

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭРГОДИЧЕСКИХ НЕОДНОРОДНЫХ РЕСУРСНЫХ СЕТЕЙ С «ЖАДНЫМИ» ВЕРШИНАМИ

Чаплинская Н. В.¹

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Рассмотрена модификация графовой пороговой динамической модели «ресурсная сеть» – «ресурсная сеть с жадными вершинами». На каждом такте дискретного времени вершины графа передают друг другу ресурс по ребрам с ограниченными пропускными способностями, причем сначала передают имеющийся ресурс в собственные петли, а затем остаток ресурса распределяют в исходящие ребра по правилам стандартной ресурсной сети (пропорционально пропускным способностям с учетом их ограничения). Рассмотрена топология эргодической неоднородной ресурсной сети с «жадными» вершинами – сеть описывается сильно связным ориентированным графом. Показано, что при значениях суммарного ресурса, не превосходящих суммы пропускных способностей всех петель, сеть с «жадными» вершинами останавливается, что невозможно для стандартной эргодической ресурсной сети и обуславливается наличием модифицированных петель; исследуется характер остановки сети. Для значений суммарного ресурса, превышающих суммы пропускных способностей всех петель, доказываемся, что с определенного момента времени сеть будет функционировать эквивалентно соответствующей стандартной ресурсной сети.

Ключевые слова: графовая динамическая пороговая модель, ресурсная сеть, модель «жадных» вершин, топология эргодических неоднородных сетей.

1. Введение

Сетевые ресурсные модели в настоящее время находят применение во многих областях жизнедеятельности человека. Например, в 2020 году в [18] была разработана концептуальная и графоаналитическая модель ресурсного обеспечения сетевой организационной структуры на примере холдинга «РЖД», а уже в 2021 году в [9] на ее основе был представлен алгоритм закупочной деятельности, позволяющий описывать и математически

¹ Надежда Васильевна Чаплинская, математик (nadya1462@gmail.com).

формализовывать бизнес-процессы холдинга «РЖД».

Настоящая работа является продолжением исследований процессов функционирования ресурсной сети – модели замкнутой системы: ресурс в сети не поступает извне и не расходуется. В [14] эта модель использовалась для моделирования распространения загрязнений в водной среде.

Ресурсная сеть – графовая динамическая потоковая модель замкнутой системы, в которой ресурс в дискретном времени перераспределяется между вершинами, – была предложена впервые в 2009 году в [16]. Свое дальнейшее развитие модель получила в [12, 15].

Ресурсная сеть описывается ориентированным графом, ребра которого имеют веса, называемые пропускными способностями. Ресурс в сети распределяется между вершинами в соответствии с двумя правилами с пороговым переключением, которое происходит в зависимости от количества ресурса в вершинах и от величины пропускных способностей исходящих из них ребер.

В [12] для данной модели были получены результаты, позволяющие определить предельное состояние сети любой топологии с любым значением суммарного ресурса и любым его начальным распределением между вершинами. Было доказано, что для ресурсной сети любой топологии, кроме поглощающей, существует и единственно пороговое значение суммарного ресурса, разделяющее зоны различного поведения сети. В [12] также были предложены формулы, позволяющие найти это пороговое значение для непоглощающих ресурсных сетей.

При суммарном ресурсе, не превосходящем порогового значения (*малый* суммарный ресурс), динамика сети описывается моделью рассеяния на графах [20, 21]. Модели рассеяния для графов с постоянной топологией описываются однородными цепями Маркова, которые широко используются в различных предметных областях, например, при решении задач о нахождении консенсуса в многоагентных системах [5, 6], решении задач о нахождении количественной оценки различных видов риска и их влияния на финансовое состояние предприятия [11], в социаль-

ных сетях [8] и т.д.

При суммарном ресурсе выше порогового значения (*большой* суммарный ресурс) динамика сети описывается неоднородной цепью Маркова. В [12] для случая большого ресурса были обнаружены вершины-аттракторы – вершины, накапливающие в себе излишки ресурса.

Были рассмотрены и некоторые модификации модели ресурсной сети. Модификация в виде вершин с органиченной емкостью была представлена в монографии [15]. В [17] описываются динамические ресурсные сети. Рассмотрены ресурсные сети на графах с нестандартной достижимостью [10]: в работах [1] и [2] с вентильной и с магнитной достижимостью соответственно. В [3] были предложены двухресурсные сети и исследована топология полных однородных несимметричных двусторонних ресурсных сетей с петлями. В качестве продолжения этой работы в [4] были рассмотрены двухресурсные сети с магнитной достижимостью.

Настоящая работа посвящена еще одной модификации модели – ресурсная сеть с «жадными» вершинами. Отличие этой модели заключается в том, что каждая вершина передает ресурс сначала в собственную петлю и только затем остаток ресурса распределяет в смежные вершины по исходящим ребрам.

Модель с данной модификацией была впервые введена в 2021 году в [13]. В статье [13], а затем и в ее продолжении [19] была исследована топология полных однородных ресурсных сетей с «жадными» вершинами. Настоящая работа рассматривает общий случай – неоднородные ресурсные сети с ограничением на топологию в виде эргодичности сети (сеть описывается сильно связным ориентированным графом).

2. Ресурсные сети – основные понятия

Ресурсная сеть – это динамическая потоковая модель замкнутой системы, описываемая связным ориентированным графом $G = (V, E)$ с вершинами $v_i \in V$ и ребрами $e_{ij} = (v_i, v_j) \in E$; $|V| = n$.

Ребра графа имеют неотрицательные веса r_{ij} , обозначаемые их *пропускные способности*. Топология сети однозначным образом определяется *матрицей пропускных способностей* $R = (r_{ij})_{n \times n}$. Сумма i -го столбца $r_i^{in} = \sum_{j=1}^n r_{ji}$ и i -й строки $r_i^{out} = \sum_{j=1}^n r_{ij}$ матрицы R – входная и выходная пропускные способности вершины v_i соответственно.

Вершинам графа приписываются неотрицательные числа $q_i(t)$, изменяющиеся в дискретном времени. Говорят, что на такте t вершина v_i содержит $q_i(t)$ *ресурса*. Емкость вершин не ограничена. Суммарный ресурс, циркулирующий по сети, обозначают W : $\forall t \sum_{i=1}^n q_i(t) = W$.

Состоянием $Q(t)$ сети в момент времени t называется вектор $Q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$, элементами которого являются значения ресурсов в вершинах в момент времени t . Состояние $Q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ называется *предельным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует t_ε такое, что для всех $t > t_\varepsilon$ $|q_i^* - q_i(t)| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \dots, n$.

На каждом такте вершины сети передают имеющийся в них ресурс по исходящим ребрам смежным вершинам. В стандартной ресурсной сети в момент времени t вершина v_i отдает в ребро e_{ij} , соединяющее ее с вершиной v_j :

- r_{ij} единиц ресурса, если $q_i(t) > r_i^{out}$ (правило 1);
- $\frac{r_{ij}}{r_i^{out}} q_i(t)$ единиц ресурса, если $q_i(t) \leq r_i^{out}$ (правило 2).

Правило 1 работает тогда, когда вершина содержит ресурса больше, чем может отдать. В этом случае по каждому исходящему ребру передается ресурс, равный пропускной способности этого ребра, а всего вершина отдаст $r_i^{out} = \sum_{j=1}^n r_{ij}$ ресурса. Иначе работает правило 2: вершина отдает весь имеющийся ресурс, и последний распределяется пропорционально пропускным способностям исходящих ребер.

Важной характеристикой ресурсной сети является *пороговое*

значение ресурса T – значение суммарного ресурса сети, разделяющее зоны ее различного поведения. В [12] доказано, что в любой стандартной ресурсной сети, кроме поглощающей, пороговое значение T существует и единственно: при $W \leq T$ все вершины с определенного момента времени функционируют по правилу 2 (зона *малого* ресурса), при $W > T$ с определенного момента времени хотя бы одна вершина функционирует по правилу 1 (зона *большого* ресурса). В [12] также предложены формулы, позволяющие найти значение T для всех классов стандартных ресурсных сетей, в которых оно существует.

3. Ресурсные сети с «жадными» вершинами

Модель ресурсной сети с «жадными» вершинами была предложена и формально описана в [13]. Напомним основные определения и свойства данной модели.

Рассматривается ресурсная сеть с наличием хотя бы одной петли. Правила ее функционирования следующие.

Вершина v_i , имеющая петлю, на такте t отдает:

- r_{ii} ресурса в петлю, если $q_i(t) > r_{ii}$, и оставшийся ресурс $\Delta q_i(t) = q_i(t) - r_{ii}$ распределяет в исходящие ребра по правилам стандартной ресурсной сети;

- $q_i(t)$ ресурса в петлю, если $q_i(t) \leq r_{ii}$ (весь имеющийся ресурс уходит в петлю).

Вершина, не имеющая петлю, распределяет свой ресурс по правилам стандартной ресурсной сети.

Иначе говоря, все вершины с петлями являются «запасливыми» (или «жадными»), так как передают имеющийся ресурс в первую очередь себе в петлю и уже затем распределяют остатки по исходящим ребрам смежным вершинам. Для такой модели возможна ситуация, когда весь ресурс сети будет циркулировать лишь по петлям вершин, не перераспределяясь между вершинами, т.е. сеть как бы «останавливается» в своем функционировании.

Определение 1. Будем говорить, что сеть остановилась на

такте t , если $\forall i = \overline{1, n} \ q_i(t) \leq r_{ii}$.

Остановка сети есть частный случай ее стабилизации, невозможный в стандартных эргодических сетях.

Определение 2. Вершина v_i – насыщенная в момент времени t , если $q_i(t) \geq r_{ii}$; перенасыщенная, если $q_i(t) > r_{ii}$, и ненасыщенная, если $q_i(t) < r_{ii}$.

В [13] доказывается свойство насыщенных вершин, согласно которому вершина, насыщенная в момент времени t , в момент времени $t + 1$ также останется насыщенной.

Для перенасыщенной вершины вводится важное понятие *свободного ресурса*.

Определение 3. Свободный ресурс перенасыщенной вершины v_i – это ресурс, не задействованный ее петлей: $\Delta q_i(t) = q_i(t) - r_{ii}$.

Суммарный свободный ресурс в сети на такте t – сумма свободных ресурсов всех перенасыщенных вершин сети на такте t . Обозначается $\Delta Q(t)$.

В ресурсной сети с «жадными» вершинами именно свободный ресурс перемещается по ребрам. Поэтому остановка сети эквивалентна отсутствию в сети свободного ресурса.

4. Эргодические неоднородные сети с «жадными» вершинами

Будем рассматривать неоднородные ресурсные сети с «жадными» вершинами с ограничением на топологию в виде эргодичности – т.е. сеть описывается сильно связным ориентированным графом.

Замечание 1. В дальнейших рассуждениях все вершины, не имеющие петли, мы будем относить к насыщенным.

4.1. ДИНАМИКА СВОБОДНОГО РЕСУРСА СЕТИ

Прежде чем рассматривать зоны различного поведения эргодической неоднородной сети с «жадными» вершинами, определим характер перемещения её свободного ресурса.

Ресурс ненасыщенной вершины неубывает с течением времени, так как все свои «накопления» вершина передает только себе в петлю. То есть часть свободного ресурса сети, поступившая в ненасыщенную вершину, будет поглощена ею и не вернется циркулировать по сети. Это значит, что суммарный свободный ресурс в сети уменьшается всякий раз, когда ненасыщенные вершины получают какое-либо количества ресурса от перенасыщенных вершин.

Эргодичность сети – в частности существование пути от перенасыщенной вершины к ненасыщенной – позволяет нам предположить, что свободный ресурс сети будет уменьшаться с течением времени, перетекая из перенасыщенных вершин в ненасыщенные и поглощаясь последними. Попробуем проанализировать динамику уменьшения свободного ресурса в сети, оценив количество ресурса, поглощаемого за определенный временной интервал.

Пусть в момент времени t_0 в сети имеется $k_0 = k(t_0)$ перенасыщенных вершин и $l_0 = l(t_0)$ ненасыщенных вершин, причем $k_0, l_0 > 0$. Рассмотрим распределение свободного ресурса $\Delta q_i(t_0)$ некоторой перенасыщенной вершины $v_i, i = \{1, \dots, k_0\}$.

Обозначим ρ_{ij} относительную пропускную способность ребра e_{ij} :

$$\rho_{ij} = \frac{r_{ij}}{r_i^{out}}, \quad 0 \leq \rho_{ij} \leq 1.$$

Соответственно, матрица $R' = (\rho_{ij})_{i,j=1}^n$ – матрица относительных пропускных способностей сети (стохастическая матрица).

Введя величину $\delta_i > 0$,

$$\delta_i = \delta_i(t_0) = \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} \Delta q_i(t_0) \right\},$$

где $r_{\min} = \min_{\alpha, \beta} \{r_{\alpha\beta} \neq 0\}$ и $\rho_{\min} = \min_{\alpha, \beta} \{\rho_{\alpha\beta} \neq 0\}$, приведем несколько вспомогательных утверждений.

Утверждение 1. Ресурс, переданный на такте t_0 от перенасыщенной вершины v_i смежной с ней вершине v_{i+1} , можно оценить снизу значением δ_i .

Утверждение 2. За количество тактов, не превосходящее $n - 1$, перенасыщенная вершина v_i передаст ближайшей ненасыщенной вершине v_j не менее $\rho_{\min}^{n-2} \delta_i$ ресурса.

Утверждение 3. Пусть в момент времени t_0 вершина v_i является перенасыщенной. За временной интервал $l_0(n - 1)$ свободный ресурс сети уменьшится не менее чем на $\rho_{\min}^{l_0(n-1)-1} \delta_i$, при условии, что к концу интервала в сети осталась хотя бы одна ненасыщенная вершина.

Доказательства приведенных утверждений представлены в Приложении.

Применим последнее утверждение к перенасыщенной в момент времени t_0 вершине v_i , имеющей наибольший свободный ресурс среди всех вершин сети, т.е. $\Delta q_i(t_0) = \max_{\alpha} \Delta q_{\alpha}(t_0)$. Тогда для свободного ресурса этой вершины справедливо неравенство

$$\Delta q_i(t_0) \geq \frac{\Delta Q(t_0)}{k_0},$$

и величину δ_i можно оценить снизу следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta_i = \delta_i(t_0) &= \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} \Delta q_i(t_0) \right\} \geq \\ &\geq \min \left\{ r_{\min}, \frac{\rho_{\min}}{k_0} \Delta Q(t_0) \right\} > 0. \end{aligned}$$

Вместе с тем оценим сверху полученный временной интервал:

$$l_0(n - 1) < n(n - 1) = \tau.$$

Момент времени t_0 был выбран произвольно, поэтому все приведенные в доказательстве выкладки можно повторить для следующих $\tau = n(n - 1)$ тактов, определив $k_1 = k(t_1)$, $l_1 = l(t_1)$ на такте $t_1 = t_0 + \tau$.

Таким образом, на основе приведенных рассуждений формулируется следующая лемма.

Лемма 1. За i -й временной интервал длительностью $\tau = n(n - 1)$ тактов, начиная с момента времени t_i , свободный ресурс сети будет уменьшаться не менее чем на некоторую

величину $\Lambda_i > 0$, вычисляемую по формуле

$$\Lambda_i = \rho_{\min}^{l(t_i)(n-1)-1} \min \left\{ r_{\min}, \frac{\rho_{\min}}{k(t_i)} \Delta Q(t_i) \right\},$$

если на начало интервала в сети есть хотя бы одна перенасыщенная вершина, а на конец интервала в сети осталась хотя бы одна ненасыщенная вершина.

В сущности, сформулированная лемма дает оценку скорости убывания свободного ресурса как функции ее величины. В последующих разделах мы будем применять полученную формулу, исследуя поведение ресурсной сети при различных величинах суммарного ресурса.

4.2. ПОРОГОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ СУММАРНОГО РЕСУРСА

В ресурсных сетях с «жадными» вершинами существуют два пороговых значения T_1 и T_2 суммарного ресурса, разделяющих зоны различного поведения сети. Этим зонам были даны названия: порог T_1 разделяет зоны недостаточного и достаточного ресурса, порог T_2 – зоны достаточного малого и достаточного большого ресурса.

Напомним: «недостаточность» ресурса означает, что сеть остановится (за конечное число тактов или асимптотически). «Достаточность» ресурса в свою очередь влечет за собой постоянное существование хотя бы одной перенасыщенной вершины – т.е. остановка сети невозможна. При малом достаточном ресурсе, начиная с определенного момента времени, все вершины на каждом такте отдают весь свой ресурс, т.е. функционируют по правилу 2, а при большом одна или несколько вершин накапливают в себе ресурс и, таким образом, функционируют по правилу 1.

Для топологии полных однородных сетей было показано, что первое пороговое значение суммарного ресурса равно сумме пропускных способностей всех петель сети, а второе совпадает с пороговым значением стандартной полной однородной ресурсной сети: $T_1 = rn$, $T_2 = T = rn^2$. Аналогичным образом определяются и пороговые значения неоднородной эргодической сети.

Будем полагать, что для некоторых начальных состояний и топологий первое пороговое значение суммарного ресурса $T_1 = \sum_{i=1}^n r_{ii}$. В следующем разделе будет доказано, что это значение единственно для любых начальных состояний и топологий неоднородной эргодической сети.

В разделе 4.4 мы покажем, что второе пороговое значение T_2 совпадает с пороговым значением стандартной ресурсной сети соответствующей топологии.

4.3. НЕДОСТАТОЧНЫЙ РЕСУРС

Зона недостаточного ресурса накладывает на суммарный ресурс следующее ограничение: $W \leq T_1 = \sum_{i=1}^n r_{ii}$.

Утверждение 4. При $W \leq \sum_{i=1}^n r_{ii}$ суммарный свободный ресурс сети стремится к нулю с течением времени.

Доказательство утверждения представлено в Приложении.

Зная специфику поведения свободного ресурса в сети, попробуем сделать некоторые выводы о ее предельном состоянии.

Насыщенная вершина v_i ненасыщенной стать не может, поэтому ее предельное состояние будет не меньше, чем пропускная способность петли: $q_i^* \geq r_{ii}$. При этом, по утверждению 4, ни одна вершина, в том числе и вершина v_i , в предельном состоянии не будет иметь свободного ресурса: $q_i^* \leq r_{ii}$. Отсюда вытекает следующее следствие.

Следствие 1. При $W \leq \sum_{i=1}^n r_{ii}$ предельное состояние любой вершины, ставшей в какой-то момент насыщенной, будет равно пропускной способности её петли.

Для полных однородных сетей модели «жадных» вершин известны начальные состояния, при которых сеть останавливается за конечное число тактов, и начальные состояния, при которых сеть функционирует бесконечно и останавливается в пределе (см. утв. 3, 6 в [13]). Для общего случая неоднородных сетей характер остановки будет зависеть не только от вектора начального рас-

пределения ресурса в сети, но и от ее топологии (матрицы пропускных способностей). Введем понятие перенасыщенного цикла и с его помощью попробуем исследовать этот вопрос.

Определение 4. Перенасыщенным циклом будем называть цикл из двух и более насыщенных вершин, среди которых хотя бы одна является перенасыщенной.

Теорема 1. (Достаточное условие бесконечного функционирования сети и ее остановки в пределе.) Если в начальный момент времени существует такое k , $1 < k < n$, что вершины v_1, \dots, v_k образуют перенасыщенный цикл, то сеть будет функционировать бесконечно, останавливаясь в пределе.

Доказательство теоремы представлено в Приложении.

Замечание 2. Полные однородные сети являются частным случаем неоднородных сетей. Поэтому достаточное условие бесконечного функционирования полной однородной сети с «жадными» вершинами, приведенное в [13] (утв. 4), есть частный случай доказанной выше теоремы. Перенасыщенный цикл полной однородной сети – две (или более) насыщенные вершины, хотя бы одна из которых является перенасыщенной.

Теорема 2. (Критерий бесконечного функционирования сети.) Для того чтобы сеть функционировала бесконечно необходимо и достаточно, чтобы в какой-то момент времени в ней образовался перенасыщенный цикл.

Доказательство см. в Приложении.

Итак, возникновение в сети перенасыщенного цикла, определяет характер остановки сети при недостаточном ресурсе. Остается понять, возможно ли предсказать факт возникновения перенасыщенного цикла по начальным данным.

Недостаточным ресурсом цикла будем называть сумму ресурсов, которых в данный момент времени не хватает вершинам, образующих этот цикл, до насыщения.

Теорема 3. (Достаточное условие остановки сети по начальным данным.) Если в начальный момент времени недостаточный ресурс каждого цикла больше, чем суммарный свободный ресурс сети, то сеть остановится.

Доказательство основывается на том, что свободного ресурса не хватит, чтобы насытить все ненасыщенные вершины цикла, а значит, такой цикл никогда не станет перенасыщенным.

Далее приведем алгоритм, однозначно определяющий характер остановки сети (остановка за конечное число тактов или в пределе) по вектору начальных состояний вершин и по матрице пропускных способностей сети.

В основе алгоритма лежит следующий подход. Рассматриваем подсеть исходной сети, построенную исключением исходящих ребер у вершин, в данный момент времени не являющихся перенасыщенными. Функционирование такой подсети будет полностью эквивалентно функционированию исходной сети в предположении, что эти вершины никогда не смогут перенасытиться. Определяем, имеет ли построенная подсеть перенасыщенный цикл. В случае наличия перенасыщенного цикла получим остановку сети в пределе. В случае отсутствия проверяем гипотезу о том, что ни одна из искомым вершин не перенасытится. Если гипотеза подтвердилась, то построенная подсеть полностью описывает перемещение ресурса по сети и, ввиду отсутствия в ней перенасыщенного цикла, получим остановку сети за конечное число тактов. Эту подсеть будем называть *активной подсетью* исходной сети. Если же гипотеза не подтвердилась, учитываем вершины, ставшие перенасыщенными: возвращаем исходящие из них ребра и вновь предполагаем, что построенная таким образом подсеть является активной подсетью исходной сети.

Заметим, что активная подсеть – в сущности подсеть, описываемая предельным графом возможных путей распространения свободного ресурса (предельный = больше не будет эволюционировать), введенном в доказательстве теоремы 2 (за исключением петель).

Алгоритм определения характера остановки сети при недостаточном ресурсе.

Строим первое приближение активной подсети по матрице пропускных способностей исходной сети и по вектору начальных состояний вершин (убираем все исходящие ребра у вершин, не

являющихся перенасыщенными).

1. Алгоритмом Демукрона определяем, имеет ли граф рассматриваемой подсети, потенциально являющейся активной подсетью, контур. Если имеет, то исходная сеть содержит перенасыщенный цикл и, следовательно, остановится в пределе. Выход. Иначе граф рассматриваемой подсети связный бесконтурный, и в результате топологической сортировки получаем количество уровней ν вершин графа.

2. Определяем вектор конечного состояния подсети по формуле

$$Q^* = (Q(0) - R_{diag})(\tilde{R}')^{\nu-1} + R_{diag}, \quad R_{diag} = (r_{11}, \dots, r_{nn}),$$

где \tilde{R}' – стохастическая матрица рассматриваемой подсети с удаленными петлями у вершин, не являющихся стоковыми, а ν – количество уровней вершин графа, определенное в предыдущем пункте.

3. Если ни одна из стоковых вершин не перенасытилась, то рассматриваемая подсеть – активная подсеть и, в силу отсутствия перенасыщенного цикла, сеть остановится за конечное число тактов. Выход. Иначе восстанавливаем исходящие из перенасытившихся вершин ребра и тем самым обновляем подсеть. Переходим к п.1.

Алгоритм позволяет за конечное и относительно небольшое количество итераций определить характер останова сети без ее моделирования, которое может быть очень затратным, особенно на больших сетях или на сетях с маленькими пропускными способностями ребер.

Покажем, что формула, приведенная в пункте 2 алгоритма, действительно определяет вектор конечного состояния подсети, описываемой топологически отсортированным графом с количеством уровней ν .

Пусть в отсортированном графе сети n_i – количество вершин, принадлежащих уровням $N_0, \dots, N_i, i = \overline{0, \nu - 1}$. Пусть вершины сети пронумерованы по увеличению номеров своих уровней. Так как ребра отсортированного графа, выходящие из

вершин текущего уровня, могут входить только в вершины следующих уровней, то в сети не существует ребер e_{ij} , где $i > j$, и матрица пропускных способностей сети R верхнетреугольная. Также ребрами не связаны и вершины, принадлежащие одному уровню.

Все вершины последнего уровня отсортированного графа сети стоковые. При этом стоковые вершины могут оказаться еще и на любом другом уровне. В матрице R строки, соответствующие исходящим ребрам стоковых вершин, нулевые, за исключением диагональных элементов. То есть матрица R выглядит следующим образом:

$$R = \begin{pmatrix} D_0 & R_{01} & R_{02} & \dots & R_{0\nu-1} \\ O & D_1 & R_{12} & \dots & R_{1\nu-1} \\ O & O & D_2 & \dots & R_{2\nu-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & O & \dots & D_{\nu-1} \end{pmatrix},$$

где матрицы R_{ij} , $i < j$, следует интерпретировать как матрицы пропускных способностей ребер, выходящих из вершин уровня N_i и входящих в вершины уровня N_j . Матрицы D_i диагональные: элементы диагонали матрицы D_i – это пропускные способности петель вершин уровня N_i .

Утверждение 5. Пусть сеть описывается топологически отсортированным графом с количеством уровней ν . Для любого $k = \overline{0, \nu - 1}$ конечное состояние всех вершин уровней N_i , $i = \overline{0, k - 1}$, и всех стоковых вершин уровня N_k определяется формулой

$$Q(t_k) = (Q(0) - R_{diag})(\tilde{R}')^k + R_{diag}, \quad R_{diag} = (r_{11}, \dots, r_{nn}),$$

где \tilde{R}' – стохастическая матрица сети с удаленными петлями у вершин, не являющихся стоковыми.

Доказательство утверждения осуществляется методом математической индукции и представлено в Приложении.

Замечание 3. Приведенный алгоритм однозначным образом находит конечное состояние сети в случае ее остановки за конеч-

ное число тактов по формуле:

$$Q^* = (Q(0) - R_{diag})(\tilde{R}^*)^{\nu^* - 1} + R_{diag}, \quad R_{diag} = (r_{11}, \dots, r_{nn}),$$

где \tilde{R}^* – стохастическая матрица подсети заключительной итерации алгоритма (активной подсети) с удаленными петлями у вершин, не являющихся стоковыми, ν^* – число уровней вершин соответствующего этой подсети графа.

Пример. Рассмотрим сеть, представленную на рис. 1.

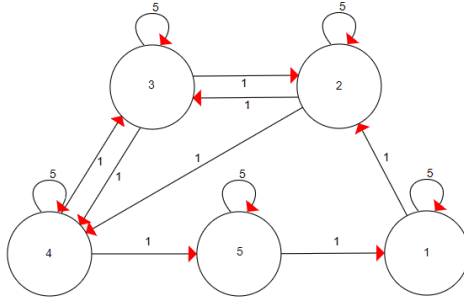


Рис. 1. Неоднородная ресурсная сеть с пятью «жадными вершинами»

Соответствующая матрица пропускных способностей:

$$R = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad R_{diag} = (r_{11}, \dots, r_{nn}) = (5, 5, 5, 5, 5).$$

$$T_1 = \sum_{i=1}^n r_{ii} = 25.$$

Случай 1. $Q(0) = (8, 4, 4, 4, 0)$, $W = 20 \leq T_1 = 25$.

Начальное состояние сети удовлетворяет зоне недостаточного ресурса, значит, сеть остановится: за конечное число тактов

или в пределе. Определим характер остановки сети с помощью алгоритма. Покажем результаты основных этапов.

В начальный момент сеть имеет одну перенасыщенную вершину v_1 . Для построения первого приближения активной подсети удаляем все ребра, исходящие из остальных вершин сети:

$$R = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Первая итерация.

1. Граф подсети не имеет контуров (рис. 2). Количество уровней топологически отсортированного графа $\nu = 2$: $v_1 \in N_0$, $v_2 \in N_1$.

2. Определяем ресурс, который в пределе дойдет до стоковых вершин. Не является стоковой вершина v_1 – для построения матрицы \tilde{R} убираем ее петлю.

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \tilde{R}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q^* = (Q(0) - R_{diag})\tilde{R}' + R_{diag},$$

$$Q^* = (5, 7, 4, 4, 0).$$

3. $q_2^* = 7 > r_{22} = 5 > 0 \Rightarrow$ стоковая вершина v_2 перенасытилась. Обновляем подсеть, возвращая этой вершине исходящие ребра:

$$R = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

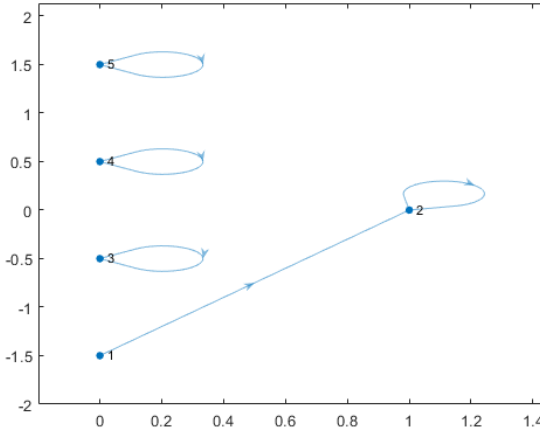


Рис. 2. Подсеть сети с начальным состоянием $Q(0) = (8, 4, 4, 4, 0)$ на 1-й итерации

Вторая итерация.

1. Граф подсети не имеет контуров (рис. 3). Количество уровней топологически отсортированного графа $\nu = 3$: $v_1 \in N_0$, $v_2 \in N_1$, $v_3, v_4 \in N_2$.

2. Определяем ресурс, который в пределе дойдет до стоковых вершин. Не являются стоковыми вершины v_1, v_2 – для построения матрицы \tilde{R} убираем их петли.

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \tilde{R}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q^* = (Q(0) - R_{diag})(\tilde{R}')^2 + R_{diag},$$

$$Q^* = (5, 5, 5, 5, 0).$$

3. $q_3^* = r_{33} = 5$, $q_4^* = r_{44} = 5 \Rightarrow$ ни одна из стоковых вершин не перенасытилась. Рассматриваемая подсеть является активной подсетью. Ввиду отсутствия перенасыщенных

циклов, сеть остановится за конечное число тактов с состоянием $Q^* = (5, 5, 5, 5, 0)$. Выход.

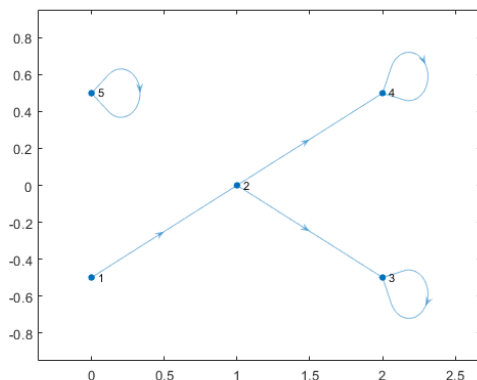


Рис. 3. Подсеть сети с начальным состоянием $Q(0) = (8, 4, 4, 4, 0)$ на 2-й итерации (активная подсеть)

Результат совпадает с результатом программной реализации функционирования сети (таблица 1). Вершина v_2 насыщается на первом такте, перенасыщается на втором. Вершины v_3, v_4 насыщаются на четвертом такте, но не перенасыщаются в дальнейшем, так как в сети больше не осталось свободного ресурса. По графику убывания свободного ресурса в сети (рис. 5) видно, что на четвертом такте произошло его зануление, т.е. сеть остановилась. Динамика распределения ресурса между вершинами наглядно представлена на гистограмме (рис. 4).

Таблица 1. Протокол работы сети с начальным состоянием $Q(0) = (8, 4, 4, 4, 0)$

| t_i | v_1 | v_2 | v_3 | v_4 | v_5 |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0 | 8,0000 | 4,0000 | 4,0000 | 4,0000 | 0,0000 |
| 1 | 7,0000 | 5,0000 | 4,0000 | 4,0000 | 0,0000 |
| 2 | 6,0000 | 6,0000 | 4,0000 | 4,0000 | 0,0000 |
| 3 | 5,0000 | 6,0000 | 4,5000 | 4,5000 | 0,0000 |
| 4 | 5,0000 | 5,0000 | 5,0000 | 5,0000 | 0,0000 |

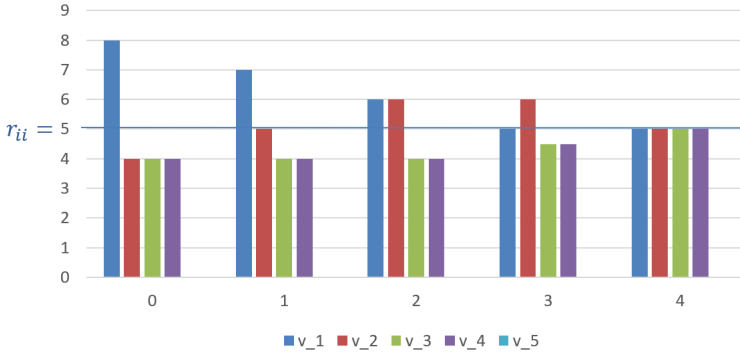


Рис. 4. Динамика ресурса в сети с начальным состоянием $Q(0) = (8, 4, 4, 4, 0)$

Случай 2. $Q(0) = (8, 8, 4, 0, 0)$, $W = 20 \leq T_1 = 25$.

Начальное состояние сети удовлетворяет зоне недостаточного ресурса, значит, сеть остановится: за конечное число тактов или в пределе. Снова применим алгоритм для определения характера остановки сети.

В начальный момент времени сеть имеет две перенасыщенные вершины v_1, v_2 . Для построения первого приближения активной подсети удаляем все ребра, исходящие из остальных вершин сети:

$$R = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Первая итерация.

1. Граф подсети не имеет контуров (рис. 6). Количество уровней топологически отсортированного графа $\nu = 3$: $v_1 \in N_0$, $v_2 \in N_1$, $v_3, v_4 \in N_2$.

2. Определяем ресурс, который в пределе дойдет до стоковых вершин. Не являются стоковыми вершины v_1, v_2 – для по-

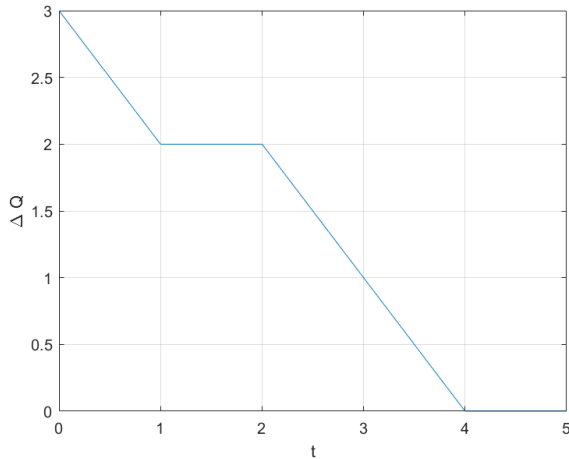


Рис. 5. График убывания свободного ресурса в сети с начальным состоянием $Q(0) = (8, 4, 4, 4, 0)$

строения матрицы \tilde{R} убираем их петли.

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \tilde{R}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q^* = (Q(0) - R_{diag})(\tilde{R}')^2 + R_{diag},$$

$$Q^* = (5, 5, 7, 3, 0).$$

3. $q_3^* = 7 > r_{33} = 5 \Rightarrow$ стоковая вершина v_3 перенасытилась. Обновляем подсеть, возвращая этой вершине исходящие ребра:

$$R = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Вторая итерация.

1. Граф подсети имеет контур (рис. 7), значит, в сети появится перенасыщенный цикл. Сеть будет функционировать бесконечно и остановится в пределе. Выход.

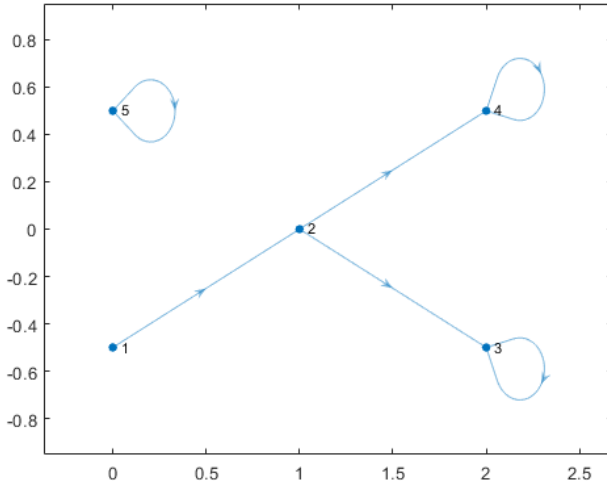


Рис. 6. Подсеть сети с начальным состоянием $Q(0) = (8, 8, 4, 0, 0)$ на 1-й итерации

Результат выполнения программной реализации функционирования сети представлен таблицей 2. Вершина v_2 и перенасыщенная на втором такте вершина v_3 не только отдадут ресурс ненасыщенной вершине v_4 , за счет чего свободный ресурс сети уменьшается, но и обмениваются ресурсом между собой, что создает затухающие колебания ресурса в этих вершинах (рис. 8). Вершина v_4 так и не сможет перенасытиться и начать взаимодействовать с вершиной v_5 ввиду недостатка ресурса, поэтому последняя остается пустой и в этом случае. На рис. 9 представлено монотонное убывание свободного ресурса и стремление его к нулю – сеть функционирует бесконечно и останавливается в пределе.

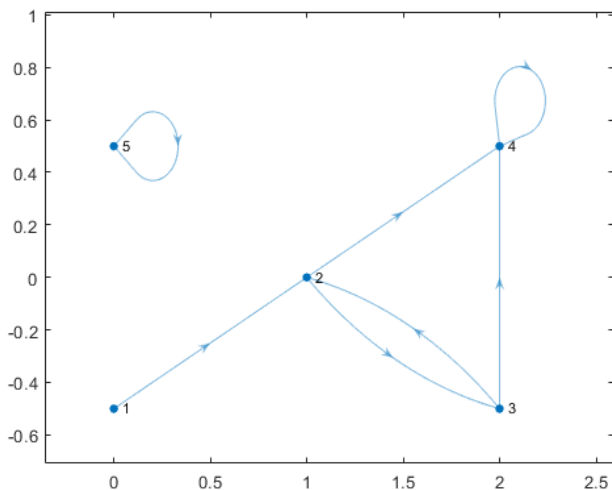


Рис. 7. Подсеть сети с начальным состоянием $Q(0) = (8, 8, 4, 0, 0)$ на 2-й итерации

Таблица 2. Протокол работы сети с начальным состоянием $Q(0) = (8, 8, 4, 0, 0)$

| t_i | v_1 | v_2 | v_3 | v_4 | v_5 |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0 | 8,0000 | 8,0000 | 4,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 1 | 7,0000 | 7,0000 | 5,0000 | 1,0000 | 0,0000 |
| 2 | 6,0000 | 6,0000 | 6,0000 | 2,0000 | 0,0000 |
| 3 | 5,0000 | 6,5000 | 5,5000 | 3,0000 | 0,0000 |
| 4 | 5,0000 | 5,2500 | 5,7500 | 4,0000 | 0,0000 |
| 5 | 5,0000 | 5,3750 | 5,1250 | 4,5000 | 0,0000 |
| 6 | 5,0000 | 5,0625 | 5,1875 | 4,7500 | 0,0000 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 17 | 5,0000 | 5,0001 | 5,0000 | 4,9999 | 0,0000 |
| 18 | 5,0000 | 5,0000 | 5,0000 | 4,9999 | 0,0000 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |

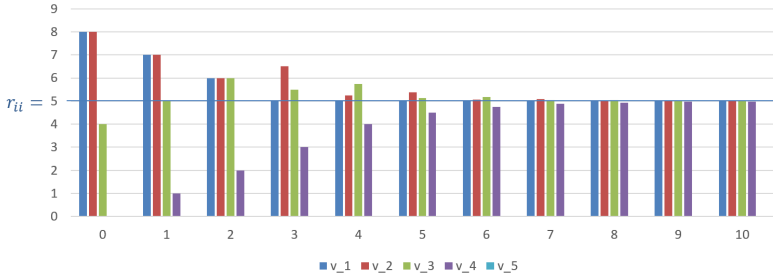


Рис. 8. Динамика ресурса в сети с начальным состоянием $Q(0) = (8, 8, 4, 0, 0)$

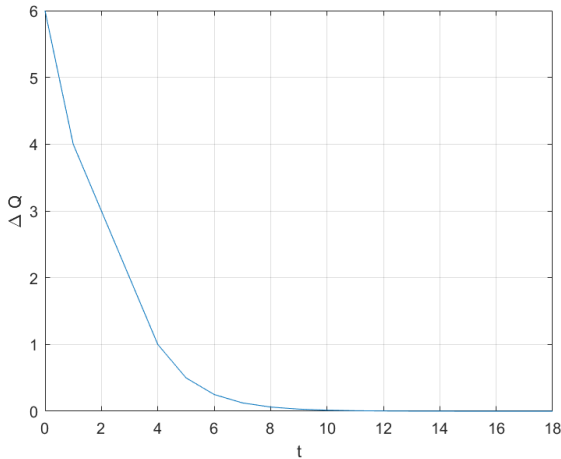


Рис. 9. График убывания свободного ресурса в сети с начальным состоянием $Q(0) = (8, 8, 4, 0, 0)$

Теорема 4. Первое пороговое значение T_1 суммарного ресурса неоднородной сети с «жадными» вершинами, отделяющее недостаточный ресурс от достаточного, единственно и равно $T_1 = \sum_{i=1}^n r_{ii}$ для любого начального состояния и любой топологии.

Доказательство. Согласно следствию 1 утверждения 4, при $W \leq \sum_{i=1}^n r_{ii}$ в пределе в сети с любым начальным состоянием и с любой топологией могут существовать только ненасыщенные вершины и насыщенные вершины с состоянием, равным пропускной способности соответствующей петли. То есть сеть остановится.

При $W > \sum_{i=1}^n r_{ii}$ сеть всегда будет иметь хотя бы одну перенасыщенную вершину. Остановка такой сети невозможна.

Таким образом, $T_1 = \sum_{i=1}^n r_{ii}$ для любого начального состояния и любой топологии.

4.4. ДОСТАТОЧНЫЙ РЕСУРС

Зона достаточного ресурса накладывает на суммарный ресурс следующее ограничение: $W > T_1 = \sum_{i=1}^n r_{ii}$.

Утверждение 6. При $W > \sum_{i=1}^n r_{ii}$ суммарный свободный ресурс сети всегда будет строго больше нуля: $\forall t \Delta Q(t) > 0$.

Доказательство утверждения следует из того, что при $W > \sum_{i=1}^n r_{ii}$ сеть всегда будет иметь хотя бы одну перенасыщенную вершину.

Как и для частного случая полных однородных сетей (утв. 7 в [13]), для общего случая неоднородных сетей зоны достаточного ресурса верна следующая теорема.

Теорема 5. При $W > \sum_{i=1}^n r_{ii}$ все «жадные» вершины эргодической сети насыщаются за конечное число тактов.

Доказательство см. в Приложении.

Пример. Рассмотрим ту же неоднородную сеть с «жадными» вершинами, что и в примере из прошлого раздела (рис. 1).

Соответствующая матрица пропускных способностей:

$$R = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$T_1 = \sum_{i=1}^n r_{ii} = 25.$$

Пусть теперь ресурс в сети достаточный: имеем, например, следующее начальное состояние $Q(0) = (20, 10, 0, 0, 0) \Rightarrow W = 30 > T_1 = 25$. Согласно теореме 5, все «жадные» вершины сети насытятся за конечное число тактов.

Вершины v_1 и v_2 в начальный момент времени являются перенасыщенными. Программное моделирование процесса показывает, что остальные вершины сети действительно насытятся: на шестом такте насыщаются вершины v_3 и v_4 , на шестнадцатом такте насыщается вершина v_5 (таблица 3).

Сеть имеет предельное состояние, при этом свободный ресурс в пределе остается постоянным и ненулевым ввиду сохранения суммарного ресурса в сети и постоянства ресурса в петлях (гистограмма на рис. 10, график убывания свободного ресурса на рис. 11).

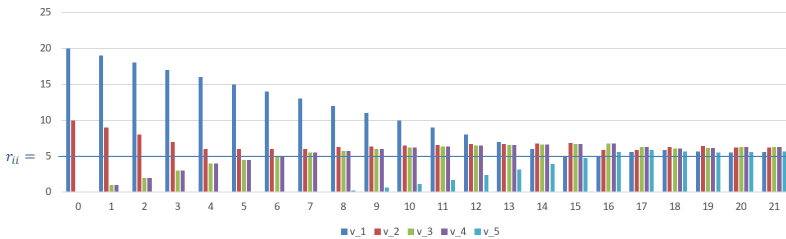


Рис. 10. Динамика ресурса в сети с начальным состоянием $Q(0) = (20, 10, 0, 0, 0)$

Таблица 3. Протокол работы сети с начальным состоянием $Q(0) = (20, 10, 0, 0, 0)$

| t_i | v_1 | v_2 | v_3 | v_4 | v_5 |
|-------|---------|---------|--------|--------|--------|
| 0 | 20,0000 | 10,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 1 | 19,0000 | 9,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,0000 |
| 2 | 18,0000 | 8,0000 | 2,0000 | 2,0000 | 0,0000 |
| 3 | 17,0000 | 7,0000 | 3,0000 | 3,0000 | 0,0000 |
| 4 | 16,0000 | 6,0000 | 4,0000 | 4,0000 | 0,0000 |
| 5 | 15,0000 | 6,0000 | 4,5000 | 4,5000 | 0,0000 |
| 6 | 14,0000 | 6,0000 | 5,0000 | 5,0000 | 0,0000 |
| 7 | 13,0000 | 6,0000 | 5,5000 | 5,5000 | 0,0000 |
| 8 | 12,0000 | 6,2500 | 5,7500 | 5,7500 | 0,2500 |
| 9 | 11,0000 | 6,3750 | 6,0000 | 6,0000 | 0,6250 |
| 10 | 10,0000 | 6,5000 | 6,1875 | 6,1875 | 1,1250 |
| 11 | 9,0000 | 6,5938 | 6,3438 | 6,3438 | 1,7188 |
| 12 | 8,0000 | 6,6719 | 6,4688 | 6,4688 | 2,3906 |
| 13 | 7,0000 | 6,7344 | 6,5703 | 6,5703 | 3,1250 |
| 14 | 6,0000 | 6,7852 | 6,6523 | 6,6523 | 3,9102 |
| 15 | 5,0000 | 6,8262 | 6,7188 | 6,7188 | 4,7363 |
| 16 | 5,0000 | 5,8594 | 6,7725 | 6,7725 | 5,5957 |
| 17 | 5,5957 | 5,8862 | 6,3159 | 6,3159 | 5,8862 |
| 18 | 5,8862 | 6,2537 | 6,1011 | 6,1011 | 5,6580 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 34 | 5,6250 | 6,2499 | 6,2501 | 6,2501 | 5,6250 |
| 35 | 5,6250 | 6,2500 | 6,2500 | 6,2500 | 5,6250 |
| 36 | 5,6250 | 6,2500 | 6,2500 | 6,2500 | 5,6250 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |

С момента t' насыщения последней ненасыщенной вершины сети «жадность» вершин перестает быть значимой – вершины больше не поглощают свободный ресурс, а их петли выполняют функцию хранения постоянного количества ресурса, равного пропускной способности соответствующей петли. Убрав все петли и ресурс в них, получим стандартную ресурсную сеть с нулями на главной диагонали матрицы пропускных способностей и количеством ресурса в сети $W' = W - \sum_{i=1}^n r_{ii}$. Заметим, что в об-

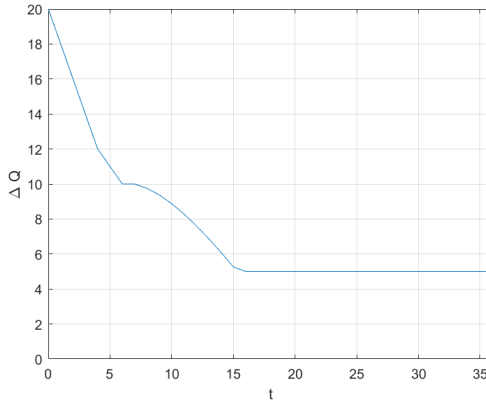


Рис. 11. График убывания свободного ресурса в сети с начальным состоянием $Q(0) = (20, 10, 0, 0, 0)$

щем случае топология полученной стандартной ресурсной сети неоднозначна: сеть может быть как регулярной, так и циклической. Эргодичность сети при этом сохранится.

Таким образом, дальнейшее функционирование сети с «жадными» вершинами эквивалентно функционированию соответствующей стандартной ресурсной сети (описана в [12]), и справедлива следующая теорема.

Теорема 6. Второе пороговое значение T_2 неоднородной сети с «жадными» вершинами совпадает с пороговым значением стандартной ресурсной сети соответствующей топологии $T_2 = T$.

5. Заключение

Рассмотрена модификация модели ресурсной сети – ресурсная сеть с «жадными» вершинами. «Жадные» вершины на каждом такте сначала передают необходимое количество ресурса себе в петлю, а затем остаток ресурса распределяют в исходящие рёбра по правилам стандартной ресурсной сети. Для топологии неоднородной эргодической ресурсной сети с «жадными» верши-

нами были получены следующие результаты.

1. Найдена взаимосвязь между скоростью убывания свободного ресурса и его количеством.

2. Найдено пороговое значение суммарного ресурса $T_1 = \sum_{i=1}^n r_{ii}$, равное сумме пропускных способностей всех петель сети и разделяющее зоны различного поведения сети: зоны недостаточного и достаточного ресурса. В зоне недостаточного ресурса сеть останавливается, что невозможно в стандартной эргодической ресурсной сети и обуславливается наличием модифицированных петель.

3. Для зоны недостаточного ресурса исследован характер остановки сети: разработан алгоритм, определяющий характер остановки сети по вектору начального распределения ресурса и по матрице пропускных способностей, а также находящий конечное состояние в случае остановки сети за конечное число тактов.

4. Для зоны достаточного ресурса доказано, что с момента насыщения всех вершин сеть будет функционировать эквивалентно стандартной ресурсной сети соответствующей топологии без петель.

5. Показано, что второе пороговое значение совпадает с пороговым значением стандартной сети соответствующей топологии без петель $T_2 = T$ и разделяет зоны малого и большого достаточного ресурса.

В дальнейшем планируется определить предельные состояния сети с «жадными» вершинами в случае ее асимптотической остановки, изучить поведение эргодических сетей некоторых конкретных топологий неоднородной сети, рассмотреть неэргодические сети с «жадными» вершинами.

Литература

1. АБДУПРАХМАН Х., ЕРУСАЛИМСКИЙ Я.М., СКОРОХОДОВ В.А. *Ресурсные сети с вентиляющей достижимостью* // Инженерный вестник Дона. – 2018. – № 4. – С. 78.

2. АБДУЛПРАХМАН Х., СКОРОХОДОВ В.А. *Ресурсные сети с магнитной достижимостью* // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2016. – № 4. – С. 4–10.
3. АБДУЛПРАХМАН Х., СКОРОХОДОВ В.А. *Полные двухресурсные сети с петлями* // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2016. – № 2. – С. 10–16.
4. АБДУЛПРАХМАН Х., СКОРОХОДОВ В.А. *Двухресурсные сети с магнитной достижимостью* // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2020. – №3. – С. 4–10.
5. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Сходимость и устойчивость в задачах согласования характеристик (обзор базовых результатов)* // Управление большими системами. – 2010. – №30.1 – С. 470–505.
6. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Метод проекции в задаче о консенсусе и регуляризованный предел степеней стохастической матрицы* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – №12. – С. 38–59.
7. БЕЛОУСОВ А.И., ТКАЧЕВ С.Б. *Дискретная математика*. – М.: МГТУ, 2006. – 744 с.
8. ГУБАНОВ Д.А., НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Социальные сети. Модели информационного влияния, управления и противоборства*. – М.: Издательство физико-математической литературы, 2010. – 228 с.
9. ГРОМОВ И.Д., ТИХОНОВ П.М. *Методологические основы формирования показателей ресурсного обеспечения в организационных сетях (на примере холдинга «РЖД»)* // Инновационный транспорт. – 2021. – №. 1. – С. 20–24.
10. ЕРУСАЛИМСКИЙ Я.М., СКОРОХОДОВ В.А., КУЗЬМИНОВА М.В., ПЕТРОСЯН А.Г. *Графы с нестандартной достижимостью: задачи, приложения*. Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2009. – 195 с.

11. ЖИГИРЬ А.А. *Методы количественной оценки экономического риска строительной организации при реализации инвестиционных проектов* // ЕГИ. – 2020. – №1. – С. 106–111.
12. ЖИЛЯКОВА Л.Ю., КУЗНЕЦОВ О.П. *Теория ресурсных сетей: монография*. М.: РИОР: ИНФРА-М, 2017. – 283 с.
13. ЖИЛЯКОВА Л.Ю., ЧАПЛИНСКАЯ Н.В. *Исследование полных однородных ресурсных сетей с «жадными» вершинами* // Управление большими системами (в печати).
14. ЖИЛЯКОВА Л.Ю. *Применение ресурсных сетей для моделирования распространения веществ в водной среде* // Проблемы управления. – 2011. – №2. – С. 46–51.
15. ЖИЛЯКОВА Л.Ю. *Ресурсные сети с ограничениями на ёмкость вершин* [Электронный ресурс]: монография. – М.: ИЦ РИОР, НИЦ ИНФРА-М, 2018. – 160 с.
16. КУЗНЕЦОВ О.П. *Однородные ресурсные сети. I. Полные графы* // Автоматика и телемеханика. – 2009. – №11. – С. 136–147.
17. СКОРОХОДОВ В.А., АБДУЛРАХМАН Х. *Динамические ресурсные сети. Случай малого ресурса* // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2018. – № 4. – С. 186–194.
18. ТИХОНОВ П.М. *Графоаналитическая модель ресурсного обеспечения сетевой организационной структуры при регулируемом закупочном процессе (на примере холдинга «РЖД»)* // Вестник Ростовского государственного университета путей сообщения. – 2020. – №. 1. – С. 129–136.
19. ЧАПЛИНСКАЯ Н.В. *Исследование полных однородных ресурсных сетей с «жадными» вершинами: зона «достаточного большого» ресурса* // Управление большими системами. – 2021. – Т. 90. – С. 49–66.
20. BLANCHARD PH., VOLCHENKOV D. *Random Walks and Diffusions on Graphs and Databases: An Introduction (Springer Series in Synergetics)*. – Springer-Verlag – Berlin – Heidelberg, 2011. – 262 p.

21. MASUDA N., PORTER M.A., LAMBIOTTE R. *Random walks and diffusion on networks* / Physics Reports. V. 716–717, 2017, P. 1-58.

6. Приложение

Доказательство утверждения 1.

Пусть r_i^{out} – суммарная выходная пропускная способность вершины v_i , не считая петли. В момент времени t_0 по двум правилам с пороговым переключением перенасыщенная вершина v_i отдает в смежную вершину v_{i+1}

- $r_{i,i+1}$ единиц ресурса, если $\Delta q_i(t_0) > r_i^{out}$ (правило 1);
- $\frac{r_{i,i+1}}{r_i^{out}} \Delta q_i(t_0)$ единиц ресурса, если $\Delta q_i(t_0) \leq r_i^{out}$ (правило 2).

То есть отдает $\min \left\{ r_{i,i+1}, \frac{r_{i,i+1}}{r_i^{out}} \Delta q_i(t_0) \right\}$.

Оценим это значение снизу:

$$\begin{aligned} \min \left\{ r_{i,i+1}, \frac{r_{i,i+1}}{r_i^{out}} \Delta q_i(t_0) \right\} &= \min \left\{ r_{i,i+1}, \rho_{i,i+1} \Delta q_i(t_0) \right\} \geq \\ &\geq \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} \Delta q_i(t_0) \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, на такте t_0 перенасыщенная вершина v_i передает смежной вершине v_{i+1} не менее $\delta_i = \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} \Delta q_i(t_0) \right\}$ ресурса. \square

Доказательство утверждения 2.

Будем рассматривать временной интервал $n - 1$, начиная с произвольного такта t_0 .

Сеть эргодическая, а значит, существует путь $v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_{i+m}, v_j$ ($m \leq n - 2$), соединяющий перенасыщенную в момент времени t_0 вершину v_i с ближайшей ненасыщенной вершиной v_j . Вершины v_{i+1}, \dots, v_{i+m} , являющиеся на такте t_0 насыщенными (или перенасыщенными), будут

передавать ресурс друг другу по пути и поочередно становиться перенасыщенными. Длина всего пути $m + 1 \leq n - 1$. То есть не позднее чем на $n - 1$ такте ненасыщенная вершина v_j получит какое-то количество ресурса, изначально принадлежавшего вершине v_i . Оценим его снизу.

Начнем с конца: перенасыщенная на такте $t = m + 1$ вершина v_{i+m} , согласно утверждению 1, передаст смежной вершине v_j не менее δ_{i+m} ресурса, где

$$\delta_{i+m} = \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} \Delta q_{i+m}(t_0 + m) \right\}.$$

Свободный ресурс $\Delta q_{i+m}(t_0 + m)$ вершины v_{i+m} состоит из ресурса δ_{i+m-1} , поступившего на предыдущем такте от смежной вершины v_{i+m-1} , и остаточного ресурса ε_{i+m} вершины v_{i+m} , т.е.

$$\Delta q_{i+m}(t_0 + m) = \delta_{i+m-1} + \varepsilon_{i+m}.$$

Тогда для δ_{i+m} имеем оценку снизу

$$\delta_{i+m} \geq \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} \delta_{i+m-1} \right\}.$$

Перенасыщенная на предыдущем такте $t = m$ вершина v_{i+m-1} , согласно утверждению 1, передаст смежной вершине v_{i+m} не менее δ_{i+m-1} ресурса, где

$$\delta_{i+m-1} = \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} \Delta q_{i+m-1}(t_0 + m - 1) \right\}.$$

Свободный ресурс $\Delta q_{i+m-1}(t_0 + m - 1)$ вершины v_{i+m-1} при этом находится аналогичным образом:

$$\Delta q_{i+m-1}(t_0 + m - 1) = \delta_{i+m-2} + \varepsilon_{i+m-1}.$$

Тогда для δ_{i+m-1} имеем оценку снизу

$$\delta_{i+m-1} \geq \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} \delta_{i+m-2} \right\}.$$

Подставляя последнее в выражение для δ_{i+m} , получим

$$\delta_{i+m} \geq \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} \delta_{i+m-2} \right\} \right\} =$$

$$= \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} r_{\min}, \rho_{\min}^2 \delta_{i+m-2} \right\}.$$

Повторяя рассуждения, выражая далее последовательно $\delta_{i+m-2}, \dots, \delta_{i+1}$, получим оценку снизу для δ_{i+m} через свободный ресурс $\Delta q_i(t_0)$ вершины v_i на такте $t = t_0$:

$$\begin{aligned} \delta_{i+m} &\geq \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} r_{\min}, \dots, \rho_{\min}^m r_{\min}, \rho_{\min}^{m+1} \Delta q_i(t_0) \right\} = \\ &= \rho_{\min}^m \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} \Delta q_i(t_0) \right\} \geq \rho_{\min}^{n-2} \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} \Delta q_i(t_0) \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, заключаем, что ненасыщенная вершина v_j не позднее чем на $n - 1$ такте получит ресурс, ограниченный снизу значением $\rho_{\min}^{n-2} \delta_i$, где $\rho_{\min} = \rho_{\min}$. \square

Доказательство утверждения 3.

Будем рассматривать временной интервал $l_0(n - 1)$, начиная с произвольного такта t_0 .

Пусть ненасыщенные в момент времени t_0 вершины имеют индексы от 1 до l_0 : v_1, v_2, \dots, v_{l_0} ($l_0 \leq n - k_0$). Оценим снизу количество поглощаемого ими ресурса за временной интервал $l_0(n - 1)$.

Пусть вершина v_i , $i > l_0$, в момент времени t_0 является перенасыщенной. Согласно утверждению 2, за количество тактов, не превосходящее $n - 1$, ближайшая к вершине v_i ненасыщенная вершина v_1 получит не менее $\rho_{\min}^{n-2} \delta_i$ ресурса.

Если полученный ресурс будет полностью поглощен вершиной v_1 , то утверждение доказано: $\rho_{\min}^{n-2} \delta_i \geq \rho_{\min}^{l_0(n-1)-1} \delta_i$, так как $l_0(n - 1) - 1 \geq n - 2$ и $0 < \rho_{\min} \leq 1$.

Рассмотрим обратный случай – поглощена была только часть пришедшего ресурса: обозначим ее λ_1 . То есть не позднее чем на такте $t_0 + (n - 1)$ вершина v_1 будет иметь

$$\Delta q_1 = \Delta q_1(t_0 + (n - 1)) \geq \rho_{\min}^{n-2} \delta_i - \lambda_1$$

свободного ресурса.

Согласно утверждению 2, не позднее чем через следующие $n - 1$ тактов, ближайшая к v_1 ненасыщенная вершина v_2 получит не менее $\rho_{\min}^{n-2}\delta_1$ ресурса. Здесь тоже предполагаем, что вершина v_2 поглотила только часть пришедшего ресурса – обозначим ее λ_2 – и будет иметь

$$\Delta q_2 = \Delta q_2(t_0 + 2(n - 1)) \geq \rho_{\min}^{n-2}\delta_1 - \lambda_2$$

свободного ресурса.

Аналогично оцениваются $\Delta q_3, \dots, \Delta q_{l_0-1}$.

По условию утверждения, на конец временного интервала $l_0(n - 1)$ в сети осталась хотя бы одна ненасыщенная вершина. То есть, дойдя до вершины v_{l_0} , ресурс $\rho_{\min}^{n-2}\delta_{l_0-1}$ был ею полностью поглощен, не насытив до конца: $\lambda_{l_0} \geq \rho_{\min}^{n-2}\delta_{l_0-1}$.

Итак, при «встрече» с каждой ненасыщенной вершиной v_j , $j = \overline{1, l_0}$, (т.е. не позднее чем на каждый $n - 1$ такт), свободный ресурс в сети будет уменьшаться на λ_j , $j = \overline{1, l_0}$. Таким образом, за количество тактов, не превышающее $l_0(n - 1)$, свободный ресурс сети уменьшится на $\sum_{j=1}^{l_0} \lambda_j$.

Так как λ_j , $j = \overline{1, l_0}$, являются строго положительными величинами, изменение свободного ресурса можно оценить снизу:

$$\sum_{j=1}^{l_0} \lambda_j = \lambda_1 + \dots + \lambda_{l_0-1} + \lambda_{l_0} > \lambda_{l_0}.$$

То есть в рассуждениях можно положить все $\lambda_j = 0$, $j = \overline{1, l_0 - 1}$. Тогда для свободных ресурсов вершин v_j , $j = \overline{1, l_0 - 1}$, имеем следующие рекуррентные неравенства:

$$\Delta q_j \geq \rho_{\min}^{n-2}\delta_{j-1} = \rho_{\min}^{n-2} \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} \Delta q_{j-1} \right\}, \quad j = \overline{2, l_0 - 1},$$

$$\Delta q_1 \geq \rho_{\min}^{n-2}\delta_1 = \rho_{\min}^{n-2} \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} \Delta q_1 \right\}.$$

С их помощью оценим снизу величину λ_{l_0} .

$$\lambda_{l_0} \geq \rho_{\min}^{n-2}\delta_{l_0-1} = \rho_{\min}^{n-2} \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} \Delta q_{l_0-1} \right\} \geq$$

$$\begin{aligned}
 &\geq \rho_{\min}^{n-2} \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min}^{n-1} \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} \Delta q_{l_0-2} \right\} \right\} = \\
 &= \rho_{\min}^{n-2} \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min}^{n-1} r_{\min}, \rho_{\min}^n \Delta q_{l_0-2} \right\} = \\
 &= \rho_{\min}^{n-2} \min \left\{ \rho_{\min}^{n-1} r_{\min}, \rho_{\min}^n \Delta q_{l_0-2} \right\} = \\
 &= \rho_{\min}^{2n-3} \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} \Delta q_{l_0-2} \right\} \geq \dots \geq \\
 &\geq \rho_{\min}^{l_0(n-1)-1} \min \left\{ r_{\min}, \rho_{\min} \Delta q_i \right\} = \rho_{\min}^{l_0(n-1)-1} \delta_i.
 \end{aligned}$$

Таким образом, за количество тактов, не превосходящее $l_0(n-1)$, начиная с момента времени t_0 , свободный ресурс сети уменьшится не менее чем на $\rho_{\min}^{l_0(n-1)-1} \delta_i$. \square

Доказательство утверждения 4.

Пусть вершина v_i является насыщенной на такте t_0 . Покажем, что свободный ресурс каждой такой вершины с течением времени стремится к нулю:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta q_i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (q_i(t) - r_{ii}) = 0.$$

Рассмотрим последовательность $\left\{ \Delta Q(t) \right\}_{t=0}^{\infty}$ суммарного свободного ресурса сети. Для определенного интервала тактов τ построим подпоследовательность этой последовательности: $\left\{ \Delta Q_i \right\}_{i=0}^{\infty}$, где $\Delta Q_i = \Delta Q(i\tau)$ – суммарный свободный ресурс сети на начало i -го временного интервала τ .

Обозначим $k(t)$ количество перенасыщенных вершин в сети в момент времени t . Каждому элементу имеющейся подпоследовательности можно поставить в соответствие число $k_i = k(i\tau)$ – количество перенасыщенных вершин на начало i -го временного интервала τ .

Имеем монотонно невозрастающую последовательность $\left\{ \Delta Q(t) \right\}_{t=0}^{\infty}$ суммарного свободного ресурса сети с неотрицательными элементами. Для периода тактов $\tau = n(n-1)$ рассмотрим подпоследовательность этой последовательности:

$\left\{ \Delta Q_i \right\}_{i=0}^{\infty}$, где $\Delta Q_i = \Delta Q(i\tau)$ – суммарный свободный ресурс сети на начало i -го периода τ . Покажем, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \Delta Q_i = 0.$$

Имеем рекуррентное соотношение:

$$\Delta Q_{i+1} = \Delta Q_i - \lambda_i,$$

где λ_i – ресурс, поглощенный ненасыщенными вершинами за i -й период тактов τ .

Из леммы 1 следует, что

$$\forall i \lambda_i \geq \Lambda_i = \rho_{\min}^{n-k_i} \min \left\{ r_{\min}, \frac{\rho_{\min}}{k_i} \Delta Q_i \right\}.$$

Тогда

$$\Delta Q_{i+1} \leq \Delta Q_i - \Lambda_i = \Delta Q_i - \rho_{\min}^{n-k_i} \min \left\{ r_{\min}, \frac{\rho_{\min}}{k_i} \Delta Q_i \right\},$$

где $k_i = k(i\tau)$ – количество перенасыщенных вершин в сети на начало i -го периода тактов τ .

Перепишем неравенство следующим образом:

$$\Delta Q_{i+1} \leq \Delta Q_i - \frac{\rho_{\min}^{n-k_i+1}}{k_i} \min \left\{ \frac{r_{\min}}{\rho_{\min}} k_i, \Delta Q_i \right\}.$$

В зоне недостаточного ресурса не может быть n перенасыщенных вершин, т.е. на число k_i наложено следующее ограничение: $0 \leq k_i \leq n - 1$. При этом если начиная с некоторого i' $\forall i \geq i' k_i = 0$, то получаем, что $\forall i \geq i' \Delta Q_i = 0$. Случай $\Delta Q_i = 0$ нас не интересует, так как он приводит к доказательству теоремы; далее будем рассматривать $\Delta Q_i > 0$. Пусть теперь $\forall i k_i > 0$, т.е. $1 \leq k_i \leq n - 1$. Учитывая это ограничение, а также тот факт, что $0 < \rho_{\min} \leq 1$, можно оценить сверху выражение, зависящее от k_i :

$$\Delta Q_{i+1} \leq \Delta Q_i - \frac{\rho_{\min}^n}{n-1} \min \left\{ \frac{r_{\min}}{\rho_{\min}}, \Delta Q_i \right\}.$$

Подпоследовательность $\{\Delta Q_i\}_{i=0}^{\infty}$ – монотонно убывающая. Возможны две ситуации: либо $\Delta Q_0 < \frac{r_{\min}}{\rho_{\min}}$, а тогда $\forall i \Delta Q_i < \frac{r_{\min}}{\rho_{\min}}$, либо $\Delta Q_0 \geq \frac{r_{\min}}{\rho_{\min}}$. Во втором случае следующий элемент подпоследовательности будет меньше предыдущего на величину, ограниченную снизу значением $\frac{\rho_{\min}^{n-1} r_{\min}}{n-1}$, а значит, существует такое i' , что $\forall i \geq i' \Delta Q_i < \frac{r_{\min}}{\rho_{\min}}$.

Итак, имеем

$$\forall i \geq i' \Delta Q_{i+1} \leq \left(1 - \frac{\rho_{\min}^n}{n-1}\right) \Delta Q_i,$$

при этом

$$0 < \left(1 - \frac{\rho_{\min}^n}{n-1}\right) < 1.$$

Таким образом, подпоследовательность $\{\Delta Q_i\}_{i=0}^{\infty}$, начиная с определенного элемента, будет ограничена сверху убывающей геометрической прогрессией

$$\Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} \Delta Q_i = 0.$$

Последовательность суммарного свободного ресурса сети $\{\Delta Q(t)\}_{t=0}^{\infty}$ – монотонно невозрастающая, а предел ее подпоследовательности равен нулю $\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta Q(t) = 0$. \square

Доказательство теоремы 1.

Вершины v_1, \dots, v_k ($1 < k < n$) образуют перенасыщенный цикл, т.е. все они насыщенные и хотя бы одна из них перенасыщенная – пусть это будет вершина v_1 .

Для доказательства бесконечного функционирования сети достаточно доказать, что свободный ресурс этой сети не сможет стать нулевым (равенство нулю означает остановку сети). Докажем, что в каждый момент времени как минимум одна из вершин v_1, \dots, v_k будет иметь ненулевой свободный ресурс.

Вершины v_1, \dots, v_k , являясь насыщенными, не могут стать ненасыщенными (не могут начать «поглощать» полученный ресурс). Так как вершина v_1 в момент времени $t = 0$ перенасыщена, на первом такте она отдаст часть своего свободного ресурса вершине v_2 , сделав ее перенасыщенной. Аналогично на втором такте вершина v_2 отдаст часть своего свободного ресурса вершине v_3 , сделав ее перенасыщенной. Соответственно на тактах $t = 1, t = 2, \dots, t = k - 1$ вершины v_2, v_3, \dots, v_k по очереди будут становиться перенасыщенными. На такте k вершина v_1 получит ненулевой ресурс от вершины v_k , и, отдав на первом такте даже весь свой свободный ресурс, v_1 станет вновь перенасыщенной. Рассуждения для каждых следующих k тактов можно повторить. Таким образом, в каждый момент времени как минимум одна из вершин v_1, \dots, v_k будет иметь ненулевой свободный ресурс.

Остановка сети в пределе следует из утверждения 4: суммарный свободный ресурс в сети стремится к нулю, значит, сеть стремится к состоянию останова. \square

Доказательство теоремы 2.

Достаточность следует из теоремы 1: если в сети в какой-то момент времени образовался перенасыщенный цикл, то, считая этот момент времени начальным, по теореме 1 имеем бесконечное функционирование сети.

Необходимость. Докажем, что если в процессе функционирования сети не образуется перенасыщенный цикл, то сеть остановится за конечное число тактов.

На основе имеющейся ресурсной сети с «жадными» вершинами построим ориентированный граф возможных путей распространения свободного ресурса. Этот граф будет содержать те же вершины, что и наша ресурсная сеть, а из множества ребер оставим только исходящие из перенасыщенных вершин (ненасыщенная вершина и вершина с ресурсом, равным пропускной способности петли, не могут отдавать ресурс). Также удалим петли перенасыщенных вершин – они не влияют на распространение сво-

бодного ресурса в сети.

По условию, в сети ни в какой момент времени не может образоваться перенасыщенный цикл. Любые существующие в сети циклы, таким образом, могут либо остаться ненасыщенными, либо насытиться, но не перенасытиться. В обоих случаях в рассматриваемом графе не будет контуров, так как у всех ненасыщенных и насыщенных, но не перенасыщенных вершин на графе не будет исходящих ребер.

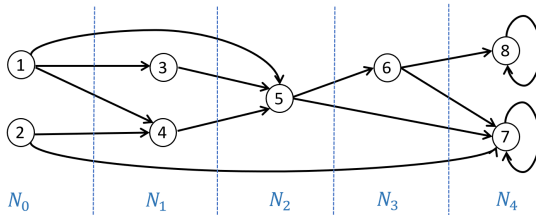


Рис. 12. Топологически отсортированный граф

Итак, при условии постоянного отсутствия в сети перенасыщенных циклов, рассматриваемый граф возможных путей распространения свободного ресурса не имеет контуров. Тогда можно произвести известную в теории графов топологическую сортировку: распределение вершин по уровням. Уровень вершины (на рис. 12 обозначается N_i) – это фактически длина максимального пути от входов графа до этой вершины. Топологическая сортировка производится, например, с помощью алгоритма Демукрона вычисления порядковой функции сети (см. [7]).

Расположив уровни слева-направо (см. рис. 12), начиная с N_0 , получим, что свободный ресурс может двигаться только слева направо, причем любой путь перемещения свободного ресурса будет заканчиваться на вершине-приемнике, являющейся ненасыщенной вершиной.

Таким образом, либо весь свободный ресурс, циркулирующий по сети, за конечное число тактов будет поглощен ненасыщенными вершинами (т.е. произойдет остановка сети), либо какая-то ненасыщенная (насыщенная, но не перенасыщенная)

вершина перенасытится.

Второй случай влечет за собой «изменение» графа возможных путей распространения ресурса – граф эволюционирует: у перенасытившейся вершины появляются все «удаленные» ранее исходящие ребра. Однако при этом, аналогично рассуждая, получим, что обновленный граф остается бесконтурным однопольным, ввиду невозможности появления перенасыщенных циклов в ресурсной сети. Тогда и в этом случае все пути перемещения свободного ресурса заканчиваются на ненасыщенных вершинах.

Отметим, что количество таких эволюций ограничено количеством не являющихся перенасыщенными на начальный момент времени вершин сети. Теорема доказана. \square

Доказательство утверждения 5.

Пусть в отсортированном графе сети n_i – количество вершин, принадлежащих уровням $N_0, \dots, N_i, i = \overline{0, \nu - 1}$ и вершины сети пронумерованы по увеличению номеров своих уровней.

Матрица R выглядит следующим образом:

$$R = \begin{pmatrix} D_0 & R_{01} & R_{02} & \dots & R_{0\nu-1} \\ O & D_1 & R_{12} & \dots & R_{1\nu-1} \\ O & O & D_2 & \dots & R_{2\nu-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & O & \dots & D_{\nu-1} \end{pmatrix}.$$

Построим матрицу пропускных способностей \tilde{R} , убрав петли вершин, не являющихся стоковыми:

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} \tilde{D}_0 & R_{01} & R_{02} & \dots & R_{0\nu-1} \\ O & \tilde{D}_1 & R_{12} & \dots & R_{1\nu-1} \\ O & O & \tilde{D}_2 & \dots & R_{2\nu-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & O & \dots & D_{\nu-1} \end{pmatrix}.$$

Здесь матрица $\tilde{D}_{\nu-1} = D_{\nu-1}$ осталась неизменной. Матрицы $\tilde{D}_i, i = \overline{0, \nu - 2}$, нулевые, за исключением диагональных

элементов, соответствующих пропускным способностям петель стоковых вершин уровней N_i , $i = \overline{0, \nu - 2}$. Отметим вновь, что в строках, где матрицы \tilde{D}_i , $i = \overline{0, \nu - 2}$, имеют ненулевые диагональные элементы, элементы соответствующих строк матриц R_{ij} , $j = \overline{i + 1, \nu - 1}$, нулевые.

Наконец, определим вид матрицы \tilde{R}' – стохастической матрицы сети с удаленными петлями у вершин, не являющихся стоковыми. Эта матрица и будет использоваться в формуле, которую необходимо обосновать:

$$\tilde{R}' = \begin{pmatrix} \tilde{E}_0 & P_{01} & P_{02} & \dots & P_{0\nu-1} \\ O & \tilde{E}_1 & P_{12} & \dots & P_{1\nu-1} \\ O & O & \tilde{E}_2 & \dots & P_{2\nu-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & O & \dots & E \end{pmatrix}.$$

Здесь матрицы \tilde{E}_i , $i = \overline{0, \nu - 2}$, нулевые, за исключением некоторых единичных диагональных элементов, соответствующих относительным пропускным способностям петель стоковых вершин уровней N_i , $i = \overline{0, \nu - 2}$. Матрицу P_{ij} , $i < j$, интерпретируем как матрицу относительных пропускных способностей ребер, выходящих из вершин уровня N_i и входящих в вершины уровня N_j .

Введем обозначение $\Delta Q(t_k) = Q(t_k) - R_{diag}$, $\Delta q_i^k = \Delta q_i(t_k) = q_i(t_k) - r_{ii}$. Искомую формулу тогда можно переписать в следующем виде:

$$\Delta Q(t_k) = \Delta Q(0)(\tilde{R}')^k.$$

Воспользуемся методом математической индукции.

При $k = 0$ утверждение верно. Начальное состояние стоковых вершин уровня N_0 , согласно формуле, и является конечным, что соответствует действительности: у таких вершин нет ни входящих, ни исходящих ребер – ресурс в них измениться не может.

Покажем, что утверждение верно для $k = 1$, т.е. что конечное состояние всех вершин уровня N_0 и всех стоковых вершин

уровня N_1 определяется формулой

$$Q(t_1) = (Q(0) - R_{diag})\tilde{R}' + R_{diag},$$

или в новых обозначениях

$$\Delta Q(t_1) = \Delta Q(0)\tilde{R}'.$$

Распишем последнюю формулу только для вершин интересующих нас уровней:

$$\begin{aligned} &v_1, \dots, v_{n_0} \in N_0, v_{n_0+1}, \dots, v_{n_1} \in N_1, \\ &(\Delta q_1^1, \dots, \Delta q_{n_0}^1, \Delta q_{n_0+1}^1, \dots, \Delta q_{n_1}^1) = \\ &= (\Delta q_1^0, \dots, \Delta q_{n_0}^0, \Delta q_{n_0+1}^0, \dots, \Delta q_{n_1}^0) \begin{pmatrix} \tilde{E}_0 & P_{01} \\ O & \tilde{E}_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

где в общем случае обнаружения стоковых вершин на обоих уровнях N_0 и N_1 матрица выглядит следующим образом (здесь вершина v_i показана как стоковая уровня N_1)

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_0 & P_{01} \\ O & \tilde{E}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \rho_{1n_0+1} & \dots & \rho_{1i} & \dots & \rho_{1n_1} \\ \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \rho_{n_0n_0+1} & \dots & \rho_{n_0i} & \dots & \rho_{n_0n_1} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислив вектор $(\Delta q_1^1, \dots, \Delta q_{n_0}^1, \Delta q_{n_0+1}^1, \dots, \Delta q_{n_1}^1)$ по предлагаемой формуле, получим, что

$$\Delta q_j^1 = \begin{cases} 0, & v_j - \text{не стоковая,} \\ \Delta q_j^0, & v_j - \text{стоковая,} \\ \Delta q_j^0 + \sum_{i=1}^{n_0} \rho_{ij} \Delta q_i^0, & v_j - \text{стоковая.} \end{cases}$$

Перейдем к состояниям:

$$q_j^1 = \begin{cases} r_{jj}, & v_j - \text{не стоковая,} \\ q_j^0, & v_j - \text{стоковая,} \\ q_j^0 + \sum_{i=1}^{n_0} \rho_{ij}(q_i^0 - r_{ii}), & v_j - \text{стоковая.} \end{cases}$$

Ресурс вершины уровня N_0 , не являющейся стоковой, в конечном состоянии будет равен пропускной способности петли вершин, так как весь свободный ресурс эта вершина отдала в вершины следующих уровней. Конечное состояние стоковой вершины уровня N_0 , как говорилось в рассуждениях для случая $k = 0$, равно начальному состоянию этой вершины. А конечное состояние стоковой вершины уровня N_1 – это начальный ресурс вершины и ресурс, пришедший от всех смежных с ней вершин уровня N_0 . Таким образом, для случая $k = 1$ формула оказалась корректной.

Пусть формула верна для $k = m$.

Итак, конечное состояние всех вершин уровней N_i , $i = \overline{0, m-1}$, и всех стоковых вершин уровня N_m определяется формулой

$$Q(t_m) = (Q(0) - R_{diag})(\tilde{R}')^m + R_{diag},$$

$$\Delta Q(t_m) = \Delta Q(0)(\tilde{R}')^m.$$

То есть формула выдает следующий верный результат: для уровней N_i , где $i = \overline{0, m-1}$, все не стоковые вершины в конечном состоянии содержат ресурс, равный пропускной способности петли, все стоковые вершины содержат собственный начальный ресурс и ресурс, пришедший от вершин предыдущих уровней N_i , $i = \overline{0, m-2}$. А конечное состояние стоковых вершин уровня N_m – аналогично: начальный ресурс этих вершин и ресурс, пришедший от вершин предыдущих уровней N_i , $i = \overline{0, m-1}$.

Покажем, что для $k = m + 1$ формула дает верный результат:

$$Q(t_{m+1}) = (Q(0) - R_{diag})(\tilde{R}')^{m+1} + R_{diag},$$

$$\Delta Q(t_{m+1}) = \Delta Q(0)(\tilde{R}')^{m+1},$$

$$\Delta Q(t_{m+1}) = \Delta Q(t_m) \tilde{R}',$$

$$\Delta Q(t_m) = (\Delta q_1^m, \dots, \Delta q_{n_{m-1}+1}^m, \dots, \Delta q_{n_m}^m, \Delta q_{n_m+1}^m, \dots, \Delta q_{n_{m+1}}^m),$$

$$\tilde{R}' = \begin{pmatrix} \tilde{E}_0 & \dots & P_{0m} & P_{0m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & \dots & \tilde{E}_m & P_{mm+1} \\ O & \dots & O & \tilde{E}_{m+1} \end{pmatrix}.$$

Вычислим вектор

$$(\Delta q_1^{m+1}, \dots, \Delta q_{n_{m-1}+1}^{m+1}, \dots, \Delta q_{n_m}^{m+1}, \Delta q_{n_m+1}^{m+1}, \dots, \Delta q_{n_{m+1}}^{m+1}),$$

используя тот факт, что $\Delta q_j^m = 0$ ($q_j^m = r_{jj}$) для не стоковых вершин уровней N_i , $i = \overline{0, m-1}$. Получим

$$\Delta q_j^{m+1} = \begin{cases} 0, & v_j - \text{не стоковая,} \\ \Delta q_j^m, & v_j - \text{стоковая,} \\ \Delta q_j^m + \sum_{i=n_{m-1}+1}^{n_m} \rho_{ij} \Delta q_i^m, & v_j - \text{стоковая.} \end{cases}$$

Перейдем к состояниям:

$$q_j^{m+1} = \begin{cases} r_{jj}, & v_j - \text{не стоковая,} \\ q_j^m, & v_j - \text{стоковая,} \\ q_j^m + \sum_{i=n_{m-1}+1}^{n_m} \rho_{ij} (q_i^m - r_{ii}), & v_j - \text{стоковая.} \end{cases}$$

Действительно, для уровней N_i , $i = \overline{0, m}$, все не стоковые вершины в конечном состоянии содержат ресурс, равный пропускной способности петли, а ресурс стоковых вершин $q_j^{m+1} = q_j^m$, т.е. содержит собственный начальный ресурс и ресурс, пришедший от всех не стоковых вершин предыдущих уровней N_i , $i = \overline{0, m-1}$. Конечное состояние стоковых вершин уровня N_{m+1} – сумма q_j^m (начальный ресурс этих вершин и ресурс, пришедший от всех не стоковых вершин уровней N_i , $i = \overline{0, m-1}$) и $\sum_{i=n_{m-1}+1}^{n_m} \rho_{ij} (q_i^m - r_{ii})$ (ресурс, пришедший от

всех не стоковых вершин уровня N_m). Формула верна для случая $k = m + 1$.

Таким образом, согласно принципу математической индукции, искомая формула доказана. \square

Доказательство теоремы 5.

Воспользуемся леммой 1: пока существует хотя бы одна ненасыщенная и одна перенасыщенная вершины, за i -й период тактов $\tau = n(n - 1)$ свободный ресурс сети уменьшится не менее чем на

$$\Lambda_i = \left(\rho_{\min}\right)^{(n-2)(n-k_i)} \min \left\{ r_{\min}, \frac{\rho_{\min}}{k_i} \Delta Q_i \right\}.$$

Учитывая, что при достаточном ресурсе $\forall i \Delta Q_i \geq W - \sum_{j=1}^n r_{jj}$ и $\forall i 1 \leq k_i \leq n$, имеем

$$\begin{aligned} \Lambda_i &\geq \left(\rho_{\min}\right)^{(n-2)(n-k_i)} \min \left\{ r_{\min}, \frac{\rho_{\min}}{k_i} \left(W - \sum_{j=1}^n r_{jj} \right) \right\} \geq \\ &\geq \left(\rho_{\min}\right)^{(n-2)(n-1)} \min \left\{ r_{\min}, \frac{\rho_{\min}}{n} \left(W - \sum_{j=1}^n r_{jj} \right) \right\} = \Lambda. \end{aligned}$$

Учитывая, что $W > \sum_{j=1}^n r_{jj}$, получаем, что Λ – строго положительная величина.

Итого: свободный ресурс сети не может стать нулевым (утв. б), однако, за каждые $\tau = n(n - 1)$ тактов он уменьшается не менее чем на $\Lambda > 0$, пока существует хотя бы одна ненасыщенная вершина.

Таким образом, не более чем за

$$\frac{Q(0) - \left(W - \sum_{j=1}^n r_{jj} \right)}{\Lambda}$$

тактов все ненасыщенные вершины сети с достаточным ресурсом насытятся. \square

RESEARCH OF ERGODIC HETEROGENEOUS "GREEDY-VERTICES" RESOURCE NETWORKS

Nadezda Chaplinskaya, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, mathematician (nadya1462@gmail.com).

Abstract: A modification of the graph threshold dynamic model «resource network» – «resource network with greedy vertices» is considered. At each discrete-time moment, the vertices of the graph transfer the resource to each other through the edges with limited throughputs. First they transfer the available resource to their own loops, and then the rest of the resource is distributed to the outgoing edges according to the rules of the standard resource network (in proportion to the throughputs taking into account their limitations). The topology of an ergodic heterogeneous resource network with «greedy» vertices is considered – the network is described by a strongly connected directed graph. It is shown that when the values of the total resource are not larger than the sum of the throughputs of all loops, the network with «greedy» vertices stops, which is impossible for a standard ergodic resource network and is caused by the existence of modified loops; the nature of the network stop is investigated. For the values of the total resource that are larger than the sum of the throughputs of all loops, it is proved that from a certain time moment the network will function equivalently to the corresponding standard resource network.

Keywords: graph dynamic threshold model, resource net, "greedy-vertices" model, topology of ergodic heterogeneous networks.

УДК 519.1

ББК 22.176

DOI: 10.25728/ubs.2021.93.1

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Э.Ю. Калимулиной.*

Поступила в редакцию 22.06.2021.

Дата опубликования 30.09.2021.