемого в аналоговой вычислительной машине, делает метод ветвей и границ аналогово-цифровым методом, при помощи которого можно решать нерегулярные задачи математического программирования.

При проведении ветвления и вычисления оценок важно использовать специфику задачи. В данной статье метод ветвей и границ применяется к решению различных нерегулярных задач с учетом их особенностей в предположении, что класс регулярных задач выпуклого программирования (задачи A) характеризуется практически мгновенно решаемыми на аналоговой вычислительной машине задачами, обладающими седловой точкой функции Лагранжа. Эти задачи состоят в определении n-мерного вектора x^A, минимизирующего функцию $f(x)$ при следующих ограничениях, определяющих область G_A допустимых векторов:

$$g(x) \leqslant 0, \tag{1а}$$

$$x \geqslant 0. \tag{1б}$$

Здесь m-мерная вектор-функция $g(x)$, так же как и скалярная функция цели $f(x)$, предполагается представимой в виде суммы двух выпуклых функций: дифференцируемой и непрерывной сепарабельной. В зависимости от применяемых средств вычислительной техники и методов решения класс регулярных задач может быть и другим.

1. Дискретные задачи выпуклого программирования

Рассматриваемые в данном разделе задачи Б отличаются от регулярных задач выпуклого программирования А дополнительным требованием

$$x_s \in G_s = \bigcup_{\alpha} G_{s\alpha} \quad (s = 1, 2, \ldots, n_1 \leqslant n;\ \alpha = 1, 2, \ldots, r), \tag{2}$$

где $G_{s\alpha}$ — замкнутые непустые множества прямой, т. е. $G_{s\alpha} = [a_{s\alpha}, b_{s\alpha}]$. Наличие условия (2) делает область допустимых векторов задачи Б несвязной. Если для какого-нибудь x_s условие (2) не нарушает связности области его изменения, это условие можно включить в (1а). Таким образом, можно считать, что условия (2) имеют место только для переменных с несвязными областями изменения. Кроме того, предполагается, что множество точек $\xi_{s\alpha}$, каждая из которых принадлежит различным $G_{s\alpha}$, не имеет предельных точек. Не нарушая общности, предполагается, что все $G_{s\alpha}$ упорядочены по α, т. е. $a_{s,\alpha+1} > b_{s,\alpha}$.

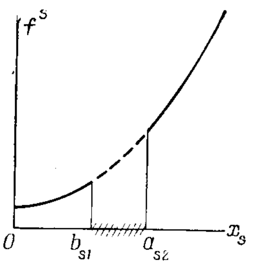

Рис. 1

Обычно под задачами дискретного программирования понимаются задачи, в которых все $a_{s\alpha} = b_{s\alpha}$ [4]. В данной статье под дискретными понимается более широкий класс задач, в которых области изменения переменных могут содержать и непрерывные отрезки. В частности, такие задачи возникают при оптимизации работы параллельно работающих аппаратов, имеющих зоны нежелательных режимов работы. Например, при выборе режимов работы турбин гидроэлектростанции, характеризующихся показанными на рис. 1 выпуклыми зависимостями величин расходов воды $f^s(x_s)$ от нагрузок x_s, необходимо учитывать запрещенную зону нагрузок (b_{s1}, a_{s2}) (при $x_s \in (b_{s1}, a_{s2})$ возникает нежелательная кавитация). В этом примере требуется так распределить нагрузки x_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$, чтобы суммарный расход воды $f(x) = \sum_{s=1}^{n} f^s(x_s)$ был минимальным при заданной суммарной нагрузке электростанции B, т. е. при $\sum_{s=1}^{n} x_s = B$ и естественном ограничении $x \geqslant 0$.

Решение задачи Б методом ветвей и границ заключается в решении последовательности задач $\{A_{ji}\}$, построенных следующим образом.

Решается задача A_1, отличающаяся от Б отсутствием ограничений (2); в том случае, когда условия (2) ограничивают область изменения некоторых переменных x_s, в задачу A_1 вводятся также дополнительные ограничения $x_s \leqslant M_s$ и (или) $x_s \geqslant m_s$. Так как множество $G_Б$ допустимых векторов задачи Б принадлежит множеству G_{A1} допустимых векторов задачи

A_1, значение $\omega_1 = f(x^{A_1})$ задачи A_1 не превосходит значения $f(x^Б)$ задачи Б и служит его нижней оценкой:

$$f(x^Б) \geqslant f(x^{A_1}) = \omega_1. \tag{3}$$

Поэтому, если отсутствует допустимый вектор задачи A_1 (при этом принимается $\omega_1 = +\infty$), то также отсутствует допустимый вектор задачи Б.

При $\omega_1 < +\infty$ и x^{A_1}, удовлетворяющем условиям (2), из (3) следует, что $x^Б$ совпадает с x^{A_1}, т. е. в этом случае решение исходной задачи Б совпадает с решением оценочной A_1.

Если $\omega_1 < +\infty$ и x^{A_1} не удовлетворяет условиям (2), осуществляется переход ко второму этапу, на котором решаются задачи A_{21} и A_{22}, каждая из которых отличается от задачи A_1 одним дополнительным ограничением, накладываемым на какую-нибудь координату x_{s1}, для которой условие (2) не выполнено. Такая координата обязательно найдется в силу предположения о том, что x^{A_1} не удовлетворяет условиям (2). Если этих координат несколько, выбирается любая из них.

Задача A_{21} отличается от A_1 условием $x_{s_1} \leqslant b_{s_1\alpha_1}$, задача A_{22} — условием $x_{s_1} \geqslant a_{s_1, \alpha_1+1}$, где α_1 — определяется решением задачи A_1, $b_{s_1\alpha_1} < x_{s_1}^{A_1} < a_{s_1, \alpha_1+1}$.

Решения задач A_{21} и A_{22} дают нижние оценки $\omega_{21} = f(x^{A_{21}})$ и $\omega_{22} = f(x^{A_{22}})$ значения функции $f(x)$ на множестве допустимых векторов задачи Б, принадлежащих соответственно областям $G_{A_{21}}$ и $G_{A_{22}}$. Так как $G_Б \subset G_{A_{21}} \cup G_{A_{22}}$, оценки ω_{21} и ω_{22} характеризуют $f(x^Б)$, точнее

$$f(x^Б) \geqslant \omega_2 = \min(\omega_{21}, \omega_{22}). \tag{4}$$

Пусть вектор x^2 — решение задачи A_2, для которого $f(x^2) = \omega_2$. Если этот вектор удовлетворяет условиям (2), то он является решением и задачи Б, т. е. в этом случае $x^Б = x^2$. Это видно из (4) и из того, что ω_2 оценивает все $x \in G_Б$. В противном случае осуществляется переход к третьему этапу, на котором решают две задачи A_{31} и A_{32} выпуклого программирования, отличающиеся от задачи A_2 дополнительными условиями: в задаче A_{31} — условием $x_{s_2} \leqslant b_{s_2, \alpha_2}$, в задаче A_{32} — условием $x_{s_2} \geqslant a_{s_2, \alpha_2+1}$, где s_2 и α определяются по задаче A_2 так же, как s_1 и α_1 по задаче A_1.

Объединение множеств допустимых векторов задач A_{2l} ($A_{2l} \neq A_2$), A_{31} и A_{32} включает допустимое множество исходной задачи Б. Поэтому значение задачи Б удовлетворяет неравенству $f(x^Б) \geqslant \omega_3 = \min(\omega_{2l}, \omega_{31}, \omega_{32})$ и ω_3 является оценкой задачи Б. Если вектор x^3, для которого $f(x^3) = \omega_3$, удовлетворяет условиям (2), то он является решением задачи Б, если не удовлетворяет — осуществляется переход к четвертому этапу так же, как от второго к третьему, с тем лишь различием, что задачи A_{41} и A_{42} строятся из задачи A_3, выбираемой по наименьшему значению оставшихся задач второго и третьего этапов. От четвертого этапа осуществляется переход к пятому, от пятого — к шестому и т. д., точно так же, как от третьего к четвертому, учитывая задачи предыдущих этапов.

Если на некотором j-м этапе множество допустимых векторов всех задач A_{j1}, A_{j2} и A_{il} $(2 \leqslant i \leqslant j-1,\ A_{il} \neq A_q,\ q \leqslant j-1,\ f(x^{A_q}) = \omega_q)$, значения которых образуют оценку ω_j, пусто, то пусто и множество допустимых векторов задачи Б и она не имеет решения. Этот случай характеризуется существованием j такого, что $\omega_j = +\infty$.

В прикладных задачах дискретного программирования, как правило, для каждого s либо число множеств $G_{s\alpha}$, входящих в условия (2), конечно, либо можно заранее указать пределы изменения x_s, внутри которых лежит соответствующая координата оптимального вектора $x^Б$. В этом случае в силу отсутствия предельных точек $\xi_{s\alpha}$ из различных $G_{s\alpha}$ число множеств $G_{s\alpha}$, лежащих внутри указанных пределов, конечно. Для таких задач искомый вектор $x^Б$ лежит в области, представляющей собой объединение конечного числа выпуклых областей. Поэтому при помощи описанной процедуры искомый вектор $x^{Б}$ будет найден за конечное число шагов (либо за конечное число шагов обнаружится его отсутствие), причем приводимый метод ветвей и границ позволяет заменить полный перебор всех возможных задач выпуклого программирования, заданных на соответствующих выпуклых областях, частичным перебором. Частичный перебор получается за счет того, что не рассматривается множество задач $А_{ji}$, значения которых выше значений аналогичных задач с решениями, удовлетворяющими условиям (2).

Если заранее нельзя установить ограниченность числа выпуклых областей, составляющих область допустимых векторов задачи Б, то в зависимости от структуры множества решений задачи $А_1$ описанный метод ветвей и границ либо приведет к искомому решению за конечное число шагов, либо образует последовательность векторов $x^{А_j}$, не сходящуюся к вектору $x^{Б}$. Ограниченность множества решений задачи $А_1$ влечет сходимость описанного метода ветвей и границ. Точнее, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Если множество Γ_1 оптимальных векторов задачи $А_1$ ограничено и существует решение $x^{Б}$ задачи Б, то найдется такое конечное число j, что $x^{А_j} = x^{Б}$.

Доказательство. Справедливость теоремы следует, во-первых, из того, что каждое ограниченное множество G содержит конечное число непустых множеств $G \cap G_{s\alpha}$, и, во-вторых, из леммы 1, согласно которой ограниченность множества решений задачи $А_1$ приводит к ограниченности множеств решений всех задач A_j, образуемых в методе ветвей и границ.

Лемма 1. Если множество Γ решений (оптимальных векторов) задачи А ограничено, то также ограничено любое подмножество D_c множества допустимых векторов $G_{А}$, на котором $f(x) \leqslant c$ для любого конечного c.

Доказательсво. Пусть $x^0 \in \Gamma = \{x^{А}\} \subset \{x \,/\, \|x\| < k\}$. Тогда по любому лучу, принадлежащему $G_{А}$, либо дойдем до границы выпуклой области $G_{А}$ и, следовательно, получим вектор $x^* : \|x^*\| < \infty$, либо $x^* \to \infty$ и найдется вектор x^1 такой, что $f(x^1) > f(x^0)$. Если в выбранном направлении $x^* \to \infty$, рассмотрим точку $x^2 = x^0 + \beta(x^1 - x^0)$ с $\beta > 1$, т. е. $x^1 = (1-\lambda)x^0 + \lambda x^2$ с $1 > \lambda > 0$. Так как $x^2 \overline{\in} \Gamma$, то $f(x^2) > f(x^0)$. Поэтому из выпуклости $f(x)$ следует, что

$$f(x^1) = f((1-\lambda)x^0 + \lambda x^2) \leqslant (1-\lambda)f(x^0) + \lambda f(x^2) <$$

$$< (1-\lambda)f(x^2) + \lambda f(x^2) = f(x^2), \qquad (5)$$

т. е. в выбранном направлении $f(x)$ — строго возрастающая, начиная по крайней мере от x_1, функция.

Так как $f(x)$ выпуклая, она растет не хуже линейной [1], что означает безграничное увеличение функции цели $f(x)$ при безграничном увеличении $x \in G_{А}$ по любому допустимому направлению.

Очевидно, что для $c \leqslant f(x^0)$ множество D_c ограничено либо как пустое $(c < f(x_0))$, либо как множество, совпадающее с $\Gamma(c = f(x_0))$. Поэтому, если существует неограниченное D_c, оно соответствует $c > f(x^0)$.

Пусть для некоторого $c > f(x^0)$ существует неограниченное множество $D_c = G_{А} \cap \{x \,/\, f(x) \leqslant c\}$, замкнутое выпуклое как пересечение замкнутых выпуклых множеств [1]. Так как D_c выпуклое неограниченное, найдется принадлежащий D_c неограниченный интервал прямой. Выберем на этом интервале последовательность $\{x^\alpha\}$ такую, что при $\alpha \to \infty$, $x^\alpha \to \infty$. Соединим точки x^α с x^0 прямыми. В силу выпуклости $f(x)$ и определения D_c на отрезках $[x^0, x^\alpha]$ функция $f(x) \leqslant c$. Из замкнутости множества векторов D_c следует, что и луч $\lim\limits_{\alpha\to\infty} [x^0, x^\alpha] \in D_c$, т. е. существует проходящая через точку x^0 принадлежащая $G^{А}$ прямая, на которой функция $f(x)$ ограничена постоянной c. Так как $f(x)$ не ограничена при неограниченном увеличении $x \in G_{А}$, полученное противоречие доказывает лемму.

Рассматриваемый в статье метод решения задач математического программирования удобно реализовать на аналогово-цифровом комплексе. Задачи выпуклого программирования A_j решаются на аналоговой машине, причем при переходе от задачи к задаче топология и параметры электрической цепи, на которой решается задача, не меняются, за исключением того, что в одну из дуг вводится ограничение $x_s \geqq \tau_s$, которое задается либо источником напряжения и диодом [2], либо источником тока и диодом [3]. Логика перехода от одной задачи выпуклого программирования к другой и запоминание дополнительных ограничений в решаемых задачах с оценками этих задач могут быть осуществлены в цифровой машине.

Так как на каждом j-м этапе величины ω_j оценивают снизу значение исходной задачи $f(x^Б)$: $\omega_j \leqslant f(x^Б)$, разность $\Delta_j^* = f(x^*) - \omega_j$ между значением функции цели в некоторой точке x^*, удовлетворяющей условиям (1а), (1б), (2), и оценкой j-го этапа характеризует погрешность приближенного решения $x^* : f(x^*) - f(x^Б) \leqslant f(x^*) - \omega_j = \Delta_j^*$.

Поэтому, если Δ_j^* не превышает допустимой погрешности решения ε_0:

$$\Delta_j^* \leqslant \varepsilon_0,$$

то x^* можно принять за приближенное решение и закончить процесс решения задачи. Это положение часто применяется в решении многоэкстремальных задач методом ветвей и границ.

2. Многоэкстремальные задачи на выпуклой области

В данном разделе рассматриваются многоэкстремальные задачи Б, отличающиеся от регулярных (1) смягчением требований, которым должна удовлетворять функция цели $f(x)$, и характеризующиеся теми же требованиями к вектор-функции ограничений $g(x)$. Предполагается, что можно указать ограниченную область Г, которой принадлежит решение задачи Б. В возникающих на практике задачах, как правило, такая область известна. Не нарушая общности, будем считать область Г прямоугольной, и ограничения, определяющие Г, заданными отдельно от определяющих $G_Б$ ограничений (1а) и (1б), т. е. область $G_Б$ допустимых векторов задачи Б представляется как

$$G_Б = c_Б \cap \Gamma = c_Б \cap \{x/\lambda \leqslant x \leqslant \Lambda\} =$$
$$= c_Б \cap \bigoplus_{s=1}^{n} \{x_s/\lambda_s \leqslant x_s \leqslant \Lambda_s\} = c_Б \cap \bigoplus_{s=1}^{n} \Gamma^s. \quad (6)$$

К задачам данного раздела относятся, в частности, одно- и многопродуктовые транспортные задачи, вид функции цели которых определяется ситуацией, описываемой этой задачей.

Под решением задачи Б в данном разделе понимается вектор $x^* \in G_Б$ со свойством

$$f(x^*) - f(x^Б) = f(x^*) - \min_{x \in G_Б} f(x) \leqslant \varepsilon_0, \quad (7)$$

где ε_0 — допустимая погрешность решения задачи. Таким образом, в отличие от задач раздела 1, которые можно решить точно, в данных задачах приходится довольствоваться приближенным решением x^* из допустимой области, вообще говоря, не совпадающим с точным x^0.

Процесс решения исходной задачи Б состоит из ряда последовательных этапов $\{j\}$. На каждом j-м этапе рассматривается совокупность ограничивающих регулярных задач $\{A_{pl}\}_j (A_1,\ 2 \leqslant p \leqslant j$, при $p < j$, $A_{pl} \neq A_q$, $l = 1, 2$ при $p = j$, A_q — задача, исключаемая на q-м ($q \leqslant j-1$) этапе), обладающих свойствами:

а) $G_Б = \bigcup_{\{pl\}_j} G_A$, т. е. каждый допустимый вектор исходной задачи должен быть допустимым вектором хотя бы одной ограничивающей задачи и каждый допустимый вектор ограничивающей задачи должен принадлежать допустимой области исходной задачи;

б) $f_{pl}(x) \leqslant f(x)$ для $x \in G_{A_{pl}}$ во всех ограничивающих задачах, где $f_{pl}(x)$ — целевая функция ограничивающей задачи A_{pl} из $\{A_{pl}\}_j$.

Значение каждой из ограничивающих задач $\omega_{pl} = f_{pl}(x^{A_{pl}})$ согласно свойству «б» может служить нижней границей $f(x)$ на $G_{A_{pl}}$ и величина $\omega_j = \min_{pl \in \{pl\}_j} \omega_{pl}$ согласно свойству «а» может служить нижней оценкой оптимального значения исходной задачи

$$f(x^{Б}) \geqslant \omega_j. \tag{8}$$

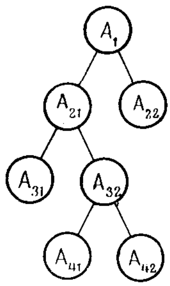

Рис. 2

Неравенство (8) совместно с очевидным

$$f(x^{Б}) \leqslant W_j = \min_{1 \leqslant p \leqslant j} W_{pl} =$$

$$= \min_{i \leqslant p \leqslant j} f(x^{A_{pl}}) = f(x^{A^j}) \tag{9}$$

позволяет оценить погрешность решения исходной задачи на j-м этапе. Поэтому, если на j-м этапе

$$f(x^{A_j}) - f(x^{Б}) = W_j - f(x^{Б}) \leqslant W_j - \omega_j = \Delta^j \leqslant \varepsilon_0, \tag{10}$$

вектор x^{A_j}, определяемый в соотношении (9), можно принять за приближенное решение исходной задачи, т. е. положить $x^* = x^{A_j}$.

Этапы решения задачи Б, как последовательности регулярных задач A_{jl}, характеризуются сходящейся к нулю последовательностью Δ^j и, следовательно, выполнением за конечное число шагов неравенства (10), означающего конец решения задачи. Переход от одного этапа решения к другому заключается в том, что из совокупности ограничивающих задач этапа исключается одна задача. Ее допустимая область разбивается на несколько, обычно на две, на которых задается новая регулярная задача. Построенные задачи включаются в совокупность ограничивающих задач вместо исключенной (рис. 2).

Возможность решения в смысле (7) исходной задачи заключается в более точной, по сравнению с исключаемой задачей, аппроксимации исходной функции несколькими функциями, заданными на подмножествах, на которые разбивается допустимое множество исключаемой задачи. В статье исходная функция цели на прямоугольных подмножествах Γ_{jl} множества Γ аппроксимируется ее выпуклой оболочкой $co f(x)$, равной верхней грани всех выпуклых функций $\varphi_\alpha(x)$ [5], заданных на Γ_{jl} и не превосходящих $f(x)$:

$$f_{jl}(x) = \underset{x \in \Gamma_{jl}}{co} f(x) = \sup_{\substack{\alpha \\ x \in \Gamma_{jl}}} \varphi_\alpha(x) \tag{11}$$

($co f(x)$ выпукла, как верхняя грань выпуклых функций [1]).

Построение $co f(x)$ в работе производится на прямоугольных множествах Γ_{jl}, а не на выпуклом $G_{A_{jl}} = \Gamma_{jl} \cap c_p$, хотя $A_{A_{jl}} \subset \Gamma_{jl}$ и, вообще говоря, на нем $co f(x)$ более точно аппроксимирует $f(x)$, чем на Γ_{jl}. Построение $f_{jl}(x) = \underset{x \in \Gamma_{jl}}{co} f(x)$ обусловлено возможностью просто строить $co f(x)$ некоторых функций на прямоугольных множествах, построение же $co f(x)$ на произвольном выпуклом множестве $G_{A_{jl}}$ — задача, эквивалентная исходной.

Сепарабельное программирование

Среди рассматриваемых в разделе задач Б выделим сепарабельные, т. е. задачи, функция цели которых представима в виде

$$f(x) = \sum_{s=1}^{n} f^s(x_s).$$

Сепарабельные функции характеризуются следующим свойством.

Лемма 2. $cof(x)$ сепарабельной функции $f(x)$ на прямоугольном множестве $\bigoplus_{s=1}^{n} \Gamma^s = \Gamma \subset E^n$ равно сумме $cof^s(x_s)$ по каждой координате x_s вектора x на соответствующем промежутке $\Gamma^s \subset E^1$

$$\underset{x \in \Gamma}{co} f(x) = \sum_{s=1}^{n} \underset{x_s \in \Gamma^s}{co} f^s(x_s).$$

Доказательство. Рассмотрим определяющие множества A, $A_s \in E^{n+1}$ $(s = 1 \div n)$ функций f и f^s [5]:

$$A = \left\{ \begin{matrix} x \\ \xi \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x \in \Gamma \subset E^n \\ \xi \geqslant f(x) \end{matrix} \right\}, \qquad A_s = \left\{ \begin{matrix} x_t = 0 \\ x_s \\ \xi_s \end{matrix} \middle| \begin{matrix} t \neq s \\ x_s \in \Gamma^s \subset E^1 \\ \xi \geqslant f^s(x_s) \end{matrix} \right\}.$$

Так как на множестве Γ функция $f(x)$ сепарабельна, то

$$A = \sum_{s=1}^{n} A_s \tag{12}$$

и выпуклая оболочка $co\,A$ множества A равна сумме выпуклых оболочек $co\,A_s$ множеств A_s [6]:

$$co\,A = \sum_{s=1}^{n} co\,A_s.$$

Из определений выпуклой оболочки множества (как наименьшего выпуклого множества, содержащего данное [6]) и $cof(x)$ функции (11) на основании утверждения [6], согласно которому $f(x)$ будет выпуклой функцией на множестве $x \subset E^n$ в том и только в том случае, если определяющее множество выпукло в E^{n+1}, следует, что

$$co\,A = \left\{ \begin{matrix} x \\ \xi \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x \in \Gamma \\ \xi \geqslant co\,f(x) \end{matrix} \right\}, \qquad co\,A_s = \left\{ \begin{matrix} x_t = 0 \\ x_s \\ \xi_s \end{matrix} \middle| \begin{matrix} t \neq s \\ x_s \in \Gamma_s \\ \xi \geqslant co\,f^s(x_s) \end{matrix} \right\}, \tag{13}$$

Соотношения (12), (13) совместно с указанным утверждением на (6) заканчивают доказательство леммы.

Из леммы 2 следует, что для сепарабельных задач построение $cof(x)$ функции на прямоугольном множестве сводится к построению $cof(x)$ по каждой координате. Это положение — основное для выделения класса сепарабельных задач, так как построение $cof(x)$ функции одного переменного на связном замкнутом ограниченном множестве осуществляется обычно весьма просто на основании приведенных ниже свойств $cof^s(x_s)$.

Свойства $cof(x)$ функции одного переменного

Лемма 3. Пусть на множестве $\Gamma = \{x / \lambda \leqslant x \leqslant \Lambda\} \subset E^1$ определена полунепрерывная снизу функция $f(x)$. Тогда $cof(x)$ этой функции на множестве Γ определяется равенствами:

$$f(\lambda) = cof(\lambda), \; f(\Lambda) = cof(\Lambda), \; f(x_0) = \min_{x \in \Gamma} f(x) = \min_{x \in \Gamma} cof(x) = cof(x_0).$$

Лемма 4. $cof(x)$ заданной на множестве $\Gamma = \{x | \lambda \leqslant x \leqslant \Lambda\} \subset E^1$ полунепрерывной снизу функции $f(x)$ — непрерывная функция.

Лемма 5. Пусть на некотором выпуклом множестве $\Gamma \subset E^1$ задана полунепрерывная снизу функция $f(x)$. Тогда

$$co\, f(x) = \inf_{x_\alpha\, x_\beta} [\alpha f(x_\alpha) + \beta f(x_\beta)],$$

$$(\alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0, \alpha + \beta = 1,\ \alpha x_\alpha + \beta x_\beta = x, x_\alpha, x_\beta \in \Gamma).$$

Таким образом, для $\forall x \in \Gamma$ либо $cof(x) = f(x)$, либо существует такой замкнутый отрезок $\gamma \subset \Gamma$, содержащий точку x, что на этом отрезке $cof(x)$ — линейная функция; $cof(x)$ можно представить в виде ряда участков, на которых она либо совпадает с исходной, либо линейная, в двух крайних точках совпадающая с исходной.

Следствие леммы 5. 1. В определении (11) $cof(x)$ полунепрерывной снизу функции $f(x)$, заданной на выпуклом множестве Γ, в качестве выпуклых функций φ_α можно ограничиться линейными и определить $cof(x)$ как верхнюю грань линейных функций $\psi_\alpha(x)$, не превосходящих $f(x)$ на Γ: $cof(x) = \sup\limits_{\substack{\alpha \\ x \in \Gamma}} \psi_\alpha(x)$.

2. $cof(x)$ заданной на выпуклом множестве неубывающей (невозрастающей) функции — функция неубывающая (невозрастающая).

3. $cof(x)$ заданной на выпуклом множестве вогнутой функции — функция линейная.

4. $cof(x)$ дифференцируемой функции — функция дифференцируемая, причем во внутренних точках, в которых $cof(x) = f(x)$ выполняется равенство $\dfrac{d\,cof(x)}{dx} = \dfrac{df(x)}{dx}$.

Заданную на некотором множестве $\Gamma_1 \subset E^1$ равномерно непрерывную функцию $f(x)$ будем характеризовать модулем равномерной непрерывности относительно $\forall \varepsilon > 0$:

$$M_f(\varepsilon, \Gamma_1) = \frac{\varepsilon}{\delta_\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\sup \bar{\bar{\delta}}}$$

$$(\bar{\delta} > 0,\ \forall x_1,\ x_2 \in \Gamma_1, \quad |x_1 - x_2| < \bar{\delta}, \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon). \tag{14}$$

Очевидно, что

$$M_f(\varepsilon, \Gamma) \geqslant M_f(\varepsilon, \Gamma_1) \text{ для } \Gamma_1 \subset \Gamma.$$

Если непрерывная функция $f(x)$ определена на множестве $\Gamma = \{x / \lambda \leqslant x \leqslant \Lambda\}$), то ее $cof(x)$ также непрерывная функция на Γ (лемма 4). Поэтому, в силу замкнутости и ограниченности Γ, $f(x)$ и $cof(x)$ равномерно непрерывны на этом множестве, причем модули равномерной непрерывности $M_f(\varepsilon, \Gamma)$ и $M_{cof}(\varepsilon, \Gamma)$ связаны между собой. Соотношение, связывающее $M_f(\varepsilon, \Gamma)$ и $M_{cof}(\varepsilon, \Gamma)$ устанавливает лемма 6.

Лемма 6. Пусть на множестве $\Gamma = \{x / \lambda \leqslant x \leqslant \Lambda\} \subset E^1$ определена непрерывная функция $f(x)$. Тогда на любом участке $\gamma = \{x/\alpha \leqslant x \leqslant \beta) \subset \Gamma$ длиной $d_\alpha = \beta - \alpha \geqslant \delta_\varepsilon$, на котором $cof(x)$ линейна и $cof(x) = f(\alpha)$, $cof(\beta) = f(\beta)$,

$$M_{cof}(\varepsilon, \gamma) = \left| \frac{cof(x_2) - cof(x_1)}{x_2 - x_1} \right| \leqslant M_f(\varepsilon, \Gamma),$$

где $x_1, x_2 \in \gamma$ и δ_ε определены в (14).

Подробное изложение метода ветвей и границ для решения задач с сепарабельной функцией цели и обобщение предлагаемого подхода на более широкие классы задач будет рассмотрено во второй части работы.

Поступила в редакцию
13 июля 1971 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Зойтендек Г.* Методы возможных направлений. Изд-во иностр. лит., 1963.
2. *Рыбашов М. В., Дудников Е. Е.* Градиентные методы решения линейных равенств, неравенств и задач линейного программирования на АВМ. «Советское радио», 1970.
3. *Хранович И. Л.* Электрическая модель общей задачи выпуклого программирования. Докл. 5-й межвузовской конференции по математическому и физическому моделированию, секция «Аналоговое моделирование в различных областях техники». МЭИ, 1968.
4. *Корбут А. А., Филькенштейн Ю. Ю.* Дискретное программирование. «Наука», 1969.
5. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи. Усп. матем. наук, № 6, 1968.
6. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Изд. иностр. лит., 1962.

THE BRANCH-AND-BOUND METHOD AS A REGULAR SOLUTION METHOD FOR IRREGULAR MATHEMATICAL PROGRAMMING PROBLEMS. I

V. N. BURKOV, A. I. LAZEBNIK, I. L. KHRANOVICH

The paper is concerned with the application of the branch- and-bound method to solution of discrete and multi-extremum convex programming problems.