УДК 62-50

ЗАДАЧИ СТИМУЛИРОВАНИЯ И ПОЛУЧЕНИЯ ОБЪЕКТИВНЫХ ОЦЕНОК В АКТИВНЫХ СИСТЕМАХ

А. Г. ИВАНОВСКИЙ

(Москва)

Рассматривается формирование законов взаимодействия для активных систем. Результат применяется к задачам стимулирования высоких планов, перепланирования, получения объективных оценок.

Введение

Характерной чертой больших систем является наличие подсистем, имеющих свои локальные цели, в общем случае не совпадающие с глобальной целью всей системы [1]. Одним из способов управления большими системами является управление «через среду», где под средой понимается закон взаимодействия подсистемы с внешним для нее управляющим органом всей системы. Задачей управляющего органа становится в этом случае формирование такого закона взаимодействия, при котором, действуя в интересах своей локальной цели, подсистема наилучшим образом (в смысле некоторогс критерия) содействует цели всей системы [2].

В данной работе рассматривается формирование таких законов для класса систем, названных активными системами. Примерами активных систем могут служить системы «плановая организация — предприятие», «система материально-технического снабжения» и многие другие. Исследуется ряд частных случаев, для которых удается получить оптимальные законы взаимодействия.

Активные системы

Рассмотрим объект, характеризуемый в любой момент t состоянием $x(t)$ и функционирующий в интервале времени $[0, T]$. Обозначим: x — конечное состояние объекта (т. е. $x = x(T)$). Далее предполагается, что $0 \leqslant x < \infty$; $p(x)$ — плотность распределения x.

Взаимодействие объекта с управляющим органом системы происходит следующим образом. В начальный момент $t = 0$ объект «сообщает» управляющему органу (УО) прогнозируемое значение конечного состояния $\bar{x}$. В конце интервала T объект получает «вознаграждение» в зависимости от значения конечного состояния x и его соответствия прогнозу. Эта зависимость имеет вид

$$Q(x, \bar{x}) = \varphi_0(x) - \varphi(x - \bar{x}), \tag{1}$$

где $\varphi(x - \bar{x})$ можно трактовать как штраф за несоответствие прогнозируемого и реального значений конечного состояния объекта. В силу этого будем предполагать $\varphi(x - \bar{x})$ неубывающей функцией $|x - \bar{x}|$. Взаимодействие УО с объектом может быть и более сложным, например можно допустить повторную, более точную оценку возможностей объекта. Такая переоценка (уточняющая значение прогнозируемого параметра $\bar{x}$), увеличивая, с одной стороны, «вознаграждение» объекта, с другой стороны, может уменьшить потери системы, так как позволяет своевременно принять необходимые меры (т. е. «выгодна» и объекту и системе).

Функционирующие описанным выше способом объекты будем называть активными элементами, если они удовлетворяют следующим двум условиям:

1) объект знает свои возможности, т. е. плотность распределения $p(x)$ (управляющий орган в общем случае этого распределения не знает!);

2) объект максимизирует ожидаемое «вознаграждение», т. е. сообщает в управляющие орган прогнозируемое значение $\bar{x}$, при котором ожидаемый штраф

$$S(\bar{x})=\int_0^\infty \varphi(x-\bar{x})p(x)\,dx \tag{2}$$

минимален.

Системы, образованные УО и конечным множеством активных элементов, называются активными системами. Понятие активных систем введено В. Н. Бурковым в работе [3].

Имея в виду экономическое приложение рассматриваемой модели, будем называть закон (1) законом стимулирования. Активным элементом может быть, например, предприятие, сообщающее в начале периода планируемый выпуск продукции $\bar{x}$ и выпускающее x продукции, потребитель, заказывающий в начале планируемого периода $\bar{x}$ продукции потребляющий x продукции и т. д.

Задача управляющего органа, таким образом, состоит в том, чтобы определить такой закон стимулирования (1), при котором потери в системе минимальны. При этом предполагается известной зависимость потерь системы от значений x и $\bar{x}$.

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих изложенную задачу.

Стимулирование высоких планов

Рассмотрим систему «плановая организация — предприятие», выпускающую один вид продукции. Целью плановой организации является создание такого закона стимулирования, т. е. такой внешней среды для предприятия, чтобы принятие высоких планов и их выполнение было целесообразно для предприятия. Исследуем механизм получения уровня плана, который будет предоставлять предприятие в плановую организацию. В данном случае $\bar{x}$ — количество продукции, выпуск которой планирует предприятие в начале планируемого периода (например квартала), x — количество продукции, выпущенное предприятием в действительности за планируемый период. Примем в законе (1) $\varphi_0(x) = k_0x$, $k_0 = C_0 - C_1$ (C_0 — оптовая цена единицы выпущенной продукции, C_1 — себестоимость единицы продукции);

$$\varphi(x-\bar{x})=\begin{cases}-\beta(x-\bar{x}) & \text{при } (x-\bar{x})\leqslant 0,\\ \alpha(x-\bar{x}) & \text{при } (x-\bar{x})\geqslant 0\end{cases} \tag{3}$$

$$(0<\beta<\infty,\ 0<\alpha<k_0),$$

где β — штраф за единицу недовыпущенной продукции; α — штраф за единицу продукции, выпущенной сверх плана.

Заметим, что при выбранном законе $Q(x,\bar{x})$ — монотонно возрастающая функция x и, как следствие этого, предприятие заинтересовано в максимальном выпуске продукции (в силу условия (2)). Определим оптимальное значение $\bar{x}$. Решая уравнение $\frac{\partial S(\bar{x})}{\partial \bar{x}}=0$, получаем, что оптимальное значение $\bar{x}$ удовлетворяет уравнению

$$F(\bar{x})=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \qquad (4)$$

где $F(\bar{x})=\int\limits_0^{\bar{x}} p(x)\,dx$.

Обозначим $V(\bar{x}) = 1 - F(\bar{x})$ и исследуем (4) для различных соотношений α и β:

$$\text{если } \alpha=\beta, \text{ то } F(\bar{x}) = V(\bar{x}) = 1/2, \qquad (5)$$

$$\text{если } \alpha/\beta\to\infty, \text{ то } F(\bar{x})\to 1;\; V(\bar{x})\to 0, \qquad (6)$$

$$\text{если } \alpha/\beta\to 0, \text{ то } F(\bar{x})\to 0;\; V(\bar{x})\to 1. \qquad (7)$$

Например, для $p(x) = 1/b$, $F(\bar{x}) = \bar{x}/b$, $x\in[0,\ b]$ получаем следующее значение $\bar{x}$:

$$\bar{x}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}b.$$

Ожидаемый штраф в этом случае равен

$$S(\bar{x})=\frac{\alpha\beta b}{2(\alpha+\beta)}. \qquad (8)$$

Для случае (5) $\bar{x}=b/2$, т. е. предприятие представляет в плановую организацию сведения, соответствующие медиане распределения. При этом вероятность перевыполнения равна вероятности срыва: $F(\bar{x}) = V(\bar{x})$.

Для случая (6) предприятие заинтересовано в высоких планах, при этом вероятность перевыполнения плана меньше вероятности его недовыполнения $F(\bar{x}) > V(\bar{x})$.

В случае (7) предприятие при формировании плана занижает свои возможности, чтобы гарантировать себя от значительных потерь при срыве плана. Вероятность перевыполнения плана в этом случае выше, чем вероятность срыва плана: $F(\bar{x}) < V(\bar{x})$.

Выбор коэффициентов α и β представляет отдельную задачу и определяется целями плановой организации. Рассмотрим случай, когда система несет потери только от несоответствия запланированной и выпущенной продукции.

Пусть величина потерь $f(x,\bar{x})$ системы определяется выражением $f_0(x)+f_1(x-\bar{x})$, где

$$f_1(x-\bar{x})=\begin{cases}\gamma(x-\bar{x}) & \text{при } x\geqslant\bar{x},\\ -\delta(x-\bar{x}) & \text{при } x\leqslant\bar{x},\end{cases}\quad (0<\gamma,\delta<\infty), \qquad (9)$$

δ — потери от единицы недовыпущенной продукции; γ — потери от единицы продукции, выпущенной сверх плана (действительно, в случае выпуска предприятием сверхплановой продукции в системе появляются излишки, которые необходимо хранить, перевозить и т. д.).

Средняя величина потерь системы $\Lambda(\bar{x})$ составит

$$\Lambda(\bar{x})=\delta\int\limits_0^{\bar{x}}(\bar{x}-x)p(x)\,dx+\gamma\int\limits_{\bar{x}}^{\infty}(x-\bar{x})p(x)\,dx+\int\limits_0^{\infty}f_0(x)p(x)\,dx.$$

Решая уравнение $\frac{\partial\Lambda(\bar{x})}{\partial\bar{x}}=0,$ получаем, что потери в системе минимальны, если

$$F(\bar{x})=\frac{\gamma}{\gamma+\delta}. \qquad (10)$$

Обозначив в выражении (4) $\beta / \alpha = m$, а в (10) $\delta / \gamma = n$, запишем (4) и (10) следующим образом:

$$F(\bar{x})=\frac{1}{m+1}, \qquad (4')$$

$$F(\bar{x})=\frac{1}{n+1}. \qquad (10')$$

Сравнивая (4′) с (10′), находим оптимальное значение m в законе стимулирования (1):

$$m = n. \qquad (11)$$

Важно отметить, что оптимальный закон стимулирования (т. е. величина $m = \beta / \alpha$ в законе (3)), не зависит от неизвестной плановому органу плотности распределения $p(x)$.

При условии (11) ожидаемый штраф предприятия составит:

$$S(\bar{x})=\frac{\alpha}{\gamma}\Lambda(\bar{x})=\frac{\beta}{\delta}\Lambda(\bar{x}). \qquad (12)$$

Выражение (12) может служить основой для выбора коэффициентов α и β. Действительно, если принять, что предприятие оплачивает некоторую часть $\varkappa$ потерь $\Lambda(\bar{x})$, то следует положить $\alpha = \varkappa\gamma$ и $\beta = \varkappa\delta$, где $0 \leqslant \varkappa \leqslant 1$, тогда ожидаемый штраф предприятия будет

$$S(\bar{x}) = \varkappa\Lambda(\bar{x}). \qquad (13)$$

Задача перепланирования

Задача перепланирования есть продолжение предыдущего примера, но рассматривает более сложное взаимодействие предприятия с плановой организацией, когда допустимо изменение предприятием первоначального плана с целью уменьшения как штрафа предприятия, так и потерь системы. Введем следующие обозначения: τ — время работы предприятия от начала планового периода $0 \leqslant \tau \leqslant T$; $N(\tau)$ — количество продукции, выпущенное предприятием за время τ; $\lambda(\tau, y, z)$ — функция штрафа за перепланирование в момент τ, где y — величина нового плана, заявленного при перепланировании (без учета $N(\tau)$); $z = \bar{x} - N(\tau)$ — количество продукции, которое осталось выпустить по старому плану; x — как и ранее, количество продукции, выпущенное в действительности за период T; $p_\tau(x)$ — плотность распределения величины x в момент τ; очевидно, что $p_\tau(x) = 0$ при $0 \leqslant x < N(\tau)$.

Общая величина вознаграждения, получаемая предприятием, в этой задаче отличается от величины (1) на величину штрафа за переплапирование и имеет вид

$$Q(z, y, x) = \varphi_0(x) - \lambda(\tau, y, z) - \varphi(x - y). \qquad (14)$$

Примем

$$\lambda(\tau, y, z)=\begin{cases}\alpha(y-z)\xi & \text{при } y \geqslant z,\\ \beta(z-y)\xi & \text{при } y \leqslant z,\end{cases} \qquad (15)$$

где $\xi = \tau^2 / T^2$, значения α и β те же, что и в примере 1.

Вид функции $\lambda(\tau, y, z)$ выбран из следующих соображений:

1) $\lambda(\tau, y, z) = 0$ при $\tau = 0$;

2) поскольку перепланирование более эффективно в начале периода, чем в конце, целесообразно взять $\lambda(\tau, y, z)$ возрастающей функцией τ (в данном случае взята квадратичная функция);

3) для того чтобы исключить перепланирование при $\tau = T$, необходимо, чтобы штраф при перепланировании был равен (в общем случае не меньше) штрафу при отсутствии перепланирования (как легко проверить, в случае (15) эти штрафы равны).

Ожидаемые потери предприятия при работе по новому плану составляют:

1) для $y = y_1$, $y_1 > z$

$$S(y_1) = \alpha(y - z)\xi + \beta\int\limits_{N(\tau)} (y - x)p_\tau(x)\,dx + \alpha\int\limits_{y}^{\infty} (x - y)p_\tau(x)\,dx; \quad (16)$$

2) для $y = y_2$, $y_2 < z$

$$S(y_2) = \beta(z - y)\xi + \beta\int\limits_{N(\tau)}^{y} (y - x)p_\tau(x)\,dx + \alpha\int\limits_{y}^{\infty} (x - y)p_\tau(x)\,dx. \quad (17)$$

Решая $\frac{\partial S(y_1)}{\partial y_1} = 0$ и $\frac{\partial S(y_2)}{\partial y_2} = 0$, находим оценки параметров y_1 и y_2:

$$\Phi(y_1) = \frac{1}{1+m}(1 - \xi) \quad \text{при } y_1 > z \quad (18)$$

$$\Phi(y_2) = \frac{1}{1+m}(1 + m\xi) \quad \text{при } y_2 < z, \quad (19)$$

где

$$\Phi(y) = \int\limits_{0} p_\tau(x)\,dx.$$

В случае, когда случайная величина y распределена по равномерному закону с параметрами $[N(\tau), a]$, имеем следующие значения y_1 и y_2:

$$y_1 = (a - N(\tau))\frac{1}{1+m}(1 - \xi), \quad (20)$$

$$y_2 = (a - N(\tau))\frac{1}{1+m}(1 + m\xi), \quad (21)$$

Заметим, что $y_2 > y_1$ при $\xi > 0$. Поэтому при $y_1 \leqslant z \leqslant y_2$ перепланирование невыгодно предприятию. Из (20) и (21) получаем, что перепланирование невыгодно предприятию при

$$N(\tau) + z\frac{1+m}{1+m\xi} \leqslant a \leqslant N(\tau) + z\frac{1+m}{1-\xi}$$

или в общем случае

$$\frac{1}{1+m}(1 - \xi) \leqslant \Phi(z) \leqslant \frac{1}{1+m}(1 + m\xi). \quad (22)$$

Рассмотрим численный пример: $\alpha = \beta = 1$, $b = 100$, $\xi = 0{,}1$, $N(\tau) = 20$. Имеем $z = x - N(\tau) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} b - N(\tau) = 30$ и перепланирование невыгодно предприятию при $74 \leqslant a \leqslant 86$.

Интересно отметить, что если $z = 0$ (т. е. если в некоторый момент $\tau < T$ план уже выполнен), то перепланирование всегда выгодно предприятию, если $a > N(\tau)$. Если $a = N(\tau)$ (произошла, например авария и предприятие ничего не сможет выполнить за оставшийся период), то перепланирование так же выгодно предприятию при любом $\tau < T$.

Таким образом, предприятие заинтересовано изменить план на более высокий, если его распределение в момент времени τ имеет параметры $N(\tau) = 20$, $a > 86$.

С другой стороны, если в момент времени τ параметры распределения $N(\tau) = 20$ и $a < 74$, то предприятие будет заинтересовано уменьшить свой план с тем, чтобы избежать значительных потерь из-за завышения плана в начале планируемого периода.

Стимулирование объективных данных

Решение многих задач прогнозирования и планирования начинается со сбора исходных статистических данных об объекте наблюдения, от достоверности которых существенно зависит качество прогноза или плана. На примере продукции, заказываемой предприятием-потребителем, рассматривается один из способов решения этой задачи, использующий методы стимулирования.

Введем обозначения: $\bar{x}$ — заявленное количество требуемой продукции; x — действительное потребляемое количество продукции; $p(x)$ — плотность распределения количества потребляемой продукции (возможности предприятия-потребителя).

Примем в законе (1)

$$\varphi(x - \bar{x}) = \xi(x - \bar{x})^2. \tag{23}$$

Ожидаемый штраф предприятия-потребителя составит

$$S(\bar{x}) = \xi \int_0^\infty (x - \bar{x})^2 p(x)\, dx.$$

Решая уравнение $\frac{\partial S(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = 0$, получаем оптимальное значение $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \int_0^\infty x p(x)\, dx \tag{24}$$

Следовательно, при условии (23) потребителю целесообразно заказывать среднее значение потребляемой продукции. Ожидаемый штраф при условии (24) будет:

$$S(\bar{x}) = \xi D(x),$$

где $D(x)$ — дисперсия случайной величины x. Выбор коэффициента ξ может быть проведен подобно (13).

Выводы

1. Понятие активной системы позволяет сформулировать задачу выбора закона стимулирования как задачу управления активными системами.

2. Для кусочно-линейного закона стимулирования существует оптимальное соотношение коэффициентов, инвариантное относительно функции распределения активного элемента.

3. Условия (22) показывают целесообразность применения закона стимулирования (14) в схеме с перепланированием.

4. Предложенные принципы управления активными системами могут быть применены в информационных системах (получение объективной информации).

Автор выражает глубокую благодарность А. Я. Лернеру, В. Н. Буркову, А. Г. Бутковскому за ряд ценных замечаний и полезные обсуждения данной работы.

Поступила в редакцию
1 августа 1969 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Лернер А. Я. Перспективы развития теории управления в больших системах. Доклад на II Всесоюзной конференции по оперативному управлению. Ленинград, 1968.
2. Бурков В. Н., Ланда Б. Д., Ловецкий С. Е., Тейман А. И., Чернышов В. Н. Сетевые модели и задачи управления. «Советское радио», 1967.
3. Бурков В. Н. Планирование производства в задачах материально-технического снабжения. Доклад на II Всесоюзной конференции по оперативному управлению. Ленинград, 1968.

PROBLEMS OF STIMULATION AND DETERMINATION OF OBJECTIVE ESTIMATIONS IN ACTIVE SYSTEMS

A. G. IVANOVSKIY

The forming of the laws of interaction for active systems is considered. The result obtained is applied to the problems of the stimulation of high plans, of re-planning, of the determination of objective estimations.
