УДК 519.1
ББК 78.34

ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ ПОРОГОВОГО ЗНАЧЕНИЯ В ЭРГОДИЧЕСКОЙ РЕСУРСНОЙ СЕТИ

Скороходов В. А.[1]
(*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*)

Рассмотрена задача поиска порогового значения в эргодической ресурсной сети. Показано, что данная задача сводится к решению системы уравнений, описывающей закономерности перераспределения ресурса для каждой вершины сети. Разработан алгоритм сложности $O(n^3)$ нахождения порогового значения в произвольной эргодической ресурсной сети.

Ключевые слова: эргодическая ресурсная сеть, пороговое значение, предельное состояние, распределение потока.

Введение

Ресурсные сети – динамические графовые модели распространения ресурса – введены и достаточно хорошо изучены в работах О. П. Кузнецова и Л. Ю. Жиляковой (см., например, [5, 7]). Ресурсная сеть – это сеть, для каждой дуги которой указана пропускная способность, а для каждой вершины – величина находящегося в ней ресурса. В каждый момент дискретного времени ресурс каждой вершины перераспределяется между смежными с ней вершинами по определённым правилам. Таким образом, между каждыми последовательными моментами времени по дугам сети проходит поток. При этом правила функционирования сети таковы, что обязательно выполняются два условия. Первое – это условие замкнутости сети, т.е. ресурс ни в какой вершине сети не добавляется извне и не исчезает. Второе – условие неразрывно-

[1] *Владимир Александрович Скороходов, кандидат физико-математических наук, доцент* (*pdvaskor@yandex.ru*).

сти: ресурс, выходящий из вершины, вычитается из ее ресурса, а входящий в вершину – прибавляется к ее ресурсу.

Поскольку ресурс перераспределяется между вершинами в некоторой пропорции, то задача предельного распределения ресурса в сети схожа как с задачей поиска сбалансированного потока, рассмотренной в статье [2], так и с задачами о распределении потока, рассмотренными в статье [9]. Остановимся подробнее на указанных работах.

В статье [2] рассмотрена модель произвольной ориентированной сети с неограниченными пропускными способностями дуг, каждая из вершин которой производит некоторый поток ресурса. Предполагается, что время дискретно и на любом временном шаге каждая вершина распределяет пришедший в нее поток по исходящим дугам в заданной пропорции. Поток, пришедший в каждую вершину-сток, поглощается полностью. В статье [2] доказано, что в случае, когда каждая из вершин графа связана путем со стоком, при любом наборе величин производимого в вершинах потока существует единственный «сбалансированный» поток. Также приведены аналитические формулы для вычисления предельного потока.

В статье [9] рассмотрены задачи о максимальном потоке в произвольной ориентированной сети, для каждой дуги которой вместе с пропускной способностью задана вторая величина – доля приходящего в её начальную вершину потока, которая должна быть пропущена по этой дуге. Рассмотрены два вида такого распределения потока: жёсткое и нежёсткое. В случае жёсткого распределения приходящий в некоторую вершину поток распределяется по выходящим дугам строго в указанных для дуг долях. В случае нежёсткого распределения приходящий в некоторую вершину поток распределяется по выходящим дугам таким образом, чтобы долевая пропорциональность величин потока выполнялась только для тех дуг, на которых полученная величина потока меньше пропускной способности. Последнее означает, что в некоторых случаях нежёстко распределённый поток, приходящий в некоторую вершину, можно «продавить» по выходящим дугам помимо того, что проходит через данную вершину при условии жёсткого распределения.

В статье [4] доказано, что в регулярных сетях существует единственное пороговое значение ресурса, т.е. такое значение, что при величине суммарного ресурса, не превосходящем его, процессы перераспределения ресурса в сети эквивалентны процессам случайного блуждания на графе. Однако процесс нахождения порогового значения методами, описанными в работах [4]–[6], представляется довольно затруднительным.

В настоящей работе рассмотрена задача поиска порогового значения в эргодической (сильно связной) ресурсной сети с применением подходов, описанных в работах [2] и [9]. Показано, что данная задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений, описывающей закономерности перераспределения ресурса для каждой вершины сети.

1. Основные понятия

Приведём основные понятия, необходимые для дальнейшего изложения (см. [5, 7, 8]).

Определение 1. *Ресурсной сетью называют связную ориентированную сеть $G(X, U, f)$ ($X = \{x_1, \ldots, x_n\}$) без стоков, для каждой дуги и которой указана пропускная способность $c(u)$, и задана вектор-функция $Q(t) = (q_1(t), \ldots, q_n(t))$, где $q_i(t) \geqslant 0$ $\forall\, i \in [1; n]_Z$.*

Величина $q_i(t)$ называется количеством ресурса в вершине x_i в момент времени t, а вектор $Q(t)$ – состоянием сети в момент времени t.

Здесь и далее полагаем, что графом (сетью) является тройка $G(X, U, f)$, где X – множество вершин, U – множество дуг, а f – отображение, которое каждой дуге ставит в соответствие пару вершин (начальную и концевую).

Для того чтобы определелить вектор-функцию $Q(t)$, задаётся вектор $Q(0) = (q_1(0), \ldots, q_n(0))$ начального распределения ресурса в сети G и указываются правила перераспределения ресурсов (правила функционирования сети):

$$q_i(t+1) = q_i(t) - \sum_{u\in[x_i]^+} F(u,t) + \sum_{u\in[x_i]^-} F(u,t) \quad \forall\, i \in [1;n]_Z,$$

где величины $F(u,t)$ – величины ресурсного потока выходящего по дуге u в момент времени t – определяются следующим образом (для определённости будем считать, что x_j – начальная вершина дуги u):

$$(1) \qquad F(u,t) = \begin{cases} c(u), & q_j(t) > \sum\limits_{v\in[x_j]^+} c(v); \\ \dfrac{c(u)}{\sum\limits_{v\in[x_j]^+} c(v)} \cdot q_j(t), & q_j(t) \leqslant \sum\limits_{v\in[x_j]^+} c(v). \end{cases}$$

Здесь и далее через $[x]^+$ будем обозначать множество дуг, выходящих из вершины x, а через $[x]^-$ – множество дуг, входящих в вершину x.

Определение 2. *Состояние $Q(t)$ называется устойчивым, если выполняется $Q(t) = Q(t+1)$.*

Согласно правилам перераспределения ресурса, если $Q(t)$ устойчиво, то для всех натуральных i имеет место равенство $Q(t) = Q(t+i)$.

Определение 3. *Состояние $Q^* = (q_1^*, \ldots, q_n^*)$ называется асимптотически достижимым из состояния $Q(0)$, если для каждого $i \in [1;n]_Z$ и всякого $\varepsilon > 0$ существует t_ε такое, что для всех $t > t_\varepsilon$ имеет место неравенство $|q_i^* - q_i(t)| < \varepsilon$.*

Определение 4. *Состояние Q^* называется предельным для начального состояния $Q(0)$ в ресурсной сети G, если оно либо устойчиво и существует такой момент времени t, что $Q^* = Q(t)$, либо оно асимптотически достижимо из $Q(0)$.*

Определение 5. *Ресурсную сеть будем называть эргодической, если она является сильно связной.*

Определение 6. *Эргодическую ресурсную сеть будем называть регулярной, если существует по крайней мере два контура, длины которых являются взаимно простыми числами.*

Определение 7. *Эргодическую ресурсную сеть будем называть d-циклической, если наибольший общий делитель длин всех её контуров равен числу d.*

Определим множества вершин $Z^+(t)$ и $Z^-(t)$ следующим образом. Будем говорить, что для всех $j \in [1; n]_Z$ в момент времени t вершина $x_j \in Z^-(t)$, если $q_j(t) \leqslant \sum\limits_{v \in [x_j]^+} c(v)$, в противном случае будем говорить, что $x_j \in Z^+(t)$.

Другими словами, множество $Z^-(t)$ состоит из тех вершин x_j ресурсной сети, которые в момент времени t передают по выходящим дугам весь свой текущий ресурс, т.е. каждая дуга u, выходящая из вершины $x_j \in Z^-(t)$, насыщается ресурсным потоком по второму правилу (вторая строка) в (1). Множество $Z^+(t)$ образуется теми вершинами, для которых при полном насыщении своих выходящих дуг ресурсным потоком – работая по правилу 1 (первая строка) в (1) – передаёт не весь свой текущий ресурс.

Определение 8. *Будем говорить, что вершина x переходит в зону Z^-, если найдётся такой момент времени t', что $x \in Z^-(t)\ \forall\, t \geqslant t'$.*

Обозначим через $W = \sum\limits_{i=1}^{n} q_i(0)$ величину суммарного ресурса сети.

Определение 9. *Пороговым значением для ресурсной сети G будем называть такую величину T, для которой если $W \leqslant T$, то все вершины ресурсной сети G перейдут в зону Z^-. В противном случае для каждого момента времени t множество $Z^+(t) \neq \emptyset$.*

2. Нахождение порогового значения в эргодической ресурсной сети

Рассмотрим вопрос о нахождении порогового значения для эргодической ресурсной сети G.

Поскольку все вершины сети в предельном состоянии при $W \leqslant T$ распределяют ресурс по второму правилу (вторая строка) в (1), следовательно, перераспределение ресурса между вершинами можно рассматривать как жёстко распределённый поток (см. [9]) в сети, каждая вершина x которой является одновременно и источником с потенциалом q_x^* (см. [2]), и стоком. Последнее становится возможным, поскольку в предельном состоянии при $W \leqslant T$ весь ресурс перераспределяется за один такт, и в каждой вершине в следующий момент $t+1$ оказывается столько же ресурса, сколько было в момент времени t для всех $t \in \mathbb{Z}_+$.

Таким образом, для величин пропускной способности $c(u)$ и величин предельного потока $F^*(u)$ справедливы следующие выражения ([3, 9]):

$$\begin{cases} \sum\limits_{u \in [x]^-} F^*(u) - \sum\limits_{u \in [x]^+} F^*(u) = 0, & \forall\, x \in X; \\ 0 \leqslant F^*(u) \leqslant c(u), & \forall\, u \in U. \end{cases} \tag{2}$$

$$F^*(u_i) \cdot c(u_j) = F^*(u_j) \cdot c(u_i) \quad \forall\, u_i, u_j \in [x]^+, \quad \forall\, x \in X. \tag{3}$$

Отметим, что структура произвольной эргодической ресурсной сети такова, что при дополнительных условиях, когда считаем каждую вершину и источником, и стоком, она удовлетворяет условиям s-охватываемости и t-охватываемости (см. [9]). Последние соответственно означают, что для каждой вершины x существует путь из какого-нибудь источника в вершину x и существует путь из вершины x в какой-нибудь сток. Отсюда следует, что для нахождения порогового значения можно воспользоваться методом, описанным в работах [2] и [9]. Согласно этому методу для сети G составим систему линейных алгебраических уравнений, которые описывают закономерности распределения ресурса из каждой вершины при условии, что все вершины находятся в зоне Z^- и достигнуто предельное состояние Q^*. Её решение позволит определить пороговое значение для сети G.

Систему уравнений относительно неизвестных $F(u)$ – количества ресурса, проходящего по дуге u, и Q_x – количества ресурса в вершине x, будем строить в три этапа:

Этап 1. Для каждой вершины x составим уравнения следующего вида:

$$F(u) - \frac{c(u)}{\sum\limits_{v \in [x]^+} c(v)} \cdot Q_x = 0 \quad \forall\, u \in [x]^+, \tag{4}$$

$$Q_x - \sum_{v \in [x]^-} F(v) = 0. \tag{5}$$

Замечание 1. Уравнения (4) (первого вида) обеспечивают выполнение равенства (3). Уравнения (5) (второго вида) связывают величину входящего в вершину x потока с величиной ресурса в этой вершине, таким образом обеспечивая выполнение равенства в условии (2).

Этап 2. К уравнениям, построенным на этапе 1, добавим уравнение вида $F(w) = z$, где $z \in R_+$ и w – произвольная дуга сети G. Таким образом, получили систему уравнений

$$\begin{cases} F(u) - \dfrac{c(u)}{\sum\limits_{v \in [x]^+} c(v)} \cdot Q_x = 0, & \forall\, x \in X,\ \forall\, u \in [x]^+; \\ Q_x - \sum\limits_{v \in [x]^-} F(v) = 0, & \forall\, x \in X; \\ F(w) = z. \end{cases} \tag{6}$$

Покажем, что решение системы (6) существует и единственно.

Зафиксируем нумерации во множествах вершин и дуг: $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ и $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$. Здесь и далее будем считать, что $m = |U|$. Основную матрицу системы (6) обозначим через A. При этом порядок следования элементов в строке матрицы A таков, что вначале указываются коэффициенты при неизвестных $F(u)$, затем при неизвестных Q_x.

Теорема 1. *Решение системы уравнений* (6) *существует и единственно для любого действительного значения z.*

Доказательство. Основная матрица системы (6) без последней строки имеет следующий вид:

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\
0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \\
\hline
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & 1 & 0 & \dots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & 0 & 0 & \dots & 1
\end{array}\right),$$

где величины a_{ij} и b_{ij} определяются по следующим правилам:

$$a_{ij} = \begin{cases} -1, & u_j \in [x_i]^-; \\ 0, & u_j \notin [x_i]^-. \end{cases} \quad b_{ij} = \begin{cases} \dfrac{-c(u_i)}{\sum\limits_{v \in [x_j]^+} c(v)}, & u_i \in [x_j]^+; \\ 0, & u_i \notin [x_j]^+. \end{cases}$$

Обозначим через B матрицу, состоящую из элементов b_{ij}. Отметим, что для элементов b_{ij} матрицы B имеет место следующее соотношение:

(7) $$\sum_{i=1}^{m} b_{ij} = -1 \quad \forall j \in [1; n]_Z.$$

Покажем, что $\texttt{rank}\, A' = m + n - 1$. Для этого проведём элементарные преобразования строк матрицы A' таким образом, чтобы исключить все ненулевые элементы a_{ij}. В результате получим матрицу A'_1 такую, что

$$A'_1 = \left(\begin{array}{c|c} E_m & B \\ \hline \Theta & D \end{array}\right),$$

где E_m – единичная матрица порядка m, Θ – матрица порядка $n \times m$, все элементы которой равны нулю.

Таким образом, получили, что $\texttt{rank}\, A' = \texttt{rank}\, E_m + \texttt{rank}\, D$, и поскольку $\texttt{rank}\, E_m = m$, то покажем, что $\texttt{rank}\, D = n - 1$.

Рассмотрим отдельно матрицу D. Её элементы d_{ij} таковы, что

$$\sum_{i=1}^{n} d_{ij} = 0 \quad \forall j \in [1; n]_Z.$$

Это следует из правил построения системы (6) и соотношения (7). Более того, для матрицы D имеет место равенство $D = (E - P)^\tau$, где P – стохастическая матрица (см. [1, 5]) ресурсной сети G.

Матрица P является неотрицательной, следовательно (см. [1]), её наибольшее по модулю собственное значение r является положительным и простым корнем характеристического многочлена, и поскольку P является стохастической матрицей, то $r = 1$. Отсюда и из сильной связности ресурсной сети G следует, что $\mathtt{rank}\, D = \mathtt{rank}\, (E - P)^\tau = n - 1$.

В итоге показали, что $\mathtt{rank}\, R = m + n - 1$, следовательно, элементарными преобразованиями расширенная матрица системы (6) может быть приведена к следующему виду:

$$A'' = \left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{m+n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & z \end{array}\right),$$

где $\alpha_i \neq 0$ для всех значений $i \in [1; m + n - 1]_Z$. Последнее следует из нетривиальной разрешимости задачи о максимальном потоке в сети, которая является одновременно s-охватываемой и t-охватываемой (см. [9]).

Для определённости обозначим через p номер столбца, содержащего единицу в последней строке (т.е. будем считать, что $w = u_p$). Выполним элементарное преобразование для строки A''_p: $A''_p - A''_{m+n+1}$. В левой части полученной строки A'_p остался единственный ненулевой элемент α_p, находящийся в последнем столбце. При помощи этого элемента элементарными преобразованиями исключим остальные элементы столбца p.

В результате получили, что $\texttt{rank}\, A = \texttt{rank}\, A'' = m + n$. Следовательно, решение системы линейных уравнений (6) существует и единственно.

Для ресурсной сети G рассмотрим две системы вида (6), которые отличаются только последним уравнением. Положим $F(u) = z_1$ последним уравнением первой системы, а $F(u) = z_2$ – последним уравнением второй системы. Пусть (F', Q') и (F'', Q'') – соответственно решения первой и второй системы вида (6).

Теорема 2. *Если $z_1 \geqslant z_2$, то имеют место следующие соотношения:*

$$\left\{ \begin{array}{ll} F'(u_i) \geqslant F''(u_i), & \forall\, i \in [1;m]_Z; \\ Q'_{x_j} \geqslant Q''_{x_j}, & \forall\, j \in [1;n]_Z. \end{array} \right. \tag{8}$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 2 в [9] соотношения (8) напрямую следуют из неравенства $z_1 \geqslant z_2$ и полученного в доказательстве теоремы 1 общего вида решения системы (6):

$$(F, Q) = z \cdot \left(\begin{array}{cccccc} \xi_1, & \ldots, & \xi_m, & \zeta_1, & \ldots, & \zeta_n \end{array} \right)^{\tau},$$

где $\xi_i = 1$, если $u_i = u$.

В качестве следствия теоремы 2 выступает следующая теорема.

Теорема 3. *Величина порогового значения T в ресурсной сети может быть найдена при помощи следующего алгоритма.*

Алгоритм 1.

Шаг 0. Положим $V = \emptyset$, $\overline{V} = U \setminus V$.

Шаг 1. Выберем произвольную дугу и множества $\overline{V}$. Решаем систему уравнений (6)*, в качестве последнего уравнения полагаем уравнение $F(u) = c(u)$.*

Шаг 2. Для каждой дуги $w \in \overline{V}$ выполняем проверку подстановкой решения системы уравнений, рассмотренной на шаге 1, и если неравенство в условии (2) *выполняется, то $V := V \bigcup \{w\}$.*

Шаг 3. Если $V \neq U$, то полагаем $\overline{V} = U \setminus V$ и возвращаемся на шаг 1. Иначе полученное на шаге 1 решение системы вида (6) *является искомым и пороговое значение T может быть найдено следующим образом:*

$$T = \sum_{i=1}^{n} Q_{x_i}.$$

Вычислительная трудоёмкость алгоритма 1 определяется трудоёмкостью решения системы линейных алгебраических уравнений, которая исходя из общего вида системы (6) и доказательства теоремы 1 ограничена величиной $O(n^3)$, где $n = |X|$. Таким образом трудоёмкость алгоритма 1 ограничена величиной $O(m \cdot n^3)$, и в худшем случае, когда сеть G является плотной, она ограничена величиной $O(n^5)$. Однако, аналогично тому, как было отмечено в [9], трудоёмкость алгоритма 1 может быть уменьшена ввиду общего вида решения системы (6), указанного в доказательстве теоремы 2. Действительно, получив решение системы (6), одновременно с ним определяется пропорциональность его элементов. Таким образом, нет необходимости в повторном решении системы.

Пользуясь пропорциональностью элементов решения и тем, что один из них (в части F) должен совпадать с пропускной способностью соответствующей дуги, полученное решение системы с трудоёмкостью, ограниченной величиной $O(n^2)$, может быть приведено к искомому. Таким образом, вычислительная трудоёмкость алгоритма 1 может быть уменьшена до $O(n^3)$.

3. Существование предельного состояния при $W = T$

Рассмотрим вопрос о существовании предельного состояния в эргодической ресурсной сети G при $W = T$.

Пусть $Q(0)$ – начальное состояние в сети G. При этом состояние $Q(0)$ таково, что $W = \sum\limits_{i=1}^{n} q_i(0) = T$. В случае, когда сеть G является регулярной, для любого начального состояния существует единственное предельное состояние (см. [4, 8]). Таким образом, рассмотрим только случай нерегулярной эргодической сети.

Полагаем, что наибольший общий делитель длин всех контуров в сети G равен d. Для марковской цепи, соответствующей такой ресурсной сети, не существует предельного распределения (см. [8]). Значит, по [5] для случая $W < T$ начальное состояние определяет существование предельного (см. [5]), поскольку в большинстве случаев количество ресурса в каждой вершине будет периодически повторяться с периодом d. Однако случай $W = T$ существенно отличается от предыдущего.

По теореме 1 из [6] при $W \geqslant T$ потоки стабилизируются, предельный поток существует и единственен и в сети существует предельное состояние для любого начального состояния. Пороговое значение T составляется из элементов решения системы (6) при условии (3), описывающем закономерности распределения ресурса в случае, когда все вершины находятся в зоне Z^-, и условии максимальности ресурсного потока, проходящего в сети G.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Состояние Q, полученное последним при применении алгоритма 1 для нахождения порогового значения сети, является предельным для любого начального состояния $Q(0)$ с суммарным ресурсом величины $W = T$.*

Доказательство напрямую следует из теоремы 1 в [6] и теоремы 3.

Пример 1. Рассмотрим ресурсную сеть G_1 на рис. 1. Для удобства (чтобы не загромождать рисунок) каждая пара противоположных дуг изображена одним ребром. Т.е. каждая вершина сети G_1 соединена дугой с каждой из оставшихся вершин и, кроме того, в вершинах 1 и 4 имеются петли.

Отметим, что сеть G_1 является регулярной, поскольку существуют по крайней мере два контура, длины которых – простые числа (см. [9]). Далее также будет рассмотрен пример эргодической сети, которая не является регулярной.

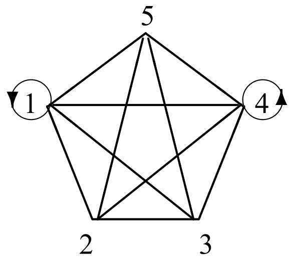

Рис. 1. Регулярная сеть G_1 с петлями

Матрица пропускных способностей для сети G_1 имеет вид

$$C_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 0 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зафиксируем нумерацию дуг сети следующим образом: $f(u_1) = (1,1)$, $f(u_2) = (1,2)$, $f(u_3) = (1,3)$, $f(u_4) = (1,4)$, $f(u_5) = (1,5)$, $f(u_6) = (2,1)$, $f(u_7) = (2,3)$, $f(u_8) = (2,4)$, $f(u_9) = (2,5)$, $f(u_{10}) = (3,1)$, $f(u_{11}) = (3,2)$, $f(u_{12}) = (3,4)$, $f(u_{13}) = (3,5)$, $f(u_{14}) = (4,1)$, $f(u_{15}) = (4,2)$, $f(u_{16}) = (4,3)$, $f(u_{17}) = (4,4)$, $f(u_{18}) = (4,5)$, $f(u_{19}) = (5,1)$, $f(u_{20}) = (5,2)$, $f(u_{21}) = (5,3)$, $f(u_{22}) = (5,4)$.

Решая для ресурсной сети G_1 систему вида (6), полагая $F(u_1) = 2$ в качестве последнего уравнения, получим следующий набор значений: $F(u_i) = 2$, $\forall\, i \in [1;22]_Z$ и $Q_1 = Q_4 = 10$, $Q_2 = Q_3 = Q_5 = 8$.

Поскольку для найденного решения системы вида (6) выполняется $F(u_{19}) > c(u_{19})$, то необходимо выполнить пересчёт, пользуясь пропорциональностью элементов решения. В результате такого пересчёта получим искомый набор значений: $F(u_i) = 1$, $\forall\, i \in [1;22]_Z$ и $Q_1 = Q_4 = 5$, $Q_2 = Q_3 = Q_5 = 4$.

Таким образом, пороговое значение для ресурсной сети G_1 равно $T = 22$. Предельное состояние $Q^* = Q$ при величине ресурса в сети $W = T$. •

Пример 2. Рассмотрим 3-циклическую ресурсную сеть G_2 на рис. 2.

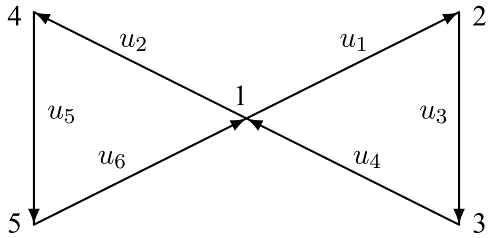

Рис. 2. Ресурсная сеть G_2

Матрица пропускных способностей имеет вид

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решая для ресурсной сети G_2 систему вида (6), полагая $F(u_1) = 2$ в качестве последнего уравнения, получим следующий набор значений: $F(u_1) = F(u_3) = F(u_4) = 2$, $F(u_2) = F(u_5) = F(u_6) = 4$, $Q_1 = 6$, $Q_2 = Q_3 = 2$, $Q_4 = Q_5 = 4$. Выполняя пересчёт с использованием пропорциональности, получим искомый набор значений: $F(u_1) = F(u_3) = F(u_4) = 1$, $F(u_2) = F(u_5) = F(u_6) = 2$, $Q_1 = 3$, $Q_2 = Q_3 = 1$, $Q_4 = Q_5 = 2$.

Таким образом, пороговое значение для ресурсной сети G_2 равно $T = 9$. Предельное состояние $Q^* = Q$ при величине ресурса в сети $W = T$. На рис. 3 приведены графики динамического изменения величины ресурса в сети G_2 при начальном состоянии $Q(0) = (0, 0, 6, 0, 3)$.

Следует отметить формулу для вычисления порогового значения d-циклической ресурсной сети, приведённую в [6, стр. 24]

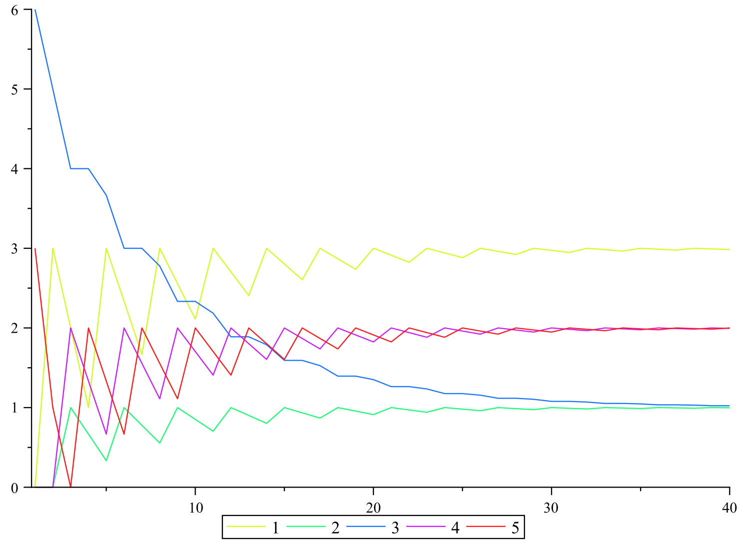

Рис. 3. Графики динамического изменения величин ресурсов в сети G_2, где 1, 2, 3, 4, 5 – номера узлов сети G_2

как следствие 2 к теореме 2:

$$T = \min_i \frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}}, \tag{9}$$

где $r_i^{out} = \sum\limits_{v \in [x_j]^+} c(v)$, а элементы q_i^{1*} являются средними арифметическими соответствующих компонент предельных векторов Q_j^{1*} $(j \in [1;q]_Z)$ при $W = 1$ и произвольном начальном состоянии. Однако вычисление последних представляется довольно затруднительным для произвольной ресурсной сети, а именно, в тех случаях, когда значение d заранее неизвестно. Существующие алгоритмы поиска только величины d имеют вычислительную трудоёмкость $O(n^3)$, что уже сравнимо с трудоёмкостью алгоритма 1. С другой стороны, в [6] показано, что вектор $Q^{1*} = \left(q_1^{1*}, \ldots, q_n^{1*}\right)$ является единственным положительным собственным вектором стохастической матрицы ресурсной сети, а значит, трудоёмкость его вычисления $(O(n^3))$ должна быть сравнима с трудоёмкостью алгоритма 1.

Приведём вариант решения задачи поиска порогового значения в ресурсной сети G_2 при помощи формулы (9).

Сеть G_2 является 3-циклической ресурсной сетью, в которой множество вершин разбивается на три циклических множества: $\{1\}$, $\{2,4\}$ и $\{3,5\}$. Тогда для произвольного начального состояния при величине ресурса $W = 1$ предельные векторы имеют вид:

$$Q_1^{1*} = (1;0;0;0;0)\,, Q_2^{1*} = \left(0;\frac{1}{3};0;\frac{2}{3};0\right), Q_3^{1*} = \left(0;0;\frac{1}{3};0;\frac{2}{3}\right).$$

Найдём компоненты q_i^{1*} вектора Q^{1*} как среднее арифметическое соответствующих компонет векторов Q_j^{1*}, $j \in \{1,2,3\}$. Получим

$$Q^{1*} = \left(\frac{1}{3};\frac{1}{9};\frac{1}{9};\frac{2}{9};\frac{2}{9}\right).$$

Для каждой вершины i вычислим значение величины $\dfrac{r_i^{out}}{q_i^{1*}}$:

$$\frac{r_1^{out}}{q_1^{1*}} = \frac{6}{\frac{1}{3}} = 18, \quad \frac{r_2^{out}}{q_2^{1*}} = \frac{2}{\frac{1}{9}} = 18, \quad \frac{r_3^{out}}{q_3^{1*}} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9,$$

$$\frac{r_4^{out}}{q_4^{1*}} = \frac{4}{\frac{2}{9}} = 18, \quad \frac{r_5^{out}}{q_5^{1*}} = \frac{2}{\frac{2}{9}} = 9.$$

Минимум достигается в вершинах 3 и 5. Таким образом, получили $T = 9$. ●

Литература

1. ГАНТМАХЕР Ф.Р. *Теория матриц*. — М.: Наука, 1966. — 576 с.
2. ЕРЗИН А.И., ТАХОНОВ И.И. *Задача поиска сбалансированного потока* // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2006. — Т. IX, №4(28). — С. 50–63.
3. ЕРУСАЛИМСКИЙ Я.М., СКОРОХОДОВ В.А., КУЗЬМИНОВА М.В., ПЕТРОСЯН А.Г. *Графы с нестандартной достижимостью: задачи, приложения*. — Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2009. — 195 с.
4. ЖИЛЯКОВА Л.Ю. *Несимметричные ресурсные сети. I. Процессы стабилизации при малых ресурсах* // Автоматика и телемеханика. — 2011. — №4. — С. 133-143.
5. ЖИЛЯКОВА Л.Ю. *Эргодические циклические ресурсные сети. I. Колебания и равновесные состояния при малых ресурсах* // Управление большими системами. – 2013. — №43. — С. 34–54.
6. ЖИЛЯКОВА Л.Ю. *Эргодические циклические ресурсные сети. II. Большие ресурсы* // Управление большими системами. – 2013. — №45. — С. 6–29.
7. КУЗНЕЦОВ О.П., ЖИЛЯКОВА Л.Ю. *Двусторонние ресурсные сети – новая потоковая модель* // Доклады АН. – 2010. — Т. 433, №5. — С. 609–612.
8. СКОРОХОДОВ В.А. *Устойчивость и стационарное распределение на графах с нестандартной достижимостью* // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2007. — №4. — С. 17–21.
9. СКОРОХОДОВ В.А., ЧЕБОТАРЕВА А.С. *Задача о максимальном потоке в сети с особыми условиями распределения потока* // Дискретный анализ и исследование операций. – 2015. — Т. 22, №3. — С. 55–74.

THE PROBLEM OF FINDING THE THRESHOLD VALUE IN ERGODIC RESOURCE NETWORK

Vladimir Skorokhodov, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Cand.Sc., Associated Professor (pdvaskor@yandex.ru).

Abstract: Resource network is a graphical model of diffusion proposed earlier in the literature. Every node of the network stores some amount of "resource". This resource disseminates through networks according to the specified rules. Earlier it was proved that if the total amount of resource in the network does not exceed some threshold value that the diffusion process is equivalent to the random walk in the related Markov chain. The problem of finding the threshold value in ergodic resource network is considered. It is shown that this problem is reduced to solving of system of equations, which describes the principles of redistribution of resource for each node of a network. The $O(n^3)$ complexity algorithm for finding the threshold value in arbitrary ergodic network is developed.

Keywords: ergodic resource network, threshold value, limit state, flow distribution, random walks in networks.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии О. П. Кузнецовым.

*Поступила в редакцию 15.12.2015.
Дата опубликования 30.09.2016.*