

УДК 681.51

ББК Ж 50

**РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ
МУЛЬТИАГЕНТНЫМИ СИСТЕМАМИ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛЕВЫХ РАЗНОСТЕЙ
ДЛЯ ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДНЫХ¹**

Фуртат И. Б.²

*(Институт проблем машиноведения, Санкт-Петербург,
Университет ИТМО, Санкт-Петербург)*

Нехороших А. Н.³

(Университет ИТМО, Санкт-Петербург)

Предложен робастный алгоритм управления линейными мультиагентными системами в условиях параметрической и структурной неопределенности и внешнего неконтролируемого возмущения. Полученный алгоритм обеспечивает слежение выхода каждого агента за эталонными сигналами с заданной точностью. Приведены результаты моделирования, иллюстрирующие работоспособность алгоритма.

Ключевые слова: робастное управление, задержка, линейно-матричные неравенства (LMI), функционал Ляпунова–Красовского, дескрипторный метод.

¹ Результаты раздела 3 получены в ИПМаш РАН при поддержке РФФ (проект №14-29-00142). Результаты разделов 4 и 5 получены при поддержке гранта Президента Российской Федерации (договор №14.W01.16.6325-МД (МД-6325.2016.8)). Другие исследования частично поддержаны грантами РФФИ (№16-08-00282, №16-08-00686), МОН РФ (проект 14.Z50.31.0031) и Правительства РФ (074-U01).

² Игорь Борисович Фуртат, доктор технических наук, доцент (cainenash@mail.ru).

³ Артём Николаевич Нехороших, инженер (becks94@mail.ru).

1. Введение

Управление мультиагентными системами в условиях неопределенностей и измерения только выхода объекта является актуальной задачей современной теории и практики автоматического регулирования. Децентрализованная схема управления позволяет использовать опыт решения проблемы управления независимыми объектами. Для построения таких схем управления эффективными являются способы адаптивного и робастного управления, где на сегодняшний день предложено достаточно много решений. Если относительная степень объекта больше единицы, то для реализации адаптивных и робастных систем управления необходимы оценки производных входа и выхода объекта, для получения которых, как правило, используются различные динамические наблюдатели.

Для оценки вектора состояния модели объекта с известными параметрами при отсутствии внешнего возмущения широко используется наблюдатель Люенбергера [10]. В [9] предложен фильтр Калмана, оценивающий вектор состояния динамической системы при использовании ряда неполных и зашумленных измерений. В условиях параметрической неопределенности модели объекта и наличия внешних возмущений в [5] был предложен робастный наблюдатель с большим коэффициентом усиления (*high-gain observer*). Другой вид наблюдателя с большим коэффициентом усиления позже был рассмотрен в [1]. В [11, 12] предложен робастный наблюдатель на скользящем режиме (*sliding-mode observer*). В [8] разработан нелинейный наблюдатель расширенного состояния (*nonlinear extended state observer*), основанный на обобщении наблюдателя с большим коэффициентом усиления и наблюдателя на скользящем режиме. В [14] представлен обзор наблюдателей [5, 8, 10–12], примеры расчета и реализации для динамической системы второго порядка, а также приведен сравнительный анализ для каждого наблюдателя при различных видах неопределенностей (параметрическая неопределенность, внешние возмущения и шумы).

Робастные наблюдатели [1, 5, 8, 10–12] нашли широкое применение при синтезе систем управления в условиях неопре-

деленности. Например, в [13] строится закон управления с оценкой производных выхода объекта, которые реализуются с помощью динамического наблюдателя на скользящем режиме [11, 12], где порядок наблюдателя равен размерности вектора состояния модели объекта. В [4] для синтеза системы стабилизации нелинейных динамических объектов используется закон управления, зависящий от оценок производных выхода объекта, которые получены с помощью динамического наблюдателя с большим коэффициентом усиления [5] и порядком, равным размерности вектора состояния модели. В [1] синтезируется робастный закон управления по ошибке слежения, где для оценки производных сигнала ошибки слежения используется наблюдатель с динамическим порядком, равным $\gamma - 1$, где γ – относительная степень объекта управления. В [3] синтезирована робастная система управления с компенсацией внутренних и внешних возмущений с использованием вспомогательного контура. Для оценки производных сигнала, несущего в себе информацию о возмущениях объекта, в [3] используется динамический наблюдатель [5], порядок которого равен $\gamma - 1$.

В [2] предложен регулятор, где для оценки производных используется алгоритм с левыми разностями. В отличие от регуляторов, рассмотренных выше, алгоритм [2] обладает простой структурой, прост в расчете и реализации системы управления и доставляет замкнутой системе требуемые показатели качества. Простота регулятора [2] заключается в его последовательной структуре, т.е. отсутствии обратных связей, имеющих в регуляторах [1, 3–5, 8–13]. Простота реализации заключается в наличии только звеньев с запаздыванием в составе регулятора. Данные качества являются важными при построении системы управления большой группой объектов и позволяют значительно уменьшить общую сложность системы управления. Поэтому статья посвящена обобщению применения регулятора [2] на случай децентрализованного управления линейной мультиагентной системой.

В статье рассматривается построение робастной системы децентрализованного управления по выходу линейными динамическими мультиагентными системами в условиях параметри-

ческой и структурной неопределенности и действия внешних ограниченных возмущений. Для оценки производных в системе управления используются наблюдатели [2], основанные на левых разностях. Приведены результаты моделирования, иллюстрирующие работоспособность алгоритма.

2. Постановка задачи

Пусть динамические процессы каждого агента S_i системы S описываются уравнениями

$$(1) \quad Q_i(p)y_i(t) = k_i R_i(p)u_i(t) + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^N Y_{ij}(p)y_j(t) + f_i(t),$$

$$p^{k-1}y_i(0) = y_{i0k}, \quad k = 1, \dots, n_i, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

где $y_i(t) \in R$ – регулируемая переменная; $u_i(t) \in R$ – сигнал управления; $f_i(t) \in R$ – внешнее неконтролируемое ограниченное возмущение; $Q_i(p)$, $R_i(p)$, $Y_{ij}(p)$ – линейные дифференциальные операторы с неизвестными коэффициентами, $\deg Q_i(p) = n_i$, $\deg R_i(p) = m_i$, $\deg Y_{ij}(p) = n_{ij}$, $n_i > m_i$, $n_i > n_{ij}$, $n_j > n_{ij}$; $k_i > 0$; y_{i0k} – неизвестные начальные условия; $p = d/dt$ – оператор дифференцирования.

При решении задачи на агенты (1) наложены следующие ограничения.

Предположение 1. Неизвестные коэффициенты операторов $Q_i(p)$, $R_i(p)$, $Y_{ij}(p)$ и числа принадлежат известному ограниченному множеству возможных значений Ξ .

Предположение 2. Многочлены $R_i(\lambda)$ – гурвицевы, где λ – комплексная переменная.

Предположение 3. Доступны измерению сигналы $y_i(t)$ и $u_i(t)$, но не их производные.

Требуется спроектировать непрерывную систему управления, обеспечивающую слежение выхода каждого агента $y_i(t)$ за эталонным сигналом $y_{mi}(t)$ так, чтобы было выполнено целевое условие

$$(2) \quad |y_i(t) - y_{mi}(t)| < \delta \quad \text{при } t > T,$$

где $y_{mi}(t)$ – гладкая функция, ограниченная вместе со своими производными, $\delta > 0$, $T > 0$ – время, начиная с которого должно быть выполнено целевое условие (2).

3. Управление структурно определенными объектами

Сначала рассмотрим случай, когда порядки операторов $Q_i(p)$, $R_i(p)$, $Y_{ij}(p)$ известны. Принимая во внимание уравнения (1) и (2), сформируем ошибку слежения $e_i(t) = y_i(t) - y_{mi}(t)$ в виде

$$(3) \quad Q_i(p)e_i(t) = k_i R_i(p)u_i(t) + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^N Y_{ij}(p)y_j(t) + f_i(t) - Q_i(p)y_{mi}(t),$$

$$i, j = 1, \dots, N.$$

Из постановки задачи производные $y_i(t)$ и $u_i(t)$ не доступны измерению (предположение 3), тогда зададим закон управления в форме

$$(4) \quad u_i(t) = -\alpha_i \sum_{v=0}^{\gamma_i} d_{vi} \bar{e}_i^{(v)}(t), \quad i = 1, \dots, N,$$

где $\alpha_i > 0$, коэффициенты $d_{0i}, d_{1i}, \dots, d_{\gamma_i i}$ выбираются так, чтобы полиномы $D_i(\lambda) = d_{\gamma_i i} \lambda^{\gamma_i} + d_{(\gamma_i-1)i} \lambda^{\gamma_i-1} + \dots + d_{1i} \lambda + d_{0i}$ были гурвицевыми, $\gamma_i = n_i - m_i$ – относительная степень i -го агента, $\bar{e}_i^{(v)}(t)$ – оценка v -й производной сигнала $e_i(t)$.

Подставим (4) в (3) и перепишем (3) в виде

$$(5) \quad F_i(p)e_i(t) = \psi_i(t) + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^N Y_{ij}(p)e_j(t), \quad i, j = 1, \dots, N,$$

где $F_i(p) = Q_i(p) + \alpha_i k_i R_i(p) D_i(p)$,

$$\begin{aligned} \psi_i(t) = & f_i(t) - Q_i(p)y_{mi}(t) + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^N Y_{ij}(p)y_{mj}(t) + \alpha_i k_i R_i(p) \times \\ & \times \left(D_i(p)e_i(t) - \sum_{v=0}^{\gamma_i} d_{vi} \bar{e}_i^{(v)}(t) \right). \end{aligned}$$

Для реализации закона управления (4) воспользуемся выражениями

$$(6) \quad \begin{aligned} \bar{e}_i(t) &= e_i(t), \\ \bar{e}_i^{(1)}(t) &= \frac{\bar{e}_i(t) - \bar{e}_i(t-h)}{h}, \bar{e}_i^{(2)}(t) = \frac{\bar{e}_i^{(1)}(t) - \bar{e}_i^{(1)}(t-h)}{h}, \dots, \\ \bar{e}_i^{(\gamma_i)}(t) &= \frac{\bar{e}_i^{(\gamma_i-1)}(t) - \bar{e}_i^{(\gamma_i-1)}(t-h)}{h}, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Очевидно, что с помощью уравнений (6) можно оценить производные сигнала $e_i(t)$ с использованием левых разностей. Подставив (6) в (4), получим систему управления, представленную уравнением

$$(7) \quad u_i(t) = -\alpha_i \sum_{v=0}^{\gamma_i} \left[\frac{d_{vi}}{h^v} \sum_{j=0}^v (-1)^j C_v^j e(t-jh) \right], \quad i = 1, \dots, N,$$

где $C_v^j = \frac{v!}{j!(v-j)!}$ – биномиальные коэффициенты.

Перепишем функции $\psi_i(t)$ в виде суммы

$$(8) \quad \psi_i(t) = \alpha_i k_i R_i(p) g_i(t) + \varphi_i(t),$$

где $\varphi_i(t) = f_i(t) - Q_i(p) y_{mi}(t) + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^N Y_{ij}(p) y_{mj}(t)$,

$$g_i(t) = D_i(p) e_i(t) - \sum_{v=0}^{\gamma_i} d_{vi} \bar{e}_i^{(v)}(t).$$

Тогда уравнение (5) можно представить в виде

$$(9) \quad \begin{cases} \dot{\varepsilon}_i(t) = A_i \varepsilon_i(t) + \alpha_i k_i B_{1i} g_i(t) + B_{2i} \varphi_i(t) + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^N B_{3ij} \varepsilon_j(t), \\ e_i(t) = L_i \varepsilon_i(t), \quad i, j = 1, \dots, N, \end{cases}$$

где $\varepsilon_i(t) = [\varepsilon_{i1}(t), \varepsilon_{i2}(t), \dots, \varepsilon_{imi}(t)]$ – вектор последовательных производных ошибки $e_i(t)$, т.е. $\varepsilon_{ij}(t) = e_i^{(j-1)}(t)$, $j = 1, \dots, n_i$; $A_i, B_{1i}, B_{2i}, B_{3ij}, L_i = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$ – матрицы, полученные при переходе от (5) к (9).

Учитывая структуру выражения $g_i(t)$, (8) и управляющее воздействие (7), перепишем первое уравнение системы (9):

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} \dot{\varepsilon}_i(t) = -\alpha_i k_i B_{1i} \times \\ \quad \times \left[\sum_{v=0}^{\gamma_i} \frac{d_{vi}}{h^v} L_i \varepsilon_i(t) + \sum_{v=1}^{\gamma_i} \sum_{j=1}^v \frac{d_{vj}}{h^v} (-1)^j C_v^j L_i \varepsilon_i(t - jh) \right] + \\ \quad + A_i \varepsilon_i(t) + \alpha_i k_i B_{1i} \rho_i^T \varepsilon_i(t) + B_{2i} \varphi_i(t) + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^N B_{3ij} \varepsilon_j(t), \\ e_i(t) = L_i \varepsilon_i(t), i, j = 1, \dots, N, \end{array} \right.$$

где вектора ρ_i составлены из коэффициентов операторов $D_i(p)$.

Введем следующие обозначения:

$$\tilde{A}_i = A_i + \alpha_i k_i B_{1i} \rho_i^T - \alpha_i k_i B_{1i} \sum_{v=0}^{\gamma_i} \frac{d_{vi}}{h^v} L_i,$$

$$A = \text{diag} \{ \tilde{A}_1 \quad \tilde{A}_2 \quad \dots \quad \tilde{A}_N \},$$

$$\tilde{F}_{vj}^i = \begin{cases} -\alpha_i k_i B_{1i} \frac{d_{vj}}{h^v} (-1)^j C_v^j L_i, & \text{если } j \leq v \leq \gamma_i, \\ O, & \text{в противном случае} \end{cases},$$

$$F_{vj} = \text{diag} \{ \tilde{F}_{vj}^1 \quad \tilde{F}_{vj}^2 \quad \dots \quad \tilde{F}_{vj}^N \}, i, j = 1, \dots, N,$$

$$Y = \begin{bmatrix} O & B_{312} & \dots & B_{31N} \\ B_{321} & O & \dots & B_{32N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{3N1} & B_{3N2} & \dots & O \end{bmatrix},$$

$$B = \text{diag} \{ B_{21} \quad B_{22} \quad \dots \quad B_{2N} \},$$

$$\varepsilon(t) = [\varepsilon_1^T(t) \quad \varepsilon_2^T(t) \quad \dots \quad \varepsilon_N^T(t)]^T,$$

$$\varphi(t) = [\varphi_1^T(t) \quad \varphi_2^T(t) \quad \dots \quad \varphi_N^T(t)]^T,$$

где O – нулевая матрица соответствующей размерности. Тогда с учетом обозначений можно переписать систему (10)

$$(11) \quad \dot{\varepsilon}(t) = (A + Y)\varepsilon(t) + \sum_{v=1}^{\gamma_i} \sum_{j=1}^v F_{vj} \varepsilon(t - jh) + B\varphi(t).$$

Для формулировки главного результата введем еще следующие обозначения:

$$\Psi_{11}^{11} = P_2^T A_s + A_s^T P_2 + \sum_{v=1}^{\gamma} \sum_{j=1}^v S_{vj},$$

$$\Psi_{11}^{12} = P - P_2^T + A_s^T P_3,$$

$$\Psi_{11}^{22} = -P_3 - P_3^T + \sum_{v=1}^{\gamma} \sum_{j=1}^v jhR_{vj},$$

$$\Psi_{11} = \begin{bmatrix} \Psi_{11}^{11} & \Psi_{11}^{12} \\ * & \Psi_{11}^{22} \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{12} = \begin{bmatrix} P_2^T \sum_{v=1}^{\gamma} F_{v1} & 2P_2^T \sum_{v=1}^{\gamma} F_{v2} & \dots & \gamma P_2^T \sum_{v=1}^{\gamma} F_{v\gamma} \\ P_3^T \sum_{v=1}^{\gamma} F_{v1} & 2P_3^T \sum_{v=1}^{\gamma} F_{v2} & \dots & \gamma P_3^T \sum_{v=1}^{\gamma} F_{v\gamma} \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{13} = \begin{bmatrix} P_2^T B \\ O \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{22} = -he^{-2\chi h} \text{diag} \left\{ \sum_{v=1}^{\gamma} R_{v1}, 2 \sum_{v=1}^{\gamma} R_{v2}, \dots, \gamma \sum_{v=1}^{\gamma} R_{v\gamma} \right\},$$

$$\Psi_{33} = -\beta I,$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} \\ * & \Psi_{22} & O \\ * & * & \Psi_{33} \end{bmatrix},$$

где $\gamma = \max_{i=1, \dots, N} \{\gamma_i\}$; $A_s = A + Y + \sum_{v=1}^{\gamma_i} \sum_{j=1}^v F_{vj}$, $P > 0$, $P_2 > 0$, $P_3 > 0$, $S_{vj} > 0$,

$R_{vj} > 0$, $j \leq v = 1, \dots, \gamma$ – матрицы соответствующих размерностей; I – единичная матрица.

Утверждение 1. Выполнены условия предположений 1–3. Задано число $\chi > 0$. Если существуют $\beta > 0$ и матрицы $P > 0$, $P_2 > 0$, $P_3 > 0$, $S_{vj} > 0$, $R_{vj} > 0$, $j \leq v = 1, \dots, \gamma$, такие что матрица $\Psi < 0$, тогда система управления, представленная законом управления (7), обеспечивает выполнение целевого условия (2) с точностью в установившемся режиме

$$(12) \quad \delta = \Delta \sqrt{\frac{\beta}{2\chi\lambda_{\min}(P)}},$$

и ограниченность всех сигналов в замкнутой системе. В (12)

$$\Delta = \sqrt{\sup_t \{\varphi^T(t)\varphi(t)\}}.$$

Доказательство утверждения приведено в Приложении.

Отметим, что оценка (12), записанная в форме [6, 7], не зависит от h . Однако выражение (12) зависит от $\lambda_{\min}(P)$, где P является решением линейного матричного неравенства $\Psi(h) < 0$.

4. Управление структурно неопределенными объектами

Теперь рассмотрим случай, когда порядки операторов $Q_i(p)$, $R_i(p)$, $Y_{ij}(p)$ неизвестны. Для решения задачи на систему (1) дополнительно к предположениям 1–3 наложим следующее ограничение.

Предположение 4. Известны верхние оценки $\bar{\gamma}_i$ относительной степени γ_i , т.е. $\gamma_i \leq \bar{\gamma}_i$.

Цель управления состоит в выполнении условия (2).

Принимая во внимание уравнения (1) и (2), сформируем ошибку слежения $e_i(t) = y_i(t) - y_{mi}(t)$ в виде (3).

Зададим закон управления в форме

$$(13) \quad u_i(t) = -\alpha_i \sum_{v=0}^{\bar{\gamma}_i} d_{vi} \bar{e}_i^{(v)}(t), \quad i = 1, \dots, N,$$

где $\alpha_i > 0$, коэффициенты $d_{0i}, d_{1i}, \dots, d_{\bar{\gamma}_i i}$ выбираются так, чтобы полиномы $D_i(\lambda) = d_{\bar{\gamma}_i i} \lambda^{\bar{\gamma}_i} + d_{(\bar{\gamma}_i - 1)i} \lambda^{\bar{\gamma}_i - 1} + \dots + d_{1i} \lambda + d_{0i}$ были гурвицевыми. Подставив (13) в (3), получим уравнение вида (5). Очевидно, что всегда существуют числа α_i и полиномы $D_i(\lambda)$ такие, что полиномы $F_i(\lambda)$ будут гурвицевыми.

Для оценки производных сигнала $e_i(t)$ воспользуемся следующими уравнениями

$$\bar{e}_i(t) = e_i(t),$$

$$(14) \quad \bar{e}_i^{(1)}(t) = \frac{\bar{e}_i(t) - \bar{e}_i(t - k_1 h)}{k_1 h}, \bar{e}_i^{(2)}(t) = \frac{\bar{e}_i^{(1)}(t) - \bar{e}_i^{(1)}(t - k_2 h)}{k_2 h}, \dots,$$

$$\bar{e}_i^{(\bar{\gamma}_i)}(t) = \frac{\bar{e}_i^{(\bar{\gamma}_i - 1)}(t) - \bar{e}_i^{(\bar{\gamma}_i - 1)}(t - k_{\bar{\gamma}_i} h)}{k_{\bar{\gamma}_i} h}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Здесь $\bar{e}^{(i)}(t)$ – оценка i -й производной сигнала $e_i(t)$, $k_1 > k_2 > \dots > k_{\bar{\gamma}_i} > 0$. Уменьшение запаздывания в каждом последующем уравнении (14) необходимо для увеличения точности оценки каждой последующей производной.

Введем множество $\Theta_i = \{1, \dots, \bar{\gamma}_i\}$, $i = 1, \dots, N$. Подставив (14) в (13), получим

$$(15) \quad u_i(t) = -\alpha_i \left[d_{0i} e_i(t) + d_{1i} \frac{e_i(t) - e_i(t - k_1 h)}{k_1 h} + \dots + \right.$$

$$+ \frac{d_{\bar{\gamma}_i}}{h^{\bar{\gamma}_i} \prod_{i=1}^{\bar{\gamma}_i} k_i} \left(e_i(t) - \sum_{i_1 \in \Theta_i} e_i(t - k_{i_1} h) + \sum_{\substack{i_1, i_2 \in \Theta_i, \\ i_1 < i_2}} e_i(t - h(k_{i_1} + k_{i_2})) + \dots + \right.$$

$$\left. \left. + \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_{\bar{\gamma}_i} \in \Theta_i, \\ i_1 < i_2 < \dots < i_{\bar{\gamma}_i}}} e_i(t - h(k_{i_1} + k_{i_2} + \dots + k_{i_{\bar{\gamma}_i}})) \right) \right], \quad i = 1, \dots, N.$$

В результате уравнение замкнутой системы будет представлено выражением (9), где $A_i, B_{1i}, B_{2i}, B_{3ij}, L_i, = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$ – матрицы, полученные при переходе от (5) к (9).

Утверждение 2. Выполнены условия предположений 1–4. Существуют коэффициенты $\alpha_i > 0$, $k_1 > k_2 > \dots > k_{\bar{\gamma}_i} > 0$, $i = 1, \dots, N$ и число $h > 0$ такие что, система управления, представленная законом управления (13), обеспечивает выполнение целевого условия (2) и ограниченность всех сигналов в замкнутой системе.

Доказательство утверждения 2 подобно доказательству утверждения 1, поэтому здесь не приводится.

5. Примеры

1. Пусть динамические процессы каждого агента S_i системы S описываются уравнениями

$$(16) \begin{cases} (p^3 + q_{11}p^2 + q_{12}p + q_{13})y_1(t) = k_1(p + r_{11})u_1(t) + n_{12}y_2(t) + f_1(t), \\ (q_{20}p^2 + q_{21}p + q_{22})y_2(t) = k_2u_2(t) + n_{21}y_1(t) + f_2(t). \end{cases}$$

Множество Ξ определено следующими неравенствами

$$(17) \begin{cases} q_{20} = 1, & -3 \leq q_{1i} \leq 3, & -3 \leq q_{2j} \leq 3, & i = 1, 2, 3, & j = 1, 2, \\ 1 \leq k_1 \leq 3, & 1 \leq r_{11} \leq 5, & 1 \leq k_2 \leq 5, & 1 \leq n_{12} \leq 12, & 1 \leq n_{21} \leq 12. \end{cases}$$

Предположим, что $|f_1(t)| \leq 10$, $|f_2(t)| \leq 10$ и порядки операторов в (16) известны.

Пусть $d_2 = 10^{-5}$, $d_1 = 0,1$, $d_0 = 10$. Тогда управляющее воздействие (4) переписывается в виде

$$(18) \begin{aligned} u_i(t) = & -\alpha_i \left(10e_i(t) + 0,1 \frac{e_i(t) - e_i(t-h)}{h} + \right. \\ & \left. + 10^{-5} \frac{e_i(t) - 2e_i(t-h) + e_i(t-2h)}{h^2} \right) = \\ & = -\alpha_i h^2 \left([10h^2 + 0,1h + 10^{-5}]e_i(t) - [0,1h + 2 \cdot 10^{-5}]e_i(t-h) + \right. \\ & \left. + 10^{-5}e_i(t-2h) \right), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Пусть параметры в (16) заданы следующим образом

$$(19) \begin{cases} q_{11} = 3, & q_{12} = 3, & q_{13} = 3, & k_1 = 3, & r_{11} = 3, & n_{12} = 3, \\ f_1(t) = 1 + \sin(t), & y_1(0) = 1, & \dot{y}_1(0) = 1, & \ddot{y}_1(0) = 1; \\ q_{21} = 3, & q_{22} = 3, & k_2 = 3, & n_{21} = 3, & f_2(t) = 2 + 3\sin(3t), \\ y_2(0) = 1, & \dot{y}_2(0) = 1. \end{cases}$$

Положим, что эталонные сигналы заданы в виде $y_{m1}(t) = y_{m2}(t) = \sin(0,7t)$. На рис. 1 представлены результаты моделирования по ошибке $e_i(t) = y_i(t) - y_{mi}(t)$ при $\alpha_i = 25$ и $h = 0,05$, $i = 1, 2$. График для $e_1(t)$ изображен пунктирной кривой, график для $e_2(t)$ – непрерывной.

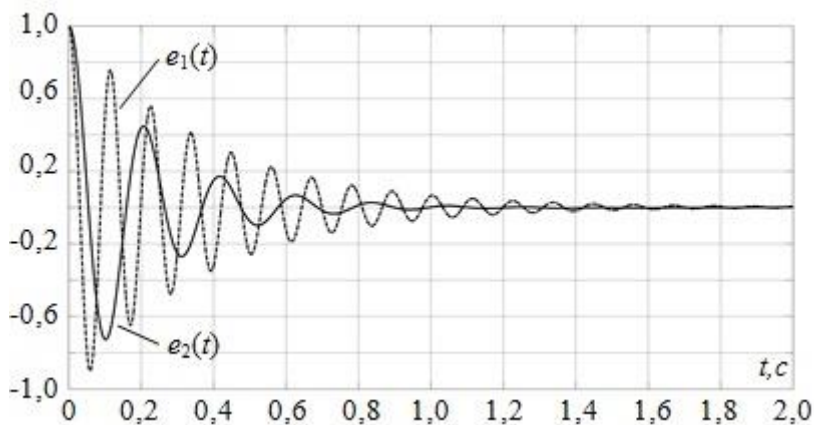


Рис. 1. Результаты моделирования по ошибке при $\alpha_i = 25$ и $h = 0,05$, $i = 1, 2$

Из рис. 1 видно, что заданная точность $\delta = 0,01$ достигается первой системой за время $t_1 = 1,68$ с, второй – за $t_1 = 1,05$ с.

На рис. 2 представлены результаты моделирования по ошибке $e_i(t) = y_i(t) - y_{mi}(t)$ при $\alpha_i = 25$ и $h = 0,01$, $i = 1, 2$.

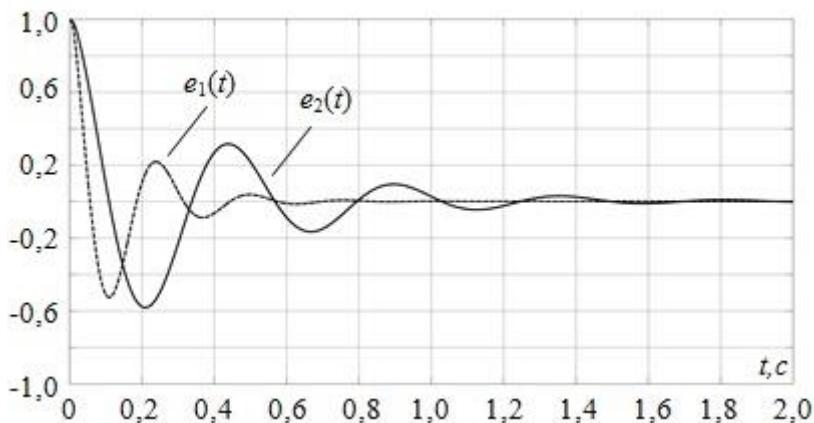


Рис. 2. Результаты моделирования по ошибке при $\alpha_i = 25$ и $h = 0,01$, $i = 1, 2$

Из рис. 2 видно, что заданная точность $\delta = 0,01$ достигается первой системой за время $t_1 = 0,33$ с, второй – за $t_2 = 0,91$ с. Таким образом, уменьшение времени h позволяет увеличить точность системы управления.

2. Пусть динамические процессы каждого агента S_i системы S описываются уравнениями (16), где $q_{20} = 0$ и $q_{21} = 1$. Предположим теперь, что порядки операторов в (16) неизвестны.

Пусть $\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2 = 2$. Положим, что $h = 0,01$, $k_1 = 1$, $k_2 = 0,1$, $d_2 = 10^{-5}$, $d_1 = 0,1$, $d_0 = 10$.

Тогда управляющее воздействие (4) переписывается в виде

$$\begin{aligned}
 u_i(t) &= -\alpha_i \left(10e_i(t) + 0,1 \frac{e_i(t) - e_i(t-h)}{h} + \right. \\
 (20) \quad & \left. + 10^{-5} \frac{e_i(t) - e_i(t-h) - e_i(t-0,1h) + e_i(t-1,1h)}{0,1h^2} \right) = \\
 & = -\alpha_i h^{-2} \left[[h^2 + 0,01h + 10^{-6}] e_i(t) - [0,01h + 10^{-5}] e_i(t-h) - \right. \\
 & \left. - 10^{-6} e_i(t-0,1h) + 10^{-6} e_i(t-1,1h) \right], \quad i = 1, 2.
 \end{aligned}$$

На рис. 3 представлены результаты моделирования по ошибке $e_i(t) = y_i(t) - y_{mi}(t)$ при $\alpha_i = 25$ и $h = 0,05$, $i = 1, 2$.

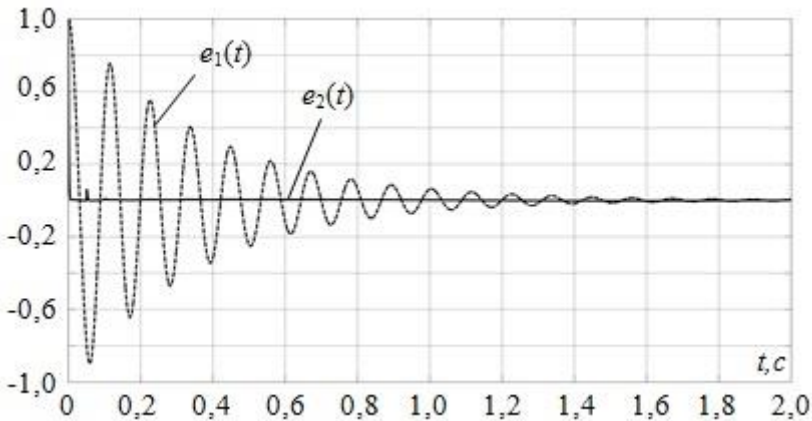


Рис. 3. Результаты моделирования по ошибке при $\alpha_i = 25$ и $h = 0,05$, $i = 1, 2$

Из рис. 3 видно, что заданная точность $\delta = 0,01$ достигается первой системой за время $t_1 = 1,68$ с, второй – за $t_2 = 0,10$ с.

На рис. 4 представлены результаты моделирования по ошибке $e_i(t) = y_i(t) - y_{mi}(t)$ при $\alpha_i = 25$ и $h = 0,01$, $i = 1, 2$.

Из рис. 4 видно, что заданная точность $\delta = 0,01$ достигается первой системой за время $t_1 = 0,33$ с, второй – за $t_2 = 0,04$ с. Таким образом, уменьшение времени h позволяет увеличить точность системы управления так же, как и в случае со структурно определенными объектами.

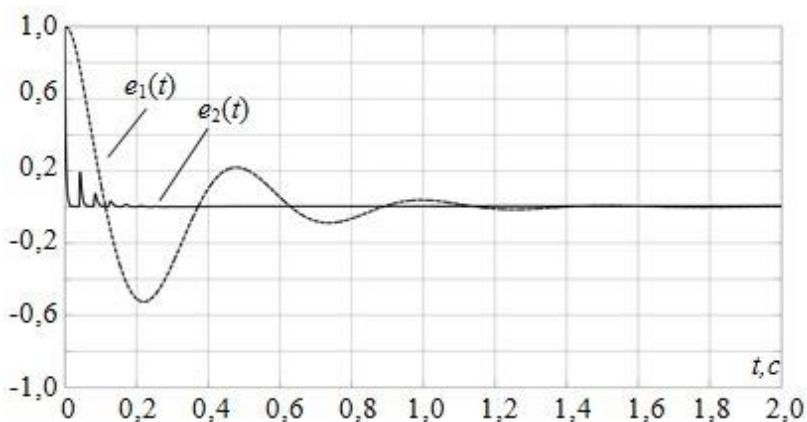


Рис. 4. Результаты моделирования по ошибке при $\alpha_i = 25$ и $h = 0,01$, $i = 1, 2$

6. Заключение

Предложено решение задачи робастного управления линейными динамическими мультиагентными системами в условиях параметрической и структурной неопределенности, а также внешних неконтролируемых ограниченных возмущений. В отличие от [1, 3–5, 8–14] в данной статье для оценки производных использовался наблюдатель, приближенное дифференцирование в котором осуществлялось с помощью левых разностей, что позволило сформировать систему управления, не содержащую динамических составляющих. Полученный алго-

ритм компенсирует неопределенности и возмущения с заданной точностью, зависящей от выбора коэффициентов полинома $D(p)$ и коэффициента α , а также величины параметра h , определяющего точность оценки производных сигнала $e(t)$. Так как предлагаемый алгоритм управления использует звенья с запаздыванием, то их практическая реализация может быть осуществлена, например, на базе ЭВМ с использованием специального программного обеспечения, например MatLab.

Литература

1. БОБЦОВ А.А. *Алгоритм робастного управления в задаче слежения за эталонным сигналом* // Автоматика и телемеханика. – 2003. – №6. – С. 104–113.
2. ФУРТАТ И.Б. *Робастный статический алгоритм управления линейными объектами* // Автоматика и телемеханика. – 2015. – №3 – С. 94–107.
3. ЦЫКУНОВ А.М. *Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений* // Автоматика и телемеханика. – 2007. – №7. – С. 103–115.
4. ATASSI A.N., KHALIL H.K. *A separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems* // IEEE Trans. Automat. Control. – 1999. – Vol. 44, №9. – P. 1672–1687.
5. ESFANDIARY F., KHALIL H.K. *Output feedback stabilization of fully linearizable systems* // Int. J. Control. – 1992. – Vol. 56, №5. – P. 1007–1037.
6. FRIDMAN E. *Introduction to Time-Delay Systems. Analysis and Control*. – Basel: Birkhauser, 2014. – 362 p.
7. FRIDMAN E. *Tutorial on Lyapunov-based methods for time-delay systems* // European Journal of Control. – 2014. – Vol. 20. – P. 271–283.
8. HAN J. *A class of extended state observers for uncertain system* // Control Decision. – 1995. – Vol. 10, №1. – P. 85–88.
9. KALMAN R.E. *A new approach to linear filtering and prediction problems* // Trans. ASME – J. Basic Engineer. – 1960. – №82 (Ser. D). – P. 35–45.

10. LUNBERGER D. *Observers for multivariable systems* // IEEE Trans. Automat. Control. – 1966. – Vol. AC-11, №2. – P. 190–197.
11. SLOTINE J.J.E., HEDRICK J.K., MISAWA E.A. *On sliding observers for nonlinear systems* // J. Dynam. Syst., Measurement, Control. – 1987. – Vol. 109. – P. 245–252.
12. UTKIN V.I. *Sliding modes in control and optimization*. – Berlin: Springer-Verlag, 1992 – 286 p.
13. VELUVOLU K.C., KIM M.Y., LEE D. *Nonlinear sliding mode high-gain observers for fault estimation* // Int. J. Syst. Sci. – 2011. – Vol. 42, №7. – P. 1065–1074.
14. WANG W., GAO Z. *A comparison study of advanced state observer design techniques* // Proc. Amer. Control Conf. – 2003. – P. 4754–4759.

Приложение

Доказательство утверждения 1. Для доказательства утверждения 1 воспользуемся вспомогательной леммой.

Лемма [2]. Рассмотрим динамическую систему, описываемую дифференциальным уравнением

$$(П.1) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + f(t) + g(x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_n), \mu),$$

где $x(t) \in R^n$, $A \in R^{n \times n}$ – гурвицева матрица, $x(t) \in R^n$ – ограниченная функция, $\tau_i > 0$ – время запаздывания, $i = 1, \dots, n$, $g(x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_n), \mu) \in R^n$ – непрерывная функция по совокупности аргументов за исключением, может быть, случая, когда $\mu = 0$, причем $g(x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_n), \mu) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow 0$ и $g(0, 0, \dots, 0, \mu) = 0$. Дополнительно функция $g(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица

$$(П.2) \quad \begin{aligned} & |g(x_1(t), x_1(t - \tau_1), \dots, x_1(t - \tau_n), \mu) - \\ & - g(x_2(t), x_2(t - \tau_1), \dots, x_2(t - \tau_n), \mu)| \leq \\ & \leq L_0(\mu) |x_1(t) - x_2(t)| + L_1(\mu) |x_1(t - \tau_1) - x_2(t - \tau_1)| + \\ & + \dots + L_n(\mu) |x_1(t - \tau_n) - x_2(t - \tau_n)|, \end{aligned}$$

где $L_0(\mu)$, $L_1(\mu)$, ..., $L_n(\mu)$ – липшицевы константы, причем $\lim_{\mu \rightarrow 0} L_i(\mu) \rightarrow 0$, $i = 1, \dots, n$.

Пусть $\bar{x}(t)$ – решение уравнения

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + f(t),$$

где $|\bar{x}(t)| < b < \infty$. Тогда существует $\mu_0 > 0$ такое, что при $\mu \leq \mu_0$ решение $x(t, \mu)$ исходной системы (П.1) удовлетворяет условию $|x(t, \mu)| \leq b$. Причем имеет место равномерный относительно t предельный переход

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} x(t, \mu) = \bar{x}(t).$$

Воспользуемся леммой для анализа системы (9). Из постановки задачи $f_i(t)$ – ограниченные функции, $y_{mi}(t)$ – гладкие ограниченные функции вместе со своими производными, следовательно, функции $\varphi_i(t)$ ограниченные, $i = 1, \dots, N$. Так как $e_i(t)$ – непрерывные функции, то согласно (6)

$$\bar{e}_i^{(1)}(t) \rightarrow p e_i(t), \quad \bar{e}_i^{(2)}(t) \rightarrow p^2 e_i(t), \dots, \quad \bar{e}_i^{(\gamma_i)}(t) \rightarrow p^{\gamma_i} e_i(t)$$

при $h \rightarrow 0, i = 1, \dots, N$.

Значит, $g(t) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Поскольку матрица A гурвицева, то для уравнения (9) будут выполнены условия леммы, а, значит, все переменные в системе (9) будут ограниченными.

Покажем теперь, что существует такое $h > 0$, при котором алгоритм (7) будет обеспечивать выполнение условия (2).

Воспользуемся дескрипторным методом [6, 7]. Используя соотношение $\varepsilon(t-h) = \varepsilon(t) - \int_{t-h}^t \dot{\varepsilon}(s) ds$, перепишем (11) в следующем виде:

$$(П.3) \quad \dot{\varepsilon}(t) = A_s \varepsilon(t) - \sum_{v=1}^{\gamma} \sum_{j=1}^v F_{vj} \int_{t-jh}^t \dot{\varepsilon}(s) ds + B \varphi(t).$$

Выберем функционал Ляпунова–Красовского в виде

$$(П.4) \quad V = \varepsilon^T(t) P \varepsilon(t) + \sum_{v=1}^{\gamma} \sum_{j=1}^v \int_{t-jh}^t e^{2\chi(s-t)} \varepsilon^T(s) S_{vj} \varepsilon(s) ds + \\ + \sum_{v=1}^{\gamma} \sum_{j=1}^v \int_{-jh}^0 \int_{t+\theta}^t e^{2\chi(s-t)} \dot{\varepsilon}^T(s) R_{vj} \dot{\varepsilon}(s) ds d\theta.$$

Продифференцируем функционал (П.4) вдоль траектории системы (П.3)

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= 2\varepsilon^T(t)P\dot{\varepsilon}(t) + 2[\varepsilon^T(t)P_2^T + \dot{\varepsilon}^T(t)P_3^T] \times \\
 &\times \left[-\dot{\varepsilon}(t) + A_3\varepsilon(t) - \sum_{v=1}^{\gamma} \sum_{j=1}^v F_{vj} \int_{t-jh}^t \dot{\varepsilon}(s)ds + B\varphi(t) \right] - \\
 &- 2\chi \sum_{v=1}^{\gamma} \sum_{j=1}^v \int_{t-jh}^t e^{2\chi(s-t)} \varepsilon^T(s) S_{vj} \varepsilon(s) ds + \varepsilon^T(t) \sum_{v=1}^{\gamma} \sum_{j=1}^v S_{vj} \varepsilon(t) - \\
 &- \sum_{v=1}^{\gamma} \sum_{j=1}^v e^{-2jh} \varepsilon^T(t-jh) S_t \varepsilon(t-jh) - \\
 &- 2\chi \sum_{v=1}^{\gamma} \sum_{j=1}^v \int_{t+\theta}^0 \int_{t-jh}^t e^{2\chi(s-t)} \dot{\varepsilon}^T(s) R_{vj} \dot{\varepsilon}(s) ds d\theta + \\
 &+ \dot{\varepsilon}^T(t) \sum_{v=1}^{\gamma} \sum_{j=1}^v jh R_{vj} \dot{\varepsilon}(t) - \sum_{v=1}^{\gamma} \sum_{j=1}^v jh \int_{t-jh}^t e^{2\chi(s-t)} \dot{\varepsilon}^T(s) R_{vj} \dot{\varepsilon}(s) ds.
 \end{aligned}
 \tag{П.5}$$

Введем следующие обозначения

$$\omega_1(t) = \text{col}\{\varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t)\},$$

$$\omega_2(t) = \frac{1}{h} \text{col} \left\{ \int_{t-h}^t \dot{\varepsilon}(s) ds, \frac{1}{2} \int_{t-2h}^t \dot{\varepsilon}(s) ds, \dots, \frac{1}{\gamma} \int_{t-\gamma h}^t \dot{\varepsilon}(s) ds \right\}$$

$$\omega(t) = \text{col}\{\omega_1(t), \omega_2(t), \varphi(t)\}.$$

Дифференцируя функционал (П.4), найдем

$$W = \dot{V} + 2\chi V - \beta |\varphi|^2 \leq \omega^T \Psi \omega,$$

где $\chi > 0$ – заданное число, которое определяет скорость затухания функционала Ляпунова-Красовского [6, 7]. Существуют константа $\beta > 0$ и матрицы $P > 0$, $P_2 > 0$, $P_3 > 0$, $S_{vj} > 0$, $R_{vj} > 0$, $j \leq v = 1, \dots, \gamma$, такие, что матрица $\Psi < 0$, тогда $W < 0$. Также задано число $\Delta > 0$, где $\Delta^2 = \sup_t \{\varphi^T(t)\varphi(t)\}$, эллипсоид

$$\tag{П.6} \quad K_{\infty} = \left\{ \varepsilon \in R^n : \varepsilon^T P \varepsilon \leq \frac{\sigma^2 \beta}{2\chi} \right\}$$

является областью экспоненциального притяжения.

Из выражения (П.6) верхняя граница ошибки

$$(П.7) \quad \delta = \Delta \sqrt{\frac{\beta}{2\chi\lambda_{\min}(P)}}.$$

Значение числа δ в (2) может меняться в зависимости от параметров объекта управления (1) и системы управления (7). Утверждение доказано.

ROBUST ALGORITHM USING DELAY FOR MULTI-AGENT SYSTEMS

Igor Furtat, Institute for Problems of Mechanical Engineering RAS, St.-Petersburg, ITMO University, St.-Petersburg, Doctor of Science, assistant professor (cainenash@mail.ru).

Artem Nekhoroshikh, ITMO University, St.-Petersburg, engineer (becks94@mail.ru).

Abstract: The paper describes a robust control algorithm for linear multi-agent systems under parametric and structural uncertainties and external unmeasured disturbances. The algorithm includes an observer component which uses left hand side differences for estimation of the derivatives. This allowed us to form a control system without dynamic components. The resulting algorithm ensures required accuracy of difference between the plant output and the reference signal. The simulation results illustrate the effectiveness of the algorithm.

Keywords: robust control, time delay, LMI, Lyapunov-Krasovskii functional, descriptor method.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии П.В. Пакиным.

Поступила в редакцию 03.07.2016.

Опубликована 31.01.2017.