

## АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ В УСЛОВИИ НАСЫЩЕНИЯ СИГНАЛА УПРАВЛЕНИЯ И ЕГО ПРОИЗВОДНЫХ<sup>1</sup>

Фуртат И. Б.<sup>2</sup>, Гущин П. А.<sup>3</sup>

(Институт проблем машиноведения РАН, Университет  
ИТМО, Санкт-Петербург)

*Приведен синтез системы управления объектами в условиях параметрической неопределенности, внешних ограниченных возмущений, насыщения регулируемой переменной и ее производных по времени. Такие задачи типичны при управлении различного рода техническими системами. Игнорирование неопределенностей и ограничений может приводить к невыполнению поставленной цели или потери устойчивости системы управления. Например, катастрофические последствия могут возникать в системе управления полетом летательного аппарата из-за насыщения регулируемой переменной и ее производной. Другими примерами являются управление компрессорами реактивных двигателей и исследование поведения объекта управления с медленным приводом. Для решения задачи в условиях неопределенностей и ограничений на регулирующий сигнал предложен новый способ формирования закона управления, который позволяет обеспечить нахождение регулирующего сигнала и его производных в заданных множествах. Использован принцип компенсации возмущений, который позволил получить информацию о параметрической неопределенности и внешних возмущениях в виде некоторой функции. Для компенсации данных неопределенностей формировался сигнал управления, значение которого противоположно значению возмущений. Таким образом для регулирования в условиях ограничений на сигнал управления требуется наложить соответствующие ограничения на функцию, содержащую информацию о данных неопределенностях. Получены условия на параметры объекта, внешнее возмущение, эталонную модель и регулятор при выполнении которых система управления будет работоспособной. Приведены результаты моделирования, иллюстрирующие работоспособность приведенной схемы.*

**Ключевые слова:** управление в условии неопределенности, насыщение сигнала управления и его производных, компенсация возмущений.

---

<sup>1</sup> Результаты раздела 3 получены при поддержке гранта РФФИ №17-08-01266.

<sup>2</sup> Игорь Борисович Фуртат, д.т.н., доцент (cainenash@mail.ru).

<sup>3</sup> Павел Александрович Гущин, к.т.н. (guschin.p@mail.ru).

## 1. Введение

Насыщение в регулирующих сигналах – одна из типичных проблем управления техническими системами. В ряде задач дополнительно насыщению (*magnitude saturation*) в качестве регулирующей переменной рассматривается насыщение ее производной по времени (*rate saturation*). Например, в [10, 22, 23] изучались катастрофические последствия, возникающие в системе управления полетом летательного аппарата из-за насыщения регулируемой переменной и ее производной. Другими примерами являются управление компрессорами реактивных двигателей [15, 18, 26] и исследование поведения объекта управления с медленным приводом [11].

В настоящее время для решения задачи в условии насыщения регулируемой переменной и ее первой производной по времени предложено достаточно большое количество методов и алгоритмов. В [12, 20, 25, 27] построение системы управления базируется на современных методах исследования нелинейных систем. В [6, 7, 8, 16, 17] синтез алгоритмов управления основан на использовании выпуклых вычислительных методов, таких как линейных матричных неравенств. Достаточно много решений, например, [6, 20, 21, 25], предложено на базе метода «*anti-windup*». Проблема заключается в том, что из-за насыщения управляющего сигнала переменные интегрирующего звена в ПИ- и ПИД-регуляторах могут быть неограниченными (*windup*), что приводит к невыполнению поставленной цели или потери устойчивости замкнутой системы. В таких случаях работоспособность системы управления с ПИ- и ПИД-регулятором может достигаться введением контура, предотвращающего рост параметров в регуляторе (*anti-windup*). В работах [9, 24] рассмотрено решение задачи с использованием статической и динамической обратных связей и нахождением областей устойчивости с привлечением аппарата линейных матричных неравенств. В [24] дополнительно решена задача для несимметричного насыщения регулируемой переменной в дискретных и непрерывных системах.

Вышеописанные работы посвящены решению задачи управления в условиях насыщения регулируемой переменной и ее производной для объекта с известными параметрами. К тому же для реализации закона управления использовался принцип подавления возмущений. В отличие от работ [6–8, 12, 16, 17, 20–22, 25, 26], данная статья посвящена синтезу алгоритма слежения выхода объекта за эталонным сигналом в условиях параметрической неопределенности, внешних неконтролируемых возмущений, насыщения сигнала управления и его производных. Для синтеза закона управления будет использоваться принцип компенсации возмущений, согласно которому значение сигнала управления должно быть противоположно значению возмущений. Таким образом, при наличии ограничений на сигнал управления и его производные соответствующие ограничения должны быть наложены на возмущения и его производные.

В данной статье решена задача управления линейными объектами в условиях насыщения регулируемой переменной и ее производных по времени. Рассматривается модель объекта с неизвестными параметрами, которая подвержена действию внешних ограниченных возмущений. Синтез алгоритма управления условно разбивается на два этапа. На первом этапе формируется закон управления, учитывающий ограничения на входной сигнал и его производные; на втором этапе осуществляется синтез алгоритма компенсации параметрических и внешних возмущений. Получены условия на параметры объекта, эталонной модели и регулятора при выполнении которых система управления обеспечивает слежение выхода объекта за эталонным сигналом с заданной точностью. Приведены результаты моделирования, иллюстрирующие работоспособность приведенной схемы.

## **2. Постановка задачи**

Рассмотрим объект управления, математическая модель которого описывается уравнением

$$(1) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bg_0(u_0) + Df(t), \quad y(t) = Lx(t), \quad x(0) = x_0,$$

где  $x(t) \in R^n$  – вектор состояния;  $u_0(t) \in R$  и  $y(t) \in R$  – входной и выходной сигналы соответственно;  $f(t) \in R$  – гладкое неконтролируемое внешнее возмущение, причем  $|f^{(i)}(t)| \leq \bar{f}_i$ ,  $\bar{f}_i$  – известные величины,  $i = 0, 1, \dots, k$ ; элементы матрицы  $A \in R^{n \times n}$  и коэффициенты векторов  $B \in R^n$ ,  $D \in R^n$  – неизвестные числа;  $L = [1, 0, \dots, 0]$  – матрица соответствующей размерности,  $x_0$  – неизвестные начальные условия; функция  $g_0(u_0) \in R$  определена выражением

$$(2) \quad g_0(u_0) = \bar{u}_0 \operatorname{sat} \left( \frac{u_0(t)}{\bar{u}_0} \right) = \begin{cases} u_0(t), & |u_0(t)| \leq \bar{u}_0, \\ \bar{u}_0 \operatorname{sgn}(u_0(t)), & |u_0(t)| > \bar{u}_0, \end{cases}$$

где  $\bar{u}_0 > 0$  – величина насыщения. Кроме того, на входной сигнал объекта (1) наложены ограничения следующего вида:

$$u_0(t) = \int_0^t g_1(u_1(z)) dz,$$

$$g_1(u_1) = \bar{u}_1 \operatorname{sat} \left( \frac{u_1(t)}{\bar{u}_1} \right) = \begin{cases} u_1(t), & |u_1(t)| \leq \bar{u}_1, \\ \bar{u}_1 \operatorname{sgn}(u_1(t)), & |u_1(t)| > \bar{u}_1, \end{cases}$$

$$u_1(t) = \int_0^t g_2(u_2(z)) dz,$$

$$(3) \quad g_2(u_2) = \bar{u}_2 \operatorname{sat} \left( \frac{u_2(t)}{\bar{u}_2} \right) = \begin{cases} u_2(t), & |u_2(t)| \leq \bar{u}_2, \\ \bar{u}_2 \operatorname{sgn}(u_2(t)), & |u_2(t)| > \bar{u}_2, \end{cases}$$

⋮

$$u_{k-1}(t) = \int_0^t g_k(u_k(z)) dz,$$

$$g_k(u_k) = \bar{u}_k \operatorname{sat} \left( \frac{u_k(t)}{\bar{u}_k} \right) = \begin{cases} u_k(t), & |u_k(t)| \leq \bar{u}_k, \\ \bar{u}_k \operatorname{sgn}(u_k(t)), & |u_k(t)| > \bar{u}_k. \end{cases}$$

Зададим уравнение эталонной модели в виде

$$(4) \quad \dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m r(t), \quad y_m(t) = L x_m(t), \quad x_m(0) = x_{m0},$$

где  $x_m(t) \in R^n$  – вектор состояния;  $r(t) \in R$  – гладкое задающее воздействие, причем  $|r^{(i)}(t)| \leq \bar{r}_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$ ;  $y_m(t) \in R$  – выход

эталонной модели; матрица  $A_m \in R^{n \times n}$  и вектор  $B_m \in R^n$  – известны, причем матрица  $A_m$  – гурвицева;  $x_{m0}$  – известные начальные условия.

Требуется разработать алгоритм, обеспечивающий выполнение целевого условия

$$(5) \quad |y(t) - y_m(t)| < \delta \quad \text{при } t > T,$$

где величина  $\delta > 0$  характеризует точность слежения,  $T > 0$  – время переходного процесса. Также необходимо, чтобы все переменные в замкнутой системе были ограниченными.

Предположения.

1. Неизвестные элементы матрицы  $A$  и коэффициенты векторов  $B$  и  $D$  принадлежат известному ограниченному множеству  $\Xi$ . Пара  $(A, B)$  управляема, пара  $(A, C)$  наблюдаема.

2. Выполнены условия:  $A = A_m + B_m c_{01}^T$ ,  $B = B_m + B_m c_{02}$ ,  $D = B_m c_{03}$ , где  $c_{01} \in R^n$ ,  $c_{02} \in R$ ,  $c_{03} \in R$  – неизвестные вектор и числа.

3. Числитель передаточной функции  $L(\lambda I - A)^{-1}B$  – гурвицев, где  $\lambda$  – комплексная переменная,  $I$  – единичная матрица соответствующего порядка.

Прокомментируем необходимость выполнения предположений 2 и 3. Идея компенсации возмущений состоит в поиске сигнала управления, значение которого было бы противоположно значению возмущений. Тогда при наличии ограничений на сигнал управления необходимо потребовать соответствующие ограничения и на возмущения. Предположение 2 требует согласованность возмущений, т.е. возможность напрямую повлиять сигналом управления на параметрические и внешние возмущения с учетом ограничений на регулируемый сигнал. Предположение 3 необходимо для синтеза устойчивого регулятора. К сожалению, предложенный алгоритм не обоснован, а моделирование показывает, что зачастую и не работоспособен для несогласованных возмущений и передаточных функций объекта с неустойчивым числителем.

### 3. Структура основного закона управления

Принимая во внимание предположение 2, перепишем уравнение (1) в виде

$$(6) \quad \dot{x}(t) = A_m x(t) + B_m \hat{u}_0(t) + B_m \psi(t), \quad y(t) = Lx(t),$$

где  $\hat{u}_0(t)$  – новый сигнал управления,  $\psi(t) = c_{01}^T x(t) + (1 + c_{02})g_0(u_0) - \hat{u}_0(t) + c_{03}f(t)$ . В условиях ограничений (2) и (3) зададим функцию  $\hat{u}_0(t)$  в виде

$$(7) \quad \begin{aligned} \hat{u}_0(t) &= \frac{1}{1 + \sigma_0} \left( g_1(t) + \sigma_0 \tilde{u}_0 \text{sat} \left( \frac{g_1(t)}{\tilde{u}_0} \right) \right), \\ \dot{g}_1(t) &= \hat{u}_1(t) - \mu g_1(t), \\ \hat{u}_1(t) &= \frac{1}{1 + \sigma_1} \left( g_2(t) + \sigma_1 \tilde{u}_1 \text{sat} \left( \frac{g_2(t)}{\tilde{u}_1} \right) \right), \\ \dot{g}_2(t) &= \hat{u}_2(t) - \mu g_2(t), \\ &\vdots \\ \dot{g}_{k-1}(t) &= \hat{u}_{k-1}(t) - \mu g_{k-1}(t), \\ \hat{u}_{k-1}(t) &= \frac{1}{1 + \sigma_{k-1}} \left( g_k(t) + \sigma_{k-1} \tilde{u}_{k-1} \text{sat} \left( \frac{g_k(t)}{\tilde{u}_{k-1}} \right) \right), \\ \dot{g}_k(t) &= \hat{u}_k(t) - \mu g_k(t), \\ \hat{u}_k(t) &= \frac{1}{1 + \sigma_k} \left( u_c(t) + \sigma_k \tilde{u}_k \text{sat} \left( \frac{u_c(t)}{\tilde{u}_k} \right) \right), \end{aligned}$$

где  $\sigma_i > 0$  – коэффициенты, выбираемые разработчиком из условия нахождения сигналов  $\hat{u}_i(t)$  в соответствующих множествах  $[-\bar{u}_i, \bar{u}_i]$ ,  $0 < \tilde{u}_i < \bar{u}_i$ ,  $i = 0, \dots, k$ ;  $\mu > 0$  – достаточно малое число;  $u_c(t)$  – функция, необходимая для компенсации параметрической неопределенности и внешнего возмущения в (1). В (7) слагаемые  $\mu g_i(t)$  необходимы для предотвращения возможного неограниченного роста функции  $g_i(t)$  при насыщении сигналов  $\hat{u}_i(t)$ .

Из (7) видно, что при  $\sigma_i < \infty$  функция  $|\hat{u}_i(t)|$  может принимать значения больше, чем  $\tilde{u}_i$ . Однако при  $\sigma_i \rightarrow \infty$  следует, что  $\hat{u}_k(t) \rightarrow \tilde{u}_k \text{sat}\left(\frac{u_c(t)}{\tilde{u}_k}\right)$  и  $\hat{u}_{i-1}(t) \rightarrow \tilde{u}_{i-1} \text{sat}\left(\frac{g_i(t)}{\tilde{u}_{i-1}}\right)$ .  
 Значит, при достаточно больших  $\sigma_i$  величину  $\tilde{u}_i$  можно выбирать достаточно близкой к  $\bar{u}_i$ . Так, при  $\tilde{u}_i = \bar{u}_i$  и  $\sigma_i \rightarrow \infty$  следует, что  $\hat{u}_k(t) \rightarrow \bar{u}_k \text{sat}\left(\frac{u_c(t)}{\bar{u}_k}\right)$  и  $\hat{u}_{i-1}(t) \rightarrow \bar{u}_{i-1} \text{sat}\left(\frac{g_i(t)}{\bar{u}_{i-1}}\right)$ .  
 В дальнейшем будут получены условия выбора величин  $\sigma_i$  для обеспечения  $|\hat{u}_i(t)| \leq \bar{u}_i$ .

Дополнительно отметим, что в (7) коэффициенты  $\sigma_i$  можно выбирать из условия  $\sigma_i \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$ . Однако ради простоты синтеза системы управления положим в (7)  $\sigma_i > 0$ .

#### 4. Алгоритм компенсации возмущений

Перепишем (7) в виде

$$\begin{aligned}
 \hat{u}_0(t) &= g_1(t) + \sigma_0 \left[ \tilde{u}_0 \text{sat}\left(\frac{g_1(t)}{\tilde{u}_0}\right) - \hat{u}_0(t) \right], \\
 \dot{g}_1(t) &= \hat{u}_1(t) - \mu g_1(t), \\
 \hat{u}_1(t) &= g_2(t) + \sigma_1 \left[ \tilde{u}_1 \text{sat}\left(\frac{g_2(t)}{\tilde{u}_1}\right) - \hat{u}_1(t) \right], \\
 (8) \quad \dot{g}_2(t) &= \hat{u}_2(t) - \mu g_2(t), \\
 &\vdots \\
 \dot{g}_{k-1}(t) &= \hat{u}_{k-1}(t) - \mu g_{k-1}(t), \\
 \hat{u}_{k-1}(t) &= g_k(z) + \sigma_{k-1} \left[ \tilde{u}_{k-1} \text{sat}\left(\frac{g_k(t)}{\tilde{u}_{k-1}}\right) - \hat{u}_{k-1}(t) \right], \\
 \dot{g}_k(t) &= \hat{u}_k(t) - \mu g_k(t), \\
 \hat{u}_k(t) &= u_c(t) + \sigma_k \left[ \tilde{u}_k \text{sat}\left(\frac{u_c(t)}{\tilde{u}_k}\right) - \hat{u}_k(t) \right].
 \end{aligned}$$

Выразим в (8) функцию  $\hat{u}_0(t)$  через  $u_c(t)$  в виде

$$(9) \quad \hat{u}_0(t) = v(t) + w(t),$$

где

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t \dots \int_0^t u_c(z_1) dz_1 \dots dz_k, \\ w(t) &= \sigma_0 \left( \tilde{u}_0 \operatorname{sat} \left( \frac{g_1(t)}{\tilde{u}_0} \right) - \hat{u}_0(t) \right) + \\ (10) \quad &+ \sigma_k \int_0^t \dots \int_0^t \left( \tilde{u}_k \operatorname{sat} \left( \frac{u_c(z_1)}{\tilde{u}_k} \right) - \hat{u}_k(z_1) \right) dz_1 \dots dz_k + \\ &+ \sum_{i=1}^{k-1} \sigma_i \int_0^t \dots \int_0^t \left( \tilde{u}_i \operatorname{sat} \left( \frac{g_{i+1}(z_1)}{\tilde{u}_i} \right) - \hat{u}_i(z_1) \right) dz_1 \dots dz_i - \\ &- \mu \sum_{i=1}^{k-1} \int_0^t \dots \int_0^t g_i(z_1) dz_1 \dots dz_i. \end{aligned}$$

Принимая во внимание (4), (6), (9) и (10), составим уравнение для ошибки  $\varepsilon(t) = x(t) - x_m(t)$  в виде

$$(11) \quad \dot{\varepsilon}(t) = A_m \varepsilon(t) + B_m v(t) + B_m \varphi(t), \quad e(t) = L \varepsilon(t),$$

где  $\varphi(t) = \psi(t) - r(t) + w(t)$ . Для компенсации возмущений воспользуемся подходом [3, 4]. Согласно [3, 4], введем вспомогательный контур

$$(12) \quad \dot{\varepsilon}_a(t) = A_m \varepsilon_a(t) + B_m v(t), \quad e_a(t) = L \varepsilon_a(t), \quad \varepsilon_a(0) = 0,$$

где  $\varepsilon_a(t) \in R^n$ . С учетом (11) и (12) составим уравнение для рассогласования  $\zeta(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon_a(t)$  в виде

$$(13) \quad \dot{\zeta}(t) = A_m \zeta(t) + B_m \varphi(t), \quad z(t) = L \zeta(t).$$

Преобразуем уравнение (13) к форме «вход–выход»:

$$(14) \quad Q_m(p)z(t) = R_m(p)\varphi(t),$$

где  $Q_m(p)$ ,  $R_m(p)$  – линейные дифференциальные операторы, полученные при переходе от (13) к (14),  $p = d/dt$ . Выразив в (14) функцию  $\varphi(t)$  и подставив ее в (11), получим

$$(15) \quad \dot{\varepsilon}(t) = A_m \varepsilon(t) + B_m \left[ v(t) + \frac{Q_m(p)}{R_m(p)} z(t) \right].$$



Если бы  $(\gamma + k)$  производных сигнала  $y(t)$  были бы доступны измерению, то, принимая во внимание (15) и первое выражение из (10), закон компенсации возмущений формировался бы

в виде  $u_c(t) = -\frac{p^k Q_m(p)}{R_m(p)} z(t)$ . Однако из постановки задачи

производные сигнала  $y(t)$  недоступны измерению. Перепишем  $\lambda^k Q_m(\lambda) / R_m(\lambda)$  в виде  $\lambda^k Q_m(\lambda) / R_m(\lambda) = F(\lambda) + \tilde{Q}_m(\lambda) / R_m(\lambda)$ , где  $F(\lambda)$  и  $\tilde{Q}_m(\lambda)$  получены при выделении целой части в дробно-рациональной функции  $\lambda^k Q_m(\lambda) / R_m(\lambda)$ ,  $\deg F(\lambda) = \gamma + k$ ,  $\deg \tilde{Q}_m(\lambda) \leq m - 1$ . Тогда, принимая во внимание первое выражение из (10), закон компенсации возмущений  $u_c(t)$  зададим в виде

$$(16) \quad u_c(t) = -q^T \xi(t) - \frac{\tilde{Q}_m(p)}{R_m(p)} z(t),$$

где  $q$  – вектор, составленный из коэффициентов оператора  $F(p)$ , которые записаны в обратном порядке,  $\xi(t) = [\bar{z}(t), \dot{\bar{z}}(t), \dots, \bar{z}^{(\gamma+k)}(t)]^T$ ,  $\bar{z}^{(i)}(t)$  – оценка  $i$ -й производной сигнала  $z(t)$ . Вектор  $\xi(t)$  получен с помощью наблюдателя [5], который записан в форме

$$(17) \quad \dot{\xi}(t) = G_0 \xi(t) + D_0 (\bar{z}(t) - z(t)), \quad \bar{z}(t) = L \xi(t), \quad \xi(0) = 0,$$

где  $\xi(t) \in R^{\gamma+k+1}$ ,  $G_0 = \begin{bmatrix} 0 & I_{\gamma+k} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $I_{\gamma+k}$  – единичная матрица

порядка  $\gamma + k$ ,  $D_0 = -[d_1 \mu^{-1}, d_2 \mu^{-2}, \dots, d_{\gamma+k+1} \mu^{-\gamma-1}]^T$ ,  $d_1, \dots, d_{\gamma+k+1}$  выбираются из условия гурвицевости матрицы  $G = G_0 - [d_1, \dots, d_{\gamma+k+1}]^T L$ .

Перед формулировкой утверждения введем следующие обозначения:

$$\alpha_1 = \max_{\Xi} (|c_{01}|) \max_{\Xi} (\|A^k\|),$$

$$\alpha_2 = \max_{\Xi} (|c_{01}|) \max_{\Xi} \left| \sum_{i=0}^{k-1} A^i B \right| + \max_{\Xi} (c_{01}),$$

$$\alpha_3 = \max_{\Xi} (|c_{01}|) \max_{\Xi} \left| \sum_{i=0}^{k-1} A^i D \right| + \max_{\Xi} (c_{03}),$$

$$\bar{x}_m = \sup_t (|x_m(t)|), \quad \tilde{f} = [\bar{f}_0, \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_k].$$

**Утверждение.** Пусть выполнены условия предположений 1-3. Тогда существуют  $\mu > 0$  и  $\sigma_i > 0, i = 0, \dots, k$ , такие, что при  $\mu \leq \mu_0$  и

$$(18) \alpha_1 \bar{x}_m + \alpha_3 \tilde{f} + \bar{r} < (1 - \alpha_2 k) \tilde{u} \text{ и } \alpha_2 k > 1,$$

$$(19) |\varepsilon(0)| \leq \alpha_1^{-1} \left( (1 - \alpha_2 k) \tilde{u} - \alpha_1 \bar{x}_m - \alpha_3 \tilde{f} - \bar{r}_k \right),$$

система управления (7), (12), (16), (17) обеспечит выполнение целевого условия (5) и ограниченность всех сигналов в замкнутой системе.

Доказательство утверждения приведено в Приложении.

*Замечание.* Из доказательства утверждения следует, что система управления (7), (12), (16), (17) обеспечит выполнение условия (5) в момент времени  $T$  с точностью

$$(20) \delta = \sqrt{\lambda_{\min}^{-1}(P) \left[ \left( \varepsilon^T(0) P \varepsilon(0) - \mu_0 \alpha^{-1} \rho \right) e^{-\alpha T} + \mu_0 \alpha^{-1} \rho \right]},$$

где  $P = P^T > 0$  – решение уравнения  $A_m^T P + P A_m = -Q_1$ ,

$$Q_1 = Q_1^T > 0, \alpha = \min \left\{ \frac{\lambda_{\min}(R_1)}{\lambda_{\max}(P)}, \frac{\lambda_{\min}(R_2)}{\mu_0 \lambda_{\max}(H)} \right\}, \lambda_{\max}(\cdot) \text{ (} \lambda_{\min}(\cdot) \text{) –}$$

наибольшее (наименьшее) собственное число соответствующей матрицы,  $H = H^T > 0$  – решение уравнения  $G^T H + H G = -Q_2$ ,

$$Q_2 = Q_2^T > 0, \quad R_1 = Q_1 - 2\mu_0 P B_m q^T T \left( P B_m q^T T \right)^T,$$

$$T = \text{diag} \{ \mu^\gamma, \dots, \mu, 1 \}, \quad R_2 = Q_2 - 2H b b^T H, \quad \rho = 2 \sup_t \left\{ \zeta^{(\gamma+k+1)}(t) \right\}.$$

Оценки для коэффициентов  $\sigma_i$  рассчитываются с помощью следующих условий:

$$(21) \sigma_i \geq \frac{(2 + \mu_0) \tilde{u}}{\mu_0 (\bar{u} - \tilde{u})}, \quad i = 0, 1, \dots, k-1,$$

$$\sigma_k \geq \frac{\bar{u} + |q| \pi + \kappa \bar{c}_{01} \sqrt{\lambda_{\min}^{-1}(P) \left[ \left( \varepsilon^T(0) P \varepsilon(0) + \frac{\mu_0 \rho}{\alpha} \right) + \frac{\mu_0 \rho}{\alpha} \right]} + \kappa (\bar{c}_{01} \bar{x}_m + (2 + \bar{c}_{02}) \tilde{u} + \bar{c}_{03} \tilde{f} + \bar{r})}{\bar{u} - \tilde{u}}.$$

где  $\pi = \sup_t (|\xi(t)|)$ ,  $\kappa = \sup_{\omega} \left| \frac{\tilde{Q}_m(j\omega)}{Q_m(j\omega)} \right|$ ,  $j$  – мнимая единица.

Стоит отметить, что оценки (18)–(21) достаточно грубы из-за использования грубых оценок в доказательстве. Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим пример.

### 5. Пример

Рассмотрим объект управления, математическая модель которого имеет вид

$$(22) \quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix} g_0(u_0) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix} f(t),$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0]x(t), \quad x(0) = x_0.$$

Множество возможных значений  $\Xi$  задано следующими неравенствами:  $-1 \leq a_0 \leq 0,5$ ;  $-2,5 \leq a_1 \leq -2$ ;  $-0,5 \leq a_2 \leq 1$ ;  $1 \leq b \leq 1,9$ ;  $-1 \leq d \leq 1$ . На возмущение и его первую производную наложены следующие ограничения:  $\bar{f}_0 = 1$ ,  $\bar{f}_1 = 1$ . Дополнительно на входной сигнал объекта (22) наложены ограничения:

$$g_0(u_0) = 1,1 \text{sat} \left( \frac{u_0(t)}{1,1} \right) = \begin{cases} u_0(t), & |u_0(t)| \leq 1,1, \\ 1,1 \text{sgn}(u_0(t)), & |u_0(t)| > 1,1, \end{cases}$$

$$u_1(t) = \int_0^t g_2(u_2(z)) dz,$$

$$g_1(u_1) = 1,2 \text{sat} \left( \frac{u_1(t)}{1,21} \right) = \begin{cases} u_1(t), & |u_1(t)| \leq 1,21, \\ 1,21 \text{sgn}(u_1(t)), & |u_1(t)| > 1,21. \end{cases}$$

Выберем в (3)  $A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$ ,  $B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $x_{m0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,

$\bar{r}_0 = 1$  и  $\bar{r}_1 = 1$ . Цель управления состоит в синтезе алгоритма, обеспечивающего выполнение целевого условия (5).

Зададим  $\sigma_0 = \sigma_1 = 10^{10}$ ,  $\tilde{u}_0 = 1$ ,  $\tilde{u}_1 = 1,2$ ,  $\mu = 0,01$  и сформируем закон управления (7) в виде

$$(23) \quad \begin{aligned} \hat{u}_0(t) &= (1 + 10^{10})^{-1} (g_1(t) + 10^{10} \text{sat}(g_1(t))), \\ \dot{g}_1(t) &= \hat{u}_1(t) - 0,01g_1(t), \end{aligned}$$

$$\hat{u}_1(t) = (1 + 10^{10})^{-1} (u_c(t) + 10^{10} \cdot 1,2 \text{sat}(5u_c(t)/6)).$$

Согласно (12), вспомогательный контур определим уравнением

$$(24) \quad \dot{\varepsilon}_a(t) = A_m \varepsilon_a(t) + B_m \int_0^t u_c(z) dz, \quad \varepsilon_a(t) = [1 \quad 0 \quad 0] \varepsilon_a(t),$$

$$\varepsilon_a(0) = [0 \quad 0 \quad 0]^T.$$

Выберем  $d_1 = 3$ ,  $d_2 = 3$ ,  $d_3 = 1$  и сформируем уравнения наблюдателя (17) в виде

$$(25) \quad \begin{aligned} \dot{\xi}_1(t) &= \xi_2(t) - 4 \cdot 100 (\xi_1(t) - z(t)), \\ \dot{\xi}_2(t) &= \xi_3(t) - 6 \cdot 100^2 (\xi_1(t) - z(t)), \\ \dot{\xi}_3(t) &= \xi_4(t) - 6 \cdot 100^2 (\xi_1(t) - z(t)), \\ \dot{\xi}_4(t) &= -100^3 (\xi_1(t) - z(t)), \\ \xi(0) &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T. \end{aligned}$$

Принимая во внимание уравнения (25) и структуры  $A_m$ ,  $B_m$  и  $L$ , сформируем закон компенсации возмущений  $u_c(t)$  в виде

$$(26) \quad u_c(t) = -\dot{\xi}_4(t) - 3\xi_4(t) - 3\xi_3(t) - \xi_2(t).$$

Теперь воспользуемся условиями (18) и (19) для задания остальных параметров в замкнутой системе. Принимая во внимание множество  $\Xi$  и параметры эталонной модели (3), перепишем условия (14) и (15) в виде  $\tilde{f} + \bar{r} + 2\sqrt{6}\bar{x}_m < 0,1$  и  $|x(0)| \leq 0,5 \cdot 6^{-0,5} (0,1 - \tilde{f} - \bar{r} - 2\sqrt{6}\bar{x}_m)$ . Отметим, что для выбранных значений  $\sigma_0$  и  $\sigma_1$  оценки (21) выполнены. Как отмечалось, полученные оценки достаточно грубые. Результаты моделирования показали, что система управления будет работоспособной, например, при  $\bar{r} = 1,2$ ,  $\bar{x}_m = 0,6$ ,  $\tilde{f} = 0,4$ ,  $|x(0)| \leq 0,07\sqrt{3}$ . Покажем работоспособность системы

управления (23)–(26) для следующих параметров объекта (22) и эталонной модели (4):  $a_0 = -1$ ,  $a_1 = -3$ ,  $a_2 = 1$ ,  $b = 1$ ,  $d = 1$ ,  $f(t) = 0,2 + 0,2\sin 0,7t$ ,  $x(0) = 0,07 \cdot [1 \ 1 \ 1]^T$  и  $r(t) = 0,2 + \sin t$ . На рис. 1 представлены результаты моделирования по ошибке  $e(t)$  и сигналам управления  $\hat{u}_1(t)$  и  $\hat{u}_0(t)$ .

Анализ результатов моделирования показал, что замкнутая система робастна по отношению к внешним возмущениям и параметрической неопределенности из заданного класса  $\Xi$ . Так, из рис. 1 следует, что в системе управления динамическая ошибка не превышает значения 0,65 начиная с момента времени 5 с. Из рис. 1 видно, что сигналы  $\hat{u}_1(t)$  и  $\hat{u}_0(t)$  находятся в отрезках  $[-1,2; 1,2]$  и  $[-1; 1]$  соответственно. Без использования алгоритма (23) (т.е. как и в [4]: при  $\hat{u}_0(t) = \int_0^t u_c(s)ds$ ) сигналы  $\hat{u}_0(t)$  и  $u_c(t)$  в начальный момент времени достигают значений  $-1,5 \cdot 10^4$  и  $-8 \cdot 10^6$  соответственно, а начиная с 10 с функции  $\hat{u}_0(t)$  и  $u_c(t)$  находятся в отрезке  $[-1,3; 1,3]$  соответственно, что недопустимо по условию задачи.

Отметим, что данный пример был проверен для алгоритма из [19]. Однако в [19] для синтеза закона управления используется не принцип компенсации, а принцип подавления возмущений, что зачастую требует больше ресурсов управляющего устройства. В результате для алгоритма [19] не удалось подобрать параметры, чтобы обеспечить устойчивость замкнутой системы.

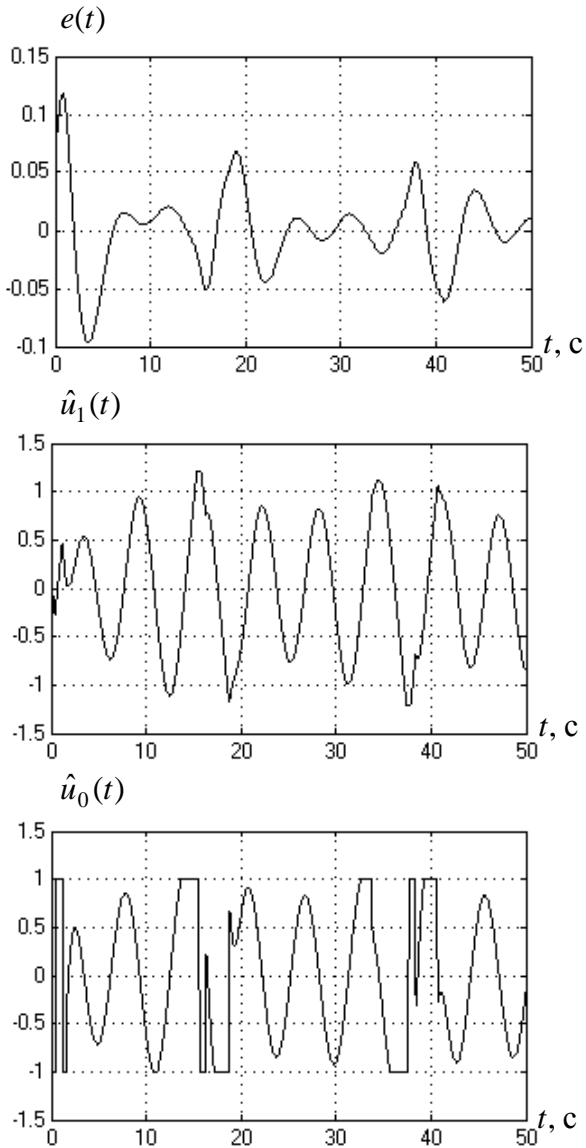


Рис. 1. Переходные процессы по  $e(t)$ ,  $\hat{u}_1(t)$  и  $\hat{u}_0(t)$

## 6. Заключение

В статье приведен синтез системы управления для линейного объекта в условиях параметрической неопределенности, внешних ограниченных возмущений, насыщения регулируемой переменной и ее производных. Предложен способ формирования сигнала управления, обеспечивающего нахождение функции управления и ее производных в заданных множествах. Получены условия на параметры объекта управления, внешнего возмущения, эталонной модели и регулятора при выполнении которых система управления будет работоспособной. Отметим, что алгоритм, учитывающий насыщение сигнала управления и его производных, является независимым, т.е. им можно дополнить любой из существующих алгоритмов.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения. Введем вектор  $\theta(t) = [z(t), \dot{z}(t), \dots, z^{(\gamma+k)}(t)]^T$ . Как и в [4], принимая во внимание (17), составим уравнение для ошибки оценки производных  $\eta(t) = T^{-1}(\xi(t) - \theta(t))$  в виде

$$(П.1) \quad \dot{\eta}(t) = \mu^{-1}G\eta(t) + bz^{(\gamma+k+1)}(t), \quad \bar{z}(t) - z(t) = \mu^{\gamma+k}L\eta(t),$$

где  $b = [0, \dots, 0, 1]^T$ . С учетом (16), преобразуем (15) к виду

$$(П.2) \quad \dot{\varepsilon}(t) = A_m\varepsilon(t) - B_mq^T T\eta(t).$$

Перепишем уравнения (8), (П.1) и (П.2) в виде системы

$$\dot{\varepsilon}(t) = A_m\varepsilon(t) - B_mq^T T\eta(t),$$

$$\mu_1\dot{\eta}(t) = G\eta(t) + \mu_2bz^{(\gamma+k+1)}(t),$$

$$(П.3) \quad \hat{u}_0(t) = g_1(t) + \sigma_0 \left( \tilde{u}_0 \text{sat} \left( \frac{g_1(t)}{\tilde{u}_0} \right) - \hat{u}_0(t) \right),$$

$$\dot{g}_1(t) = \hat{u}_1(t) - \mu_2g_1(t),$$

⋮

$$\begin{aligned} \dot{g}_{k-1}(t) &= \hat{u}_{k-1}(t) - \mu_2 g_{k-1}(t), \\ \hat{u}_{k-1}(t) &= g_k(z) + \sigma_{k-1} \left( \tilde{u}_{k-1} \operatorname{sat} \left( \frac{g_k(t)}{\tilde{u}_{k-1}} \right) - \hat{u}_{k-1}(t) \right), \\ \dot{g}_k(t) &= \hat{u}_k(t) - \mu_2 g_k(t), \\ \hat{u}_k(t) &= u_c(t) + \sigma_k \left( \tilde{u}_k \operatorname{sat} \left( \frac{u_c(t)}{\tilde{u}_k} \right) - \hat{u}_k(t) \right), \end{aligned}$$

где  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ . Воспользуемся вспомогательной леммой [2, 13, 14].

Лемма. Если динамическая система описывается уравнением

$$(П.4) \quad \dot{x}(t) = f(x(t), t, \mu_1, \mu_2), \quad x(t) \in R^n, \quad \mu_1 > 0, \quad \mu_2 > 0,$$

где  $f(x, t, \mu_1, \mu_2)$  – непрерывная функция, липшицева по  $x$ , и при  $\mu_2 = 0$  имеет ограниченную замкнутую область диссипативности

$$(П.5) \quad \Omega_x = \{x : P(x) \leq C\},$$

где  $P(x)$  – непрерывная, кусочно-гладкая, положительно определенная функция в  $R^n$ , такая, что при некоторых  $C_1 > 0$  и  $\mu_0 > 0$  выполнено условие

$$\sup_{\mu_1, \mu_2 \leq \mu_0} \left\langle \left[ \frac{\partial P(x)}{\partial x} \right]^T, f(x, t, \mu_1, 0) \right\rangle \leq -C_1, \quad \text{при } P(x) = C,$$

тогда для всех достаточно малых  $\mu_1 \leq \mu_0$  и  $\mu_2 \leq \mu_0$  множество (П.5) остается областью диссипативности системы (П.4).

Лемма является обобщение первой леммы В.А. Брусина [1] для неавтономных систем. Доказательство леммы приведено в [13]. Проверим условия леммы для системы (П.3). Для этого рассмотрим (П.3) при  $\mu_2 = 0$ :



$$\begin{aligned}
 \dot{\varepsilon}(t) &= A_m \varepsilon(t) - B_m q^T T \eta(t), \\
 \dot{\eta}(t) &= \mu_1^{-1} G \eta(t), \\
 \hat{u}_0(t) &= g_1(t) + \sigma_0 \left( \tilde{u}_0 \operatorname{sat} \left( \frac{g_1(t)}{\tilde{u}_0} \right) - \hat{u}_0(t) \right), \\
 \dot{g}_1(t) &= \hat{u}_1(t), \\
 \text{(П.6)} \quad &\vdots \\
 \dot{g}_{k-1}(t) &= \hat{u}_{k-1}(t), \\
 \hat{u}_{k-1}(t) &= g_k(z) + \sigma_{k-1} \left( \tilde{u}_{k-1} \operatorname{sat} \left( \frac{g_k(t)}{\tilde{u}_{k-1}} \right) - \hat{u}_{k-1}(t) \right), \\
 \dot{g}_k(t) &= \hat{u}_k(t), \\
 \hat{u}_k(t) &= u_c(t) + \sigma_k \left( \tilde{u}_k \operatorname{sat} \left( \frac{u_c(t)}{\tilde{u}_k} \right) - \hat{u}_k(t) \right).
 \end{aligned}$$

Так как компенсация неопределенностей осуществляется в последнем уравнении (П.6), то рассмотрим случай, когда  $|p^k \varphi(t)| \leq \tilde{u}$  и  $|u_c(t)| \leq \tilde{u}$ , где  $\tilde{u} = \min\{\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_k\}$ . В этом случае насыщения в сигналах управления  $\hat{u}_i(t)$  не будет, следовательно,  $w(t) = 0$ . Тогда из (П.6) имеем 
$$\hat{u}_0(t) = \int_0^t \dots \int_0^t u_c(z_1) dz_1 \dots dz_k.$$
 Первые два уравнения (П.6)

асимптотически устойчивы в силу гурвицевости матриц  $A_m$  и  $G$ . Из (4) и ограниченности  $\varepsilon(t)$  следует ограниченность  $|x(t)|$ , а из ограниченности  $\eta(t)$  и уравнения (17) следует ограниченность  $\xi(t)$ . Тогда из (16) следует ограниченность функции  $u_c(t)$ , а из (15) следует ограниченность  $v(t)$ , а, следовательно, и ограниченность  $\hat{u}_0(t)$ . Тогда из (П.6) следует ограниченность функций  $\hat{u}_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Найдем теперь множество притяжения для системы (П.6). Принимая во внимание структуру функции  $\varphi(t)$  и уравнение (1), найдем  $p^k \varphi(t)$  в виде

$$(П.7) \quad p^k \varphi(t) = c_{01}^T \left[ A^k x(t) + \sum_{i=0}^{k-1} \left( A^i B \hat{u}_0^{(k-1-i)}(t) + A^i D f^{(k-1-i)}(t) \right) \right] + c_{02} \hat{u}_0^{(k)}(t) + c_{03} f^{(k)}(t) - r^{(k)}(t).$$

Подставив (П.7) в условие  $|p^k \varphi(t)| \leq \tilde{u}$ , получим

$$(П.8) \quad \left| c_{01}^T \left[ A^k x(t) + \sum_{i=0}^{k-1} \left( A^i B \hat{u}_0^{(k-1-i)}(t) + A^i D f^{(k-1-i)}(t) \right) \right] + c_{02} \hat{u}_0^{(k)}(t) + c_{03} f^{(k)}(t) - r^{(k)}(t) \right| \leq \tilde{u}.$$

Найдем верхнюю оценку для левой части (П.8) в виде

$$(П.9) \quad \left| c_{01}^T \left[ A^k x(t) + \sum_{i=0}^{k-1} \left( A^i B \hat{u}_0^{(k-1-i)}(t) + A^i D f^{(k-1-i)}(t) \right) \right] + c_{02} \hat{u}_0^{(k)}(t) + c_{03} f^{(k)}(t) - r^{(k)}(t) \right| \leq \alpha_1 |\varepsilon(t)| + \alpha_1 \bar{x}_m + \alpha_2 k \tilde{u} + \alpha_3 \tilde{f} + \bar{r}_k.$$

Подставив оценку (П.9) в левую часть (П.8), потребуем выполнение условий (18) и (19). Тогда при выполнении (18) и (19) следует, что  $\dot{V}(t) \leq 0$  и цель управления (5) будет достигнута и условия леммы будут выполнены. Однако из асимптотической устойчивости (П.6) при  $\mu_2 = 0$  не следует асимптотическая устойчивость (П.3) при  $\mu_2 \neq 0$ . Поэтому рассмотрим случай, когда  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ . Для системы (П.3) рассмотрим функцию Ляпунова  $V(t) = V(\varepsilon(t), \eta(t))$  в виде

$$(П.10) \quad V(t) = \varepsilon^T(t) P \varepsilon(t) + \eta^T(t) H \eta(t).$$

Возьмем производную от (П.10) вдоль траекторий первых двух уравнений (П.3):

$$(П.11) \quad \dot{V}(t) = -\varepsilon^T(t) Q_1 \varepsilon(t) - 2\varepsilon^T(t) P B_m q^T T \eta(t) - \mu_0^{-1} \eta^T(t) Q_2 \eta(t) + 2\eta^T(t) H b z^{(\gamma+k+1)}.$$

Воспользуемся оценками:

$$(П.12) \quad \begin{aligned} & 2\varepsilon^T(t) P B_m q^T T \eta(t) \leq \\ & \leq 2\mu_0 \varepsilon^T(t) P B_m q^T T (P B_m q^T T)^T \varepsilon(t) + \mu_0^{-1} \eta(t), \\ & 2\eta^T(t) H b z^{(\gamma+k+1)}(t) \leq 2\mu_0^{-1} \eta^T(t) H b b^T H \eta(t) + 2\mu_0 \rho. \end{aligned}$$

С учетом (П.12), оценим (П.11) в виде

$$(П.13) \quad \dot{V}(t) = -\varepsilon^T(t)R_1\varepsilon(t) - \mu_0^{-1}\eta^T(t)R_2\eta(t) + \mu_0\rho.$$

Перепишав (П.13) в виде  $\dot{V}(t) \leq -\alpha V(t) + \mu_0\rho$  и решив его относительно  $V(t)$ , получим

$$(П.14) \quad V(t) \leq \left(V(0) - \mu_0\alpha^{-1}\rho\right)e^{-\alpha t} + \mu_0\alpha^{-1}\rho.$$

Тогда

$$(П.15) \quad \begin{aligned} |e(t)| &\leq |\varepsilon(t)| \leq \\ &\leq \sqrt{\lambda_{\min}^{-1}(P) \left[ \left( \varepsilon^T(0)P\varepsilon(0) - \mu_0\alpha^{-1}\rho \right) e^{-\alpha t} + \mu_0\alpha^{-1}\rho \right]}. \end{aligned}$$

Из (5) и (П.15) следует (20).

Теперь определим оценку для коэффициентов  $\sigma_i$ , при которых  $|\hat{u}_i(t)| \leq \bar{u}$ , где  $\bar{u} = \min\{\bar{u}_i\}$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$ . Оценим последнее выражение (7) в виде неравенства  $|u_c(t)| + \sigma_k \tilde{u} \leq (1 + \sigma_k)\bar{u}$  и разрешим его относительно  $\sigma_k$ :

$$\sigma_k \geq \frac{\bar{u} - |u_c(t)|}{\bar{u} - \tilde{u}}.$$

Оценим сверху числитель правой части

последнего неравенства в виде

$$(П.16) \quad \begin{aligned} \bar{u} - |u_c(t)| &\leq \bar{u} + |u_c(t)| \leq \bar{u} + |q|\pi + \kappa|\varphi(t)| \leq \\ &\leq \bar{u} + |q|\pi + \\ &+ \kappa \left( c_{01}^T \varepsilon(t) + c_{01}^T x_m(t) + (1 + c_{02})g_0(u_0) - \hat{u}_0(t) + c_{03}f(t) + |r(t)| \right) \leq \\ &\leq \bar{u} + |q|\pi + \kappa \bar{c}_{01} |\varepsilon(t)| + \kappa \left( \bar{c}_{01} \bar{x}_m + (2 + \bar{c}_{02})\bar{u} + \bar{c}_{03} \bar{f} + \bar{r} \right). \end{aligned}$$

Принимая во внимание (П.15) и (П.16), получим вторую оценку (21). С учетом того, что  $|\hat{u}_i(t)| \leq \bar{u}$ , оценим  $\sigma_i$  в (7) в виде

$$\sigma_i \geq \frac{g_{i+1}(t) - \bar{u}}{\bar{u} - \tilde{u}}, \quad i = 0, 1, \dots, k.$$

Найдем оценки решений

неравенств  $\dot{g}_{i+1}(t) \leq \bar{u} - \mu_0 g_{i+1}(t)$ , полученных из (7), в виде  $g_{i+1}(t) \leq 2\bar{u} / \mu_0$ ,  $i = 0, 1, \dots, k-1$ . Объединив полученные результаты получим первую оценку в (21).

Очевидно, что оценки (18)–(21) достаточно грубые, но из них видно, что существуют определенные значения параметров объекта, эталонной модели и регулятора, при которых в условиях ограничений можно обеспечить выполнение условия (5).

## Литература

1. БРУСИН В.А. *Об одном классе сингулярно возмущенных адаптивных систем. I* // Автоматика и телемеханика. – 1995. – №4. – С. 119–127.
2. ФУРТАТ И.Б. *Робастное управление определенным классом неминимально-фазовых динамических сетей* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2014. – №1. – С. 35–48.
3. ФУРТАТ И.Б. *Динамическая компенсация возмущений в условии насыщения сигнала управления* // Управление большими системами. – 2017. – Вып. 65. – С. 24–40.
4. ЦЫКУНОВ А.М. *Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений* // Автоматика и телемеханика. – 2007. – №7. – С. 103–115.
5. ATASSI A.N., KHALIL H.K. *A separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 1999. – Vol. 44, No. 9. – P. 1672–1687.
6. BARBU C., GALEANI S., TEEL A., ZACCARIAN L. *Nonlinear anti-windup for manual flight control* // Int. J. of Control. – 2005. – Vol. 78, No. 14. – P. 1111–1129.
7. BATEMAN A., LIN Z. *An analysis and design method for discrete-time linear systems under nested saturation* // IEEE Trans. Automat. Control. – 2002. – Vol. 47. – P. 1305–1310.
8. BATEMAN A., LIN Z. *An analysis and design method for linear systems under nested saturation* // Systems Control Lett. – 2003. – Vol. 48. – P. 41–52.
9. BENZAOUIA A., MESQUINE F., BENHAYOUN M. *Saturated Control of Linear Systems*. – Springer International Publishing, 2018. – 226 p.
10. BERG J., HAMMETT K., SCHWARTZ C., BANDA S. *An analysis of the destabilizing effect of daisy chained rate-limited actuators* // IEEE Trans. Control Systems Technology. – 1996. – Vol. 4. – P. 171–176.
11. CHEN P., SHAMMA J.S. *Gain-scheduled  $H_1$ -optimal control for boiler-turbine dynamics with actuator saturation* // J. Process Control. – 2004. – Vol. 14. – P. 263–277.

12. FREEMAN R., PRALY L. *Integrator backstepping for bounded controls and control rates* // IEEE Trans. Automat. Control. – 1998. – Vol. 43, No. 2. – P. 258–262.
13. FURTAT I., FRADKOV A., TSYKUNOV A. *Robust synchronization of linear dynamical systems with compensation of disturbances* // Int. J. Robust and Nonlinear Control. – 2014. – Vol. 24, No. 17. – P. 2774–2784.
14. FURTAT I.B. *Robust Control for a Specific Class of Non-Minimum Phase Dynamical Networks* // Int. J. of Computer and Systems Sciences. – 2014. – Vol. 53, No. 1. – P. 33–46.
15. HARDT M., HELTON W., KREUTZ-DELGADO W. *Numerical solution of nonlinear  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems with application to jet engine compressors* // IEEE Trans. Automat. Control. – 2000. – Vol. 8, No. 1. – P. 98–111.
16. JABBARI F., KOSĚ I. *Rate and magnitude-bounded actuators: scheduled output feedback design* // Int. J. of Robust and Nonlinear Control. – 2004. – Vol. 14. – P. 1169–1184.
17. KAPILA V., PAN H., DE QUEIROZ M. *LMI-based control of linear systems with actuator amplitude and rate nonlinearities* // Proc. 38th IEEE Conf. on Decision and Control. – 1999. – P. 1413–1418.
18. KRSTIC M., KRUPADANAM A., JACOBSON C. *Self-tuning control of a nonlinear model of combustion instabilities* // IEEE Trans. Automat. Control. – 1999. – Vol. 7. – P. 424–436.
19. LEONESSA A., HADDAD W.M., HAYAKAWA T., MOREL Y. *Adaptive control for nonlinear uncertain systems with actuator amplitude and rate saturation constraints* // Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing. – 2009. – Vol. 23. – P. 73–96.
20. MEGRETSKI A. *New IQC for quasi-concave nonlinearities* // Proc. of American Control Conf. – 1999. – P. 2380–2385.
21. MILLER R., PACHTER M. *Manual flight control with saturating actuators* // IEEE Control Systems. – 1998. – Vol. 18, No. 1. – P. 10–19.
22. SABERI A., STOORVOGEL A., SANNUTI P. *Control of Linear Systems with Regulation and Input Constraints*. – London: Springer, 2000.

23. SHIFRIN C.A. *Sweden seeks cause of gripen crash* // Aviation Week and Space Tech. – 1993. – Vol. 139. – P. 78–79.
24. TARBOURIECH S., GARCIA G., GOMES DA SILVA JR. J.M., QUEINNEC I. *Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators*. – Springer London, Dordrecht, Heidelberg, New York, 2011. – 425 p.
25. TEEL A., BUFFINGTON J. *Anti-windup for an F-16's daisy chain control allocator* // Proc. AIAA GNC Conf., New Orleans, LA, USA, 1997. – P. 748–754.
26. TYAN F., BERNSTEIN D. *Dynamics output feedback compensation for linear systems with independent amplitude and rate saturations* // Int. J. of Control. – 1997. – Vol. 67. – P. 89–116.
27. WANG Y., YEUNG S., MURRAY R. *Bifurcation control of rotating stall with actuator magnitude and rate limits: part II – Control synthesis and comparison with experiments* // Automatica. – 2002. – Vol. 38. – P. 611–625.

## CONTROL ALGORITHM UNDER SATURATION OF CONTROL SIGNAL AND ITS DERIVATIVES

**Igor Furtat**, Institute of Problems of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences, ITMO University, St. Petersburg, Doctor of Sciences (cainenash@mail.ru).

**Pavel Gushchin**, Institute of Problems of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences, ITMO University, St. Petersburg, Cand.Sc. (gushchin.p@mail.ru).

*Abstract: The synthesis of the control system under conditions of parametric uncertainties, bounded external disturbances, saturation of the control signal and its time derivatives is given. Such tasks are typical in the control of various kinds of technical systems. Ignoring uncertainties and constraints can lead to objective failure or loss of control system stability. For example, catastrophic consequences may occur in an aircraft's flight control system due to the saturation of the controlled signal and its derivative. Other examples are the control of jet engine compressors and the study of the behavior of the control plant with a slow drive. To solve the problem in the conditions of uncertainties and restrictions on the regulating signal a new method of design the control law is proposed, which allows to ensure the finding of the regulating signal and its derivatives in given sets. The principle of compensation of disturbances is used, which allowed to obtain*

*information about parametric uncertainty and external disturbances in the form of some function. To compensate these uncertainties a control signal is designed, the value of which is opposite to the value of perturbations. Thus, for control in the conditions of constraints on the control signal it is required to impose the corresponding constraints on the function containing information on these uncertainties. The conditions on the parameters of the plant, external disturbance, the reference model and the controller when performing the control system is feasible are obtained. The simulation results illustrate the performance of the proposed control scheme.*

**Keywords:** control under uncertainty, saturation of the control signal and its derivatives, compensation of disturbances.

УДК 519.7

ББК Ж 50

DOI: <https://doi.org/10.25728/ubs.2019.77.3>

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии П.В. Пакиным.*

*Поступила в редакцию 16.08.2018.*

*Опубликована 31.01.2019.*